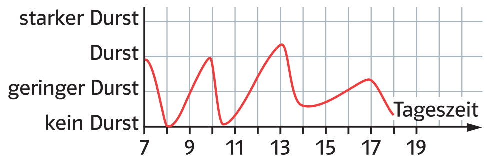
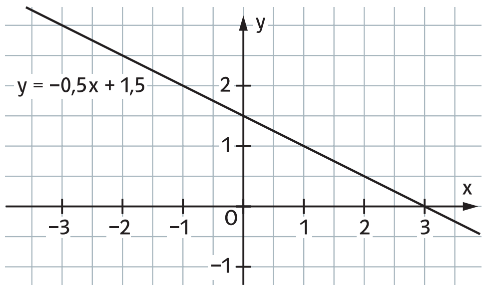
Funktion

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, bei der zu jeder Größe eines ersten Bereichs (Eingabegröße) **genau eine** Größe eines zweiten Bereichs (Ausgabegröße) gehört.



Eine **Funktion** wird durch eine **Funktionsvorschrift** oder eine **Funktionsgleichung** beschrieben und lässt sich in einer **Wertetabelle** oder als **Graph** darstellen.

Graph



Funktionsvorschrift $y \rightarrow -0{,}5x + 1{,}5$
Funktionsgleichung $y = -0{,}5x + 1{,}5$

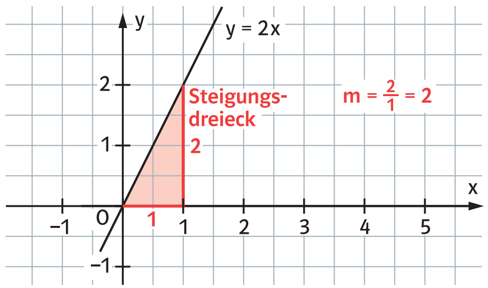
Wertetabelle

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0

→ Lineare Funktionen

Proportionale Funktion

Eine Funktion mit der Gleichung **y = m · x** heißt **proportionale Funktion.**
Der Graph ist eine Gerade, die durch den **Ursprung** des Koordinatensystems verläuft.
Der Faktor m gibt die Steigung der Geraden an.

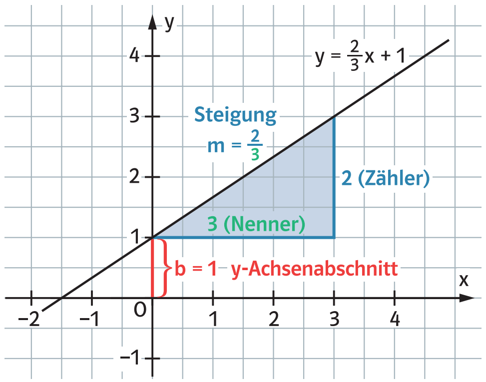


→ Lineare Funktionen

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Lineare Funktion

Eine Funktion mit der Gleichung
$y = m \cdot x + b$ heißt **lineare Funktion**.
Der Graph ist eine Gerade mit der **Steigung m**. Die Gerade schneidet die y-Achse im Punkt P(0|b).
Der **Wert b** bezeichnet den **y-Achsenabschnitt** der Geraden.

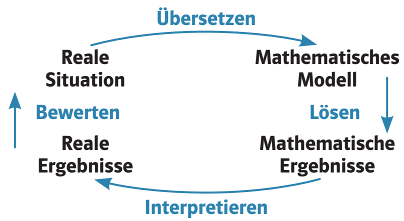


→ Lineare Funktionen

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Modellieren

Beim Modellieren wird eine Problemsituation aus der realen Welt in ein mathematisches Modell übersetzt.
Mithilfe der Lösung werden mathematische Ergebnisse formuliert, die wiederum interpretiert werden können und zu realen Ergebnissen führen.
Abschließend erfolgt eine Bewertung des Ergebnisses in der realen Situation.



Zum Beispiel lassen sich mithilfe von quadratischen Gleichungen Brückenbögen, Flugbahnen usw. beschreiben.

→ Lineare und quadratische Funktionen

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Lineares Gleichungssystem

Zwei lineare Gleichungen mit jeweils zwei Variablen bilden zusammen ein **lineares Gleichungssystem**. Dieses lässt sich grafisch oder rechnerisch lösen.

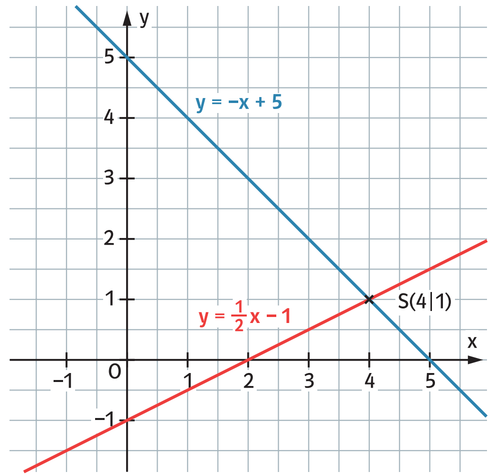
(1) $x - 2y = 2$
(2) $x + y = 5$

→ Lineare Funktionen

Grafisches Lösungsverfahren

Die linearen Gleichungen lassen sich als Geraden darstellen.
Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden erfüllen beide Gleichungen und sind somit die **Lösung des Gleichungssystems**.
Ein Gleichungssystem hat

- **genau eine Lösung**, wenn sich die zugehörigen Geraden **in einem Punkt schneiden**.
- **keine Lösung**, wenn die Geraden parallel verlaufen.
- **unendlich viele Lösungen**, wenn zu den zwei Gleichungen **identische Geraden** gehören.



→ Lineare Funktionen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Rechnerische Lösungsverfahren

Jedes Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt, ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems.
Es gibt drei Verfahren, die man zur Lösungsbestimmung anwenden kann:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

(1) $x - 2y = 2$
(2) $x + y = 5$

Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (4 ; 1).

→ Lineare Funktionen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Gleichsetzungsverfahren

Zwei Gleichungen sind gegeben.

(1) $y = 2x - 1$
(2) $x + y = 5$

Man löst beide Gleichungen nach derselben Variablen auf.
Durch Gleichsetzen der Terme erhält man eine Gleichung mit einer Variablen.
Man löst diese Gleichung und setzt die Lösung in eine der Gleichungen ein, um die Lösung für die zweite Variable zu bekommen.

(1) $y = 2x - 1$
(2) $y = -x + 5$
(1) = (2): $2x - 1 = -x + 5$
$x = 2$
Einsetzen in (1) ergibt
$y = 3$
Die Lösung lautet (2 ; 3).

→ Lineare Funktionen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Einsetzungsverfahren

Um aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten, kann man auch die eine in die andere Gleichung **einsetzen**. Die Lösung, die man so für die eine Variable erhält, setzt man in eine der Ursprungsgleichungen ein, um die Lösung für die zweite Variable zu erhalten.

(1) $13x + y = 11$
(2) $-8y - 3 = 13x$

(2) in (1): $-8y - 3 + y = 11$

$y = -2$

Einsetzen in (1) oder (2) ergibt

$x = 1$

Die Lösung lautet $(1\,;\,-2)$.

→ Lineare Funktionen

Additionsverfahren

Man formt beide Gleichungen so um, dass beim Addieren oder **Subtrahieren** beider Gleichungen eine Variable wegfällt. So entsteht eine Gleichung mit einer Variablen.

(1) $3x + 5y = 10$
(2) $4x - 5y = 4$

(1) + (2): $7x = 14$

$x = 2$

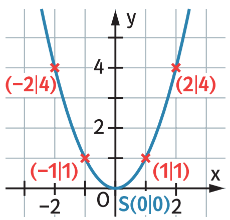
$y = 0{,}8$

Die Lösung lautet $(2\,;\,0{,}8)$.

→ Lineare Funktionen

Normalparabel

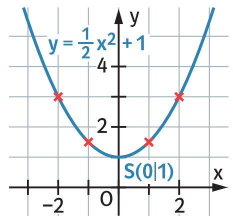
Der Graph der einfachsten quadratischen Funktion $y = x^2$ ist die **Normalparabel**. Sie ist achsensymmetrisch zur y-Achse und ihr **Scheitel** liegt im Koordinatenursprung.



→ Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2 + c$

Der Graph der Funktion $y = a \cdot x^2 + c$ ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel, die schmaler oder breiter als die Normalparabel sein kann. Sie ist zusätzlich um den Summanden c in Richtung der y-Achse verschoben. Ihr Scheitel ist $S(0\,|\,c)$.

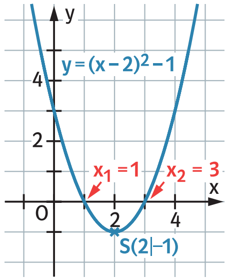


$0 < a < 1$: breiter
$a > 1$: schmaler als die Normalparabel

→ Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionsgleichung in der Scheitelform $y = (x - d)^2 + c$

Der Graph der Funktion $y = (x - d)^2 + c$ ist eine um d in Richtung der x-Achse und um c in Richtung der y-Achse **verschobene Normalparabel**.
Ihr **Scheitel** ist **S (d | c)**.
Durch **quadratisches Ergänzen** kann die Parabelgleichung $y = x^2 + p \cdot x + q$ in die Scheitelform umgewandelt werden.

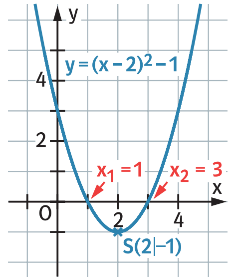


$y = x^2 - 4x + 3$
$y = x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3$
$y = (x - 2)^2 - 1$
$S(2|-1)$

→ Quadratische Funktionen

Nullstellen einer quadratischen Funktion

An den Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse ist der Funktionswert y gleich null. Den x-Wert des Schnittpunktes mit der x-Achse nennt man **Nullstelle**.



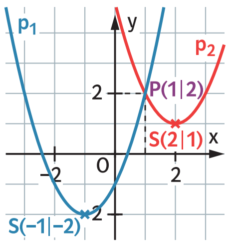
Die Nullestellen der quadratischen Funktion sind:
$x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

→ Quadratische Funktionen

Schnittpunkte zweier quadratischer Funktionen

Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier quadratischer Funktionen zu berechnen, setzt man die Funktionsterme gleich.

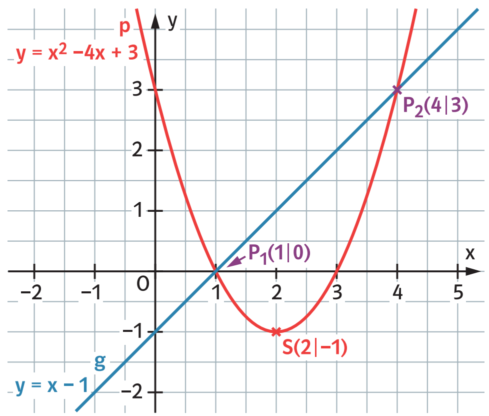
p_1: $y = x^2 + 2x - 1$
p_2: $y = x^2 - 4x + 5$
Gleichsetzen:
$x^2 + 2x - 1 = x^2 - 4x + 5 \quad | -x^2 + 4x + 1$
$6x = 6 \quad | : 6$
$x = 1$
x einsetzen: $y = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1$
$y = 2 \qquad P(1|2)$



→ Quadratische Funktionen

Schnittpunkte einer linearen und einer quadratischen Funktion

Um die Koordinaten des Schnittpunktes einer linearen und einer quadratischen Funktion zu berechnen, setzt man die Funktionsterme gleich.



g: $y = x - 1$
p: $y = x^2 - 4x + 3$
Gleichsetzen:
$x - 1 = x^2 - 4x + 3 \quad | -x + 1$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{(2{,}5)^2 - 4}$
$x_1 = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$
$x_2 = 2{,}5 + 1{,}5 = 4$
x_1 und x_2 einsetzen:
$y_1 = 1 - 1 = 0$; $y_2 = 4 - 1 = 3$
Schnittpunkte: $P_1(1|0)$ und $P_2(4|3)$.

→ Lineare und quadratische Funktionen

Rein quadratische Gleichungen

Rein quadratische Gleichungen kann man lösen, indem man die Gleichung nach x^2 auflöst und dann auf beiden Seiten die Wurzel zieht. Ist der Radikand positiv, hat die Gleichung zwei Lösungen; ist er negativ, gibt es keine Lösung. Hat der Radikand den Wert null, gibt es genau eine Lösung.

$$
\begin{aligned}
7x^2 - 13 &= 15 && \mid +13\\
7x^2 &= 28 && \mid :7\\
x^2 &= 4 && \mid \sqrt{}\\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{4}\\
x_1 &= 2;\; x_2 = -2
\end{aligned}
$$

→ Quadratische Funktionen

Quadratische Ergänzung

Gemischt quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ kann man lösen, indem man den Term $x^2 + px$ quadratisch ergänzt.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 5 &= 0 && \mid -5\\
x^2 + 6x &= -5 && \mid +\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\\
x^2 + 6x + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 &= -5 + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 && \mid \text{Binom}\\
(x+3)^2 &= -5 + 9 && \mid \sqrt{}\\
x + 3 &= \pm\sqrt{4} && \mid -3\\
x_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{4}\\
x_1 &= -1;\; x_2 = -5
\end{aligned}
$$

→ Quadratische Funktionen

abc-Formel

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ lauten

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 6x + 4\\
x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4}\\
&= \frac{-6 \pm 2}{4}\\
x_1 &= -1;\; x_2 = -2
\end{aligned}
$$

→ Quadratische Funktionen

p-q-Formel

Eine gemischt quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ hat die Koeffizienten p und q. Die Lösung der Gleichung kann mit der p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

bestimmt werden.

Die Gleichung $x^2 + 4x - 21 = 0$ hat die Koeffizienten $p = 4$ und $q = -21$. Einsetzen ergibt:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-21)}\\
x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{4 + 21}\\
x_{1,2} &= -2 \pm 5\\
x_1 &= 3;\; x_2 = -7
\end{aligned}
$$

→ Quadratische Funktionen