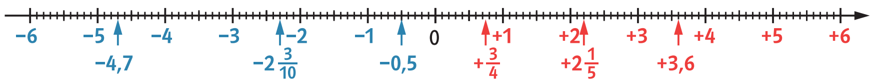
Rationale Zahlen

Die ganzen Zahlen zusammen mit allen positiven und negativen Bruchzahlen heißen **rationale Zahlen**. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Je weiter links eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto kleiner ist sie.
Je weiter rechts eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto größer ist sie.

negative rationale Zahlen positive rationale Zahlen



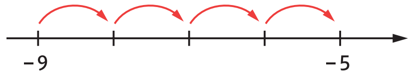
$-4{,}7 < -2\frac{3}{10} < -0{,}5 < +\frac{3}{4} < 2\frac{1}{5} < +3{,}6$

→ Rechnen

Zunahme und Abnahme

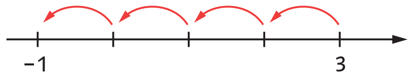
Änderungen lassen sich durch positive oder negative Zahlen beschreiben. Die Veränderungen lassen sich an der Zahlengerade veranschaulichen.

Eine **Zunahme** um 4 bedeutet:
Gehe 4 Schritte nach rechts.



Die Änderung beträgt +4.

Eine **Abnahme** um 4 bedeutet:
Gehe 4 Schritte nach links.



Die Änderung beträgt −4.

$-13\,°C \xrightarrow{+8\,°C} -5\,°C$

$+2{,}6\,°C \xrightarrow{-4{,}2\,°C} -1{,}6\,°C$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Überschlagsrechnung

Bei einer Überschlagsrechnung rundet man die Zahlen sinnvoll.

$46{,}6 + 87{,}7 - 21{,}3 \approx 45 + 90 - 20 = 115$

$1611 \cdot (-4) \approx 1600 \cdot (-4) = -6400$

Das Zeichen ≈ bedeutet ungefähr.

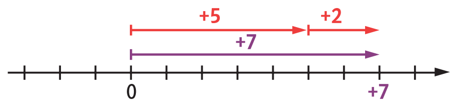
→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

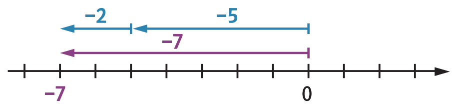
Addition rationaler Zahlen gleicher Vorzeichen

Summand + Summand = Summe

Bei gleichen Vorzeichen der Summanden werden die Beträge addiert.
Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.



$(+5) + (+2) = 5 + 2 = 7$



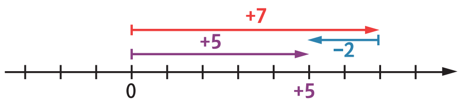
$(-5) + (-2) = -(5 + 2) = -7$

→ Rechnen

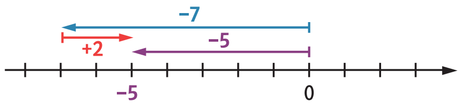
Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Addition rationaler Zahlen verschiedener Vorzeichen

Bei verschiedenen Vorzeichen der Summanden werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.



$(+7) + (-2) = 7 - 2 = 5$



$(-7) + (+2) = -(7 - 2) = -5$

→ Rechnen

Subtraktion rationaler Zahlen

Minuend − Subtrahend = Differenz

Rationale Zahlen werden subtrahiert, indem man die Gegenzahl des Subtrahenden addiert.

$(+8) - (+15) = (+8) + (-15) = -(15 - 8) = -7$

$(+17) - (-4) = (+17) + (+4) = 17 + 4 = 21$

$(-5{,}6) - (-3{,}4) = (-5{,}6) + (+3{,}4) = -(5{,}6 - 3{,}4) = -2{,}2$

$\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{2} = -2$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Vereinfachte Schreibweise

Bei der Addition und der Subtraktion können positive Vorzeichen und Klammern weggelassen werden.
Ist das Vorzeichen negativ, wird das vorangegangene Rechenzeichen beim Auflösen der Klammer umgekehrt.

Ersetzen Sie
+ (+) durch +,
+ (−) durch −,
− (+) durch −,
− (−) durch +.

$(+27) + (+14) = 27 + 14 = 41$

$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$

$(-80) - (+150) = -80 - 150 = -230$

$(-4{,}3) - (-6{,}7) = -4{,}3 + 6{,}7 = 2{,}4$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Faktor · Faktor = Produkt
Dividend : Divisor = Quotient

Haben beide Zahlen **gleiche Vorzeichen**, so ist das Ergebnis positiv.

+ · + = +	+ : + = +
− · − = +	− : − = −

$(+13) \cdot (+2) = +(13 \cdot 2) = +26$

$(-56) : (-7) = +(56 : 7) = +8$

Haben beide Zahlen **verschiedene Vorzeichen**, so ist das Ergebnis negativ.

+ · − = −	+ : − = −
− · + = −	− : + = −

$(-3) \cdot (+9) = -(3 \cdot 9) = -27$

$(-2{,}4) : (+8) = -(2{,}4 : 8) = -0{,}3$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)

Durch das Vertauschen kann man oft Rechenvorteile ausnutzen.

Bei der **Addition** dürfen die Summanden vertauscht werden.

$a + (-b) = (-b) + a$

$a - b = -b + a$

$-38 + 40 = 40 - 38$

$17 + 15 - 7 = 17 - 7 + 15 = 10 + 15$

Bei der **Multiplikation** dürfen die Faktoren vertauscht werden.

$a \cdot b = b \cdot a$

$\frac{2}{3} \cdot 4 = 4 \cdot \frac{2}{3}$

$25 \cdot 6 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 6 = 100 \cdot 6$

→ Rechnen

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)

Wenn **mehr als zwei Summanden addiert** werden, ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Summanden addiert werden.

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$4 + (5 + 13) = (4 + 5) + 13$

$4 + 18 = 9 + 13$

$22 = 22$

Werden **mehr als zwei Faktoren multipliziert**, so spielt die Reihenfolge der Multiplikation keine Rolle.

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$4 \cdot (25 \cdot 14) = (4 \cdot 25) \cdot 14$

$4 \cdot 350 = 100 \cdot 14$

$1400 = 1400$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Klammern auflösen

Steht vor der Klammer ein **Pluszeichen**, darf man die Klammer weglassen.

$15 + (-36 + 27)$
$= 15 - 36 + 27$

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen**, werden beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen und Rechenzeichen aus der Klammer umgekehrt.

$15 - (-36 + 27)$
$= 15 + 36 - 27$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)

Beim **Ausmultiplizieren** wird der Faktor außerhalb der Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert.

$6 \cdot 37$
$= 6 \cdot (30 + 7)$
$= 6 \cdot 30 + 6 \cdot 7$
$= 180 + 42 = 222$

Beim **Ausklammern** schreibt man den gemeinsamen Faktor vor oder hinter die Klammer.

$-8{,}3 \cdot 57 + (-8{,}3) \cdot 43$
$= -8{,}3 \cdot (57 + 43)$
$= -8{,}3 \cdot 100 = -830$

→ Rechnen

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Reihenfolge beim Rechnen

1. Innere Klammer vor äußerer Klammer
2. Punktrechnung vor Strichrechnung
3. sonst immer von links nach rechts

$((16 - 11{,}5) : (-1{,}5)) - 3 \cdot (-12)$
$= ((4{,}5) : (-1{,}5)) - (-36)$
$= -3 + 36 = 33$

→ Rechnen

Terme

Terme sind Rechenausdrücke, in ihnen kommen Zahlen, Variablen und Rechenzeichen vor. Ersetzt man die Variablen durch Zahlen, lässt sich der Wert eines Terms berechnen.

Wert des Terms $2x + 3y - 9$ für $x = -2$ und $y = 4$:
$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 - 9$
$= -4 + 12 - 9$
$= -1$

Das Malzeichen zwischen Variablen und zwischen einer Zahl und einer Variablen kann weggelassen werden.

$2 \cdot x = 2x$
$1 \cdot a = 1a = a$
$(-1) \cdot a = -1a = -a$
$a \cdot b = ab$
$x \cdot y \cdot z = xyz$

→ Formeln

Vereinfachen von Termen durch Addition und Subtraktion

Gleichartige Terme lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen, verschiedenartige dagegen nicht.

$a - 2b + a + 5b - 3a$
$= a + a - 3a - 2b + 5b$
$= -1a + 3b$
$= -a + 3b$

→ Formeln

Multiplikation und Division von Termen mit Variablen

Reihenfolge beim Rechnen:

1. Vorzeichen bestimmen
2. Koeffizienten (Zahlen vor den Variablen) multiplizieren bzw. dividieren
3. Variablen multiplizieren bzw. dividieren und alphabetisch ordnen.

$4y \cdot 5x$
$= 4 \cdot 5 \cdot y \cdot x$
$= 20xy$

$8x \cdot (-10x) \cdot 5y$
$= -8 \cdot 10 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y$
$= -400x^2y$

$-6 \cdot (-7m) \cdot 2k \cdot n$
$= +6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot m \cdot k \cdot n$
$= 84kmn$

$24xy : (-3)$
$= -(24 : 3) \cdot x \cdot y$
$= -8 \cdot xy$
$= -8xy$

→ Formeln

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) mit Variablen

Beim **Ausmultiplizieren** wird jeder Faktor außerhalb der Klammer mit jedem Term in der Klammer multipliziert. Dabei wird aus einem Produkt eine Summe, wenn in der Klammer eine Summe steht. Steht in der Klammer eine Differenz, so wird aus dem Produkt eine Differenz.

$10a \cdot (20a + 3b)$
$= 10a \cdot 20a + 10a \cdot 3b$
$= 200a^2 + 30ab$

$(4x - 3xy) \cdot 7x$
$= 4x \cdot (7x) - 3xy \cdot (7x)$
$= 28x^2 - 21x^2y$

Wenn Summanden gemeinsame Faktoren haben, können diese **ausgeklammert** (man sagt „faktorisiert“) werden. Aus einer Summe wird dabei ein Produkt.

$40x + 60xy$
$= 20x \cdot 2 + 20x \cdot 3y$
$= 20x \cdot (2 + 3y)$

$7a + 14ab - 28a^2$
$= 7a \cdot 1 + 7a \cdot 2b - 7a \cdot 4a$
$= 7a \cdot (1 + 2b - 4a)$

→ Formeln

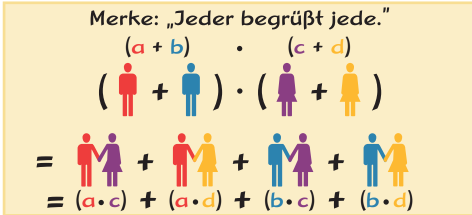
Multiplikation von Summen

Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Anschließend werden die neuen Summanden zusammengefasst, wenn es möglich ist.

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$(7 + x)(y + 4)$
$= 7 \cdot y + 7 \cdot 4 + x \cdot y + x \cdot 4$
$= 7y + 28 + xy + 4x$

$(a + 4b) \cdot (a - 6b + c)$
$= a \cdot a - a \cdot 6b + a \cdot c + 4b \cdot a - 4b \cdot 6b + 4b \cdot c$
$= a^2 - 6ab + ac + 4ab - 24b^2 + 4bc$
$= a^2 - 2ab + ac - 24b^2 + 4bc$



→ Formeln

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Gleichungen lösen

Zum Lösen einer Gleichung verwendet man Äquivalenzumformungen. Alle Rechenschritte werden auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt.

1. Gleichung **vereinfachen** (durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen).
2. **Sortieren** mithilfe von Addition oder Subtraktion (alle Terme mit der Variablen z. B. x kommen auf eine Seite, alle Zahlen ohne die Variable x auf die andere Seite).
3. Durch den Koeffizienten (Zahl vor der Variablen) von x **dividieren**, damit man ein x erhält.
4. **Lösung** angeben.

Die Probe kann man durchführen, indem man den gefundenen Wert für x in die erste Gleichung einsetzt und überprüft, ob beide Seiten gleich sind.

$3 \cdot (x + 13) = -4 \cdot (x - 4) + 2 \quad |\text{ausmultiplizieren}$
$3x + 39 = -4x + 16 + 2 \quad |\text{zusammenfassen}$
$3x + 39 = -4x + 18 \quad |+4x$
$7x + 39 = 18 \quad |-39$
$7x = -21 \quad |:7$
$x = -3$, also $L = \{-3\}$

Probe:

linker Term	rechter Term
$3 \cdot (-3 + 13)$	$-4 \cdot (-3 - 4) + 2$
$3 \cdot 10$	$-4 \cdot (-7) + 2$
30	28 + 2
	30

→ Formeln

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Bruchterme

Terme, die im Nenner eine Variable enthalten, nennt man **Bruchterme**. Setzt man für die Variablen Zahlen ein, kann der Wert eines Terms berechnet werden, außer dann, wenn der Nenner den Wert null annimmt.

Statt $x \neq 5$ schreibt man auch $D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$.

Man liest: Die Definitionsmenge D ist gleich $\mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen) ohne die 5.

$\frac{x + 1}{5 - x}$

Für x darf nicht der Wert 5 eingesetzt werden, weil der Nenner dadurch den Wert 0 annehmen würde.

$\frac{5 + 1}{5 - 5} \quad x \neq 5$

→ Formeln

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Bruchgleichungen

Schritte für das Lösen einer **Bruchgleichung**

1. Welchen Wert darf x nicht annehmen?
2. Einen gemeinsamen Nenner suchen und damit die Gleichung multiplizieren.
3. Kürzen, damit man eine Gleichung ohne Brüche erhält.
4. Die Gleichung vereinfachen und lösen.
5. Überprüfen, ob der gefundene Wert vorkommen darf und die Lösungsmenge L angeben.

$\frac{9}{2x} + \frac{6}{x} = \frac{7}{2}$ $\quad | \cdot 2x \quad x \neq 0$

$\frac{9 \cdot 2x}{2x} + \frac{6 \cdot 2x}{x} = \frac{7 \cdot 2x}{2}$ $\quad |$ kürzen

$9 + 12 = 7x$

$21 = 7x \quad | : 7$

$x = 3$

$L = \{3\}$

→ Formeln

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. binomische Formel

$(x + 4)^2$
$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$
$= x^2 + 8x + 16$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2. binomische Formel

$(2y - 3)^2$
$= (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2$
$= 4y^2 - 12y + 9$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ 3. binomische Formel

$(5a + 7b)(5a - 7b)$
$= (5a)^2 - (7b)^2$
$= 25a^2 - 49b^2$

→ Formeln

Prozente

Prozente sind Anteile mit dem Nenner 100.

1 Prozent bedeutet $\frac{1}{100}$, $\quad 1\% = \frac{1}{100}$.

p Prozent bedeutet $\frac{p}{100}$, $\quad p\% = \frac{p}{100}$.

$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$

$\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$

$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$

$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33\frac{1}{3}\%$

Am Sporttag entscheiden sich 11 von 25 Schülerinnen und Schülern einer Klasse für Basketball.
Wie viel Prozent sind das? $\frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 44\%$
44 % der Schülerinnen und Schüler spielen Basketball.

→ Prozente

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Beim Prozentrechnen ist der **Grundwert G** das Ganze und entspricht 100 %.
Der **Prozentwert W** ist der Anteil des Ganzen.
Der **Prozentsatz p %** gibt den Anteil in Prozent an.
Die Aufgaben der Prozentrechnung lassen sich mit dem Dreisatz oder der Grundformel der Prozentrechnung lösen:

$\mathbf{W = G \cdot p\%}$ oder $\mathbf{W = G \cdot \frac{p}{100}}$

Wie viel Euro sind 10 % von 75 €?
Der Prozentwert W ist gesucht, Grundwert G = 75 €, Prozentsatz p % = 10 %.

$W = \frac{75 \cdot 10}{100}\,€ = 7{,}50\,€$

Der Prozentwert W beträgt 7,50 €.

→ Prozente

Prozentuale Veränderungen

Prozentuale Veränderungen d.h. Vermehrung und Verminderung lassen sich mit dem Prozentfaktor q ausdrücken und berechnen:

Vermehrung	Verminderung	Prozentwert
$q = 1 + \frac{p}{100}$	$q = 1 - \frac{p}{100}$	$W = G \cdot q$

Der Preis eines Mountainbikes von 358 € wurde um 20 % reduziert. Wie hoch ist der neue Preis?

$q = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
$W = G \cdot q$
$W = 358\,€ \cdot 0{,}8 = 286{,}40\,€$

Der neue Preis des Mountainbikes beträgt 286,40 €.

→ Prozente