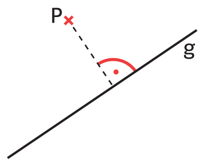
Abstand

Der Abstand eines Punkts P von einer Geraden g ist die kürzeste Entfernung zwischen dem Punkt und der geraden Linie. Dieser Abstand ist die Länge der senkrechten Strecke zwischen P und g.

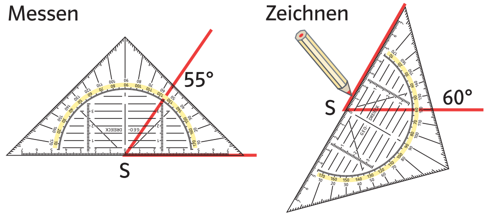


Abstand des Punkts P von der Geraden g.

→ Messen und Zeichnen

Winkelmessung

Ein Winkel wird von zwei Schenkeln mit gemeinsamem Anfangspunkt, dem Scheitel S begrenzt. Die Maßeinheit für die Größe eines Winkels heißt Grad (kurz: °). Sie entsteht durch Teilung eines Kreises in 360 gleiche Teile.



→ Messen und Zeichnen

Einteilung der Winkel

Winkel werden nach ihrer Größe eingeteilt.

spitze Winkel $\alpha < 90°$

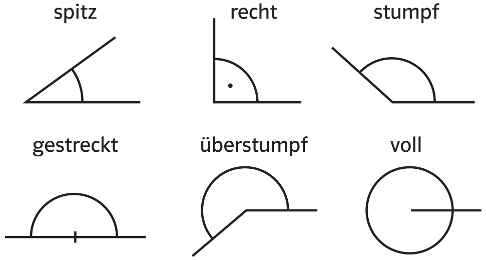
rechte Winkel $\alpha = 90°$

stumpfe Winkel $90° < \alpha < 180°$

gestreckte Winkel $\alpha = 180°$

überstumpfe Winkel $180° < \alpha < 360°$

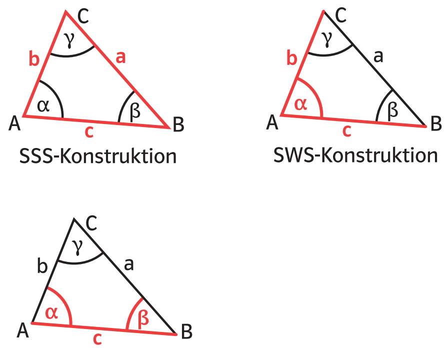
volle Winkel $\alpha = 360°$



→ Messen und Zeichnen

Dreieckskonstruktion

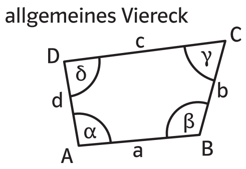
Zum Konstruieren eines Dreiecks mit Geodreieck und Zirkel benötigt man drei Stücke. Wir unterscheiden drei Grundkonstruktionen.



→ Messen und Zeichnen

Viereckskonstruktion

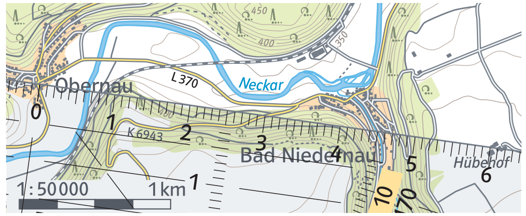
Zum eindeutigen Konstruieren eines allgemeinen Vierecks benötigt man fünf Stücke: einen Winkel, zwei Seiten und zwei weitere Stücke.



→ Dreisatz und Größen

Maßstab

Auf Karten werden Landschaften verkleinert dargestellt und auf Zeichnungen werden Gegenstände verkleinert abgebildet. Bleiben die Größenverhältnisse dabei gleich, verwendet man einen Maßstab. Dieser gibt an, wie lang eine gezeichnete Strecke in der Wirklichkeit ist. Die Schreibweise 1 : 25 000 bedeutet, dass eine 1 cm lang gezeichnete Strecke 25 000 cm = 250 m in der Wirklichkeit entspricht und dass eine 4 km lange Strecke bei einem Maßstab 1 : 50 000 auf der Karte 8 cm lang ist.



Auf einer Wanderkarte mit dem Maßstab 1 : 50 000 ist die Entfernung von einem zu einem anderen Punkt 6 cm lang. Wie lang ist die Entfernung in Wirklichkeit?

6 cm · 50 000 = 300 000 cm = 3000 m = 3 km

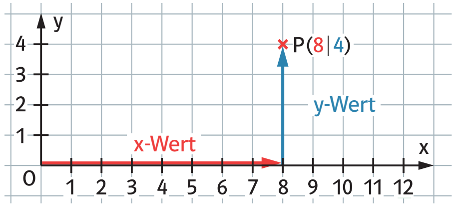
Die Entfernung beträgt in Wirklichkeit 3 km.

→ Messen und Zeichnen

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Koordinatensystem

Im Koordinatensystem kann man Punkte durch x-Wert und y-Wert angeben. Für den Punkt P mit dem x-Wert 8 und dem y-Wert 4 schreibt man P (8 | 4).



→ Messen und Zeichnen

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel** einer positiven Zahl b ist die positive Zahl a, die mit sich selbst multipliziert die Zahl b ergibt, d. h. $a^2 = b$.
Die Schreibweise ist $a = \sqrt{b}$.
Diese Regel gilt auch für die Zahl Null.

$\sqrt{64} = 8$; da $8 \cdot 8 = 64$

$\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$; da $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$

$\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; da $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$\sqrt{0} = 0$; da $0 \cdot 0 = 0$

→ Flächen

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2015 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Kubikwurzel

Die **Kubikwurzel** einer positiven Zahl b ist die positive Zahl a, deren dritte Potenz gleich der Zahl b ist, d.h.

$\sqrt[3]{b} = a$; wenn $a^3 = b$ $\quad a, b \geqq 0$.

$\sqrt[3]{343} = 7$; da $7^3 = 343$

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

→ Körper

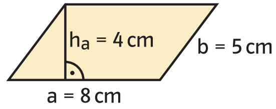
Parallelogramm und Raute

Der **Flächeninhalt A eines Parallelogramms** kann aus dem Produkt einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe berechnet werden.

$\mathbf{A = a \cdot h_a}$ $\qquad$ $\mathbf{A = b \cdot h_b}$

Für den **Umfang** gilt $\mathbf{u = 2 \cdot (a + b)}$.

Bei der **Raute** sind alle Seiten gleich lang.



$A = a \cdot h_a$ $\qquad$ $u = 2 \cdot (a + b)$

$A = 8 \cdot 4\,cm^2$ $\qquad$ $u = 2 \cdot (8 + 5)\,cm$

$A = 32\,cm^2$ $\qquad$ $u = 26\,cm$

→ Flächen

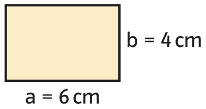
Rechteck und Quadrat

Der **Flächeninhalt A eines Rechtecks** kann aus dem Produkt seiner Seitenlängen a und b berechnet werden.

$\mathbf{A = a \cdot b}$

Für den **Umfang u** gilt $\mathbf{u = 2 \cdot (a + b)}$.

Beim **Quadrat** sind Länge und Breite gleich groß.



$A = a \cdot b$ $\qquad$ $u = 2 \cdot (a + b)$

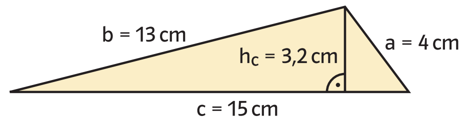
$A = 6 \cdot 4\,cm^2$ $\qquad$ $u = 2 \cdot (6 + 4)\,cm$

$A = 24\,cm^2$ $\qquad$ $u = 20\,cm$

→ Flächen

Dreieck

Der **Flächeninhalt A eines Dreiecks** kann aus dem halben Produkt einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe berechnet werden.



$\mathbf{A = \frac{1}{2} a \cdot h_a}$

$\mathbf{A = \frac{1}{2} b \cdot h_b}$

$\mathbf{A = \frac{1}{2} c \cdot h_c}$

$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ $\qquad$ $u = a + b + c$

$A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3{,}2\,cm^2$ $\qquad$ $u = 4 + 13 + 15\,cm$

$A = 24\,cm^2$ $\qquad$ $u = 32\,cm$

Für das **rechtwinklige Dreieck** ergibt sich:

$\mathbf{A = \frac{1}{2} a \cdot b}$ $\quad$ (da $\gamma = 90°$).

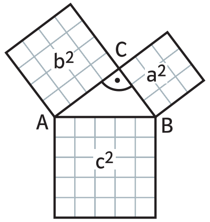
Für den **Umfang** von Dreiecken gilt

$\mathbf{u = a + b + c}$.

→ Flächen

Satz des Pythagoras

Ist ein Dreieck rechtwinklig, so haben die Quadrate über den beiden Katheten zusammen denselben Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. Nennt man die Katheten a und b und die Hypotenuse c, gilt
$c^2 = a^2 + b^2$.



⟶ Flächen

Kreiszahl π

Das Verhältnis von Kreisumfang u zu Kreisdurchmesser d wird **Kreiszahl π** genannt.
In Anwendungen genügt meist die Näherung 3,14.

$\frac{u}{d} = \pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944\,592\,307\ldots$

⟶ Flächen

Kreisumfang und Kreisfläche

Für den **Umfang u eines Kreises** mit dem Durchmesser d bzw. dem Radius r gilt
$\mathbf{u = \pi d}$ bzw. $\mathbf{u = 2\pi r}$.

Für den **Flächeninhalt A eines Kreises** mit dem Radius r gilt $A = \pi r^2$.

Wegen $r = \frac{d}{2}$ gilt auch $A = \frac{\pi d^2}{4}$.

d = 2,0 cm
r = 1,0 cm

$u = \pi d$
$u = \pi \cdot 2{,}0$
$u = 6{,}3\,\text{cm}$

$A = \pi r^2$
$A = \pi \cdot 1{,}0^2$
$A = 3{,}1\,\text{cm}^2$

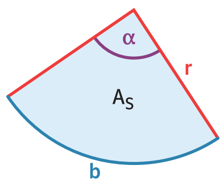
$A = \frac{\pi d^2}{4}$
$A = \frac{\pi \cdot 2{,}0^2}{4}$
$A = 3{,}1\,\text{cm}^2$

⟶ Flächen

Kreisbogen und Kreisausschnitt

Die **Länge des Kreisbogens b** eines Kreisausschnitts ist proportional zum zugehörigen **Mittelpunktswinkel α.**
Es gilt $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$.

Der **Flächeninhalt A_s des Kreisausschnitts** ist proportional zum Mittelpunktswinkel α.
Es gilt $A_s = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $A_s = \frac{b \cdot r}{2}$.



Gegeben: r = 4,5 cm; α = 60°

$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

$b = \pi \cdot 4{,}5 \cdot \frac{60°}{180°}$

$b = 4{,}7\,\text{cm}$

$A_s = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

$A_s = \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot \frac{60°}{360°}$

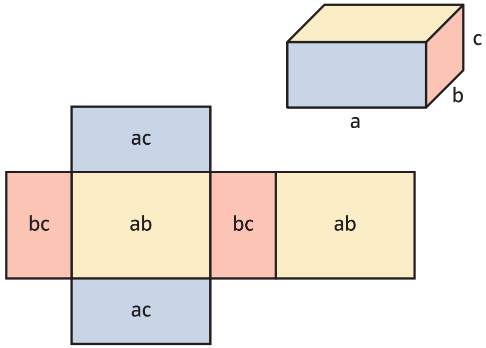
$A_s = 10{,}6\,\text{cm}^2$

⟶ Flächen

Quader und Würfel

Ein **Quader** mit den Kantenlängen a, b und c hat das **Volumen** $V = a \cdot b \cdot c$ und die **Oberfläche** $O = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$.

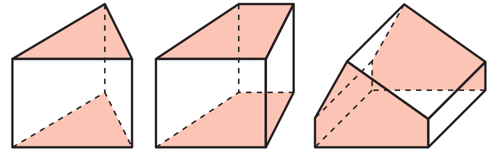
Ein **Würfel** ist ein Quader mit drei gleichen Kantenlängen $a = b = c$. Er hat das **Volumen** $V = a^3$ und die **Oberfläche** $O = 6a^2$.



→ Körper

Prisma

Ein **Prisma** wird begrenzt von der **Grundfläche**, der **Deckfläche** und dem **Mantel**. Grundfläche G und Deckfläche D sind deckungsgleiche (kongruente) Dreiecke, Vierecke oder Vielecke. Die Mantelfläche M besteht aus Rechtecken.



$D = G$

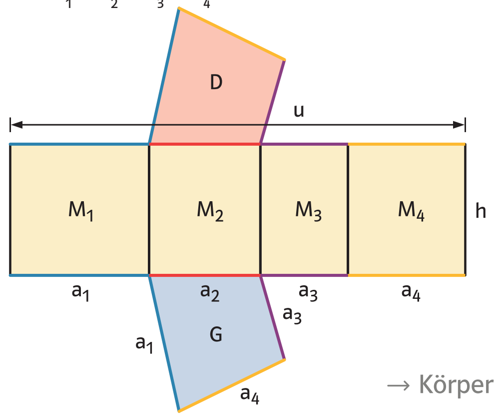
$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$

$u = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

Die **Oberfläche O** ist die Summe aus dem Doppelten der **Grundfläche G** und der **Mantelfläche M**
$\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$.

Die **Mantelfläche M** ist das Produkt aus dem **Umfang u** der Grundfläche und der **Körperhöhe h**
$\mathbf{M = u \cdot h}$.

Das **Volumen eines Prismas** lässt sich als Produkt aus Grundfläche und Körperhöhe berechnen
$\mathbf{V = G \cdot h}$.



→ Körper

Zylinder

Die **Mantelfläche M eines Zylinders** kann als Produkt des Grundkreisumfangs und der Zylinderhöhe berechnet werden.

$\mathbf{M = u \cdot h}$ $\qquad$ $\mathbf{M = 2\pi r \cdot h}$

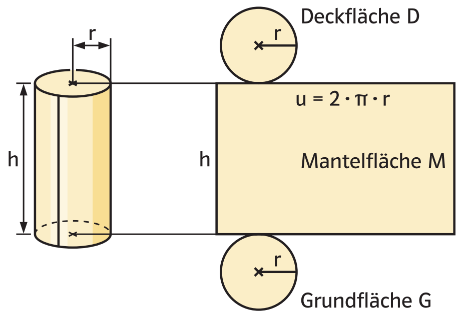
Zur Berechnung der **Oberfläche O eines Zylinders** verdoppelt man den Flächeninhalt der Grundfläche G und addiert die Mantelfläche M.

$\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$ $\qquad$ $\mathbf{O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h}$

$\mathbf{O = 2\pi r(r + h)}$

Das **Volumen V eines Zylinders** kann als Produkt der Grundfläche und der Höhe berechnet werden.

$\mathbf{V = G \cdot h}$ $\qquad$ $\mathbf{V = \pi r^2 \cdot h}$



$r = 2{,}0\,cm$
$h = 4{,}0\,cm$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$O = 2\pi \cdot 2{,}0^2\,cm^2 + 2\pi \cdot 2{,}0 \cdot 4{,}0\,cm^2$

$O = 25{,}1\,cm^2 + 50{,}3\,cm^2$

$O = 75{,}4\,cm^2$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 4{,}0\,cm^3$

$V = 50{,}3\,cm^3$

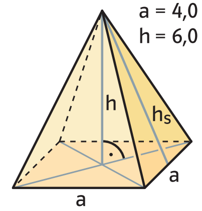
→ Körper

Pyramide

Die **Oberfläche O einer Pyramide** ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche G und Mantelfläche M
$\mathbf{O = G + M}$.

Für das **Volumen V einer Pyramide** mit der Grundfläche G und der Pyramidenhöhe h gilt
$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$.

$a = 4{,}0\,cm$
$h = 6{,}0\,cm$



$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_s = \sqrt{6{,}0^2 + 2{,}0^2}\,cm$

$h_s = 6{,}32\,cm$

$O = a^2 + 2a h_s$

$O = 4{,}0^2\,cm^2 + 2 \cdot 4{,}0 \cdot 6{,}32\,cm^2$

$O = 66{,}6\,cm^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}0^2 \cdot 6{,}0\,cm^3$

$V = 32{,}0\,cm^3$

→ Körper

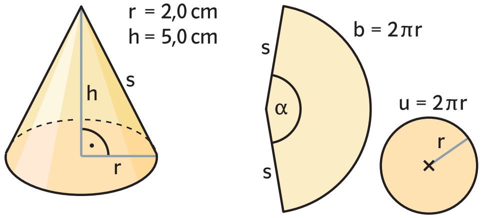
Kegel

Die **Oberfläche O eines Kegels** ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche und Mantelfläche

$\mathbf{O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s}$.

Für das **Volumen V eines Kegels** mit dem Grundkreisradius r und der Kegelhöhe h gilt

$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$.



$s^2 = h^2 + r^2$

$s = \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}0^2}\,\text{cm}$

$s = 5{,}39\,\text{cm}$

$O = \pi r^2 + \pi r s$

$O = \pi \cdot 2{,}0^2\,\text{cm}^2 + \pi \cdot 2{,}0 \cdot 5{,}39\,\text{cm}^2$

$O = 46{,}4\,\text{cm}^2$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 5{,}0\,\text{cm}^3$

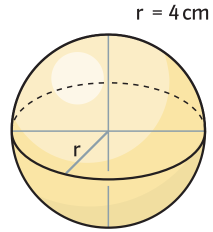
$V = 20{,}9\,\text{cm}^3$

→ Körper

Kugel

Für die **Oberfläche O einer Kugel** mit dem Radius r gilt $\mathbf{O = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$.

Für das **Volumen V einer Kugel** mit dem Radius r gilt $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$.



$O = 4\pi r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 4^2\,\text{cm}^2$

$O = 201{,}1\,\text{cm}^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3\,\text{cm}^3$

$V = 268{,}1\,\text{cm}^3$

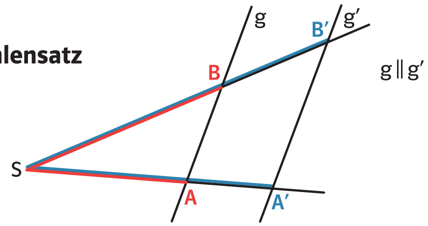
→ Körper

Strahlensätze

Schneiden zwei parallele Geraden die Schenkel eines Winkels, so gilt:

Erster Strahlensatz

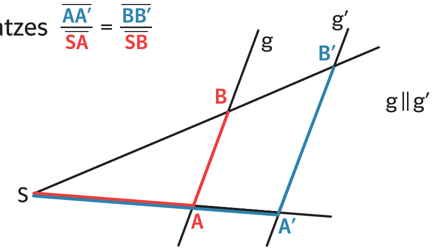
$\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$



Erweiterung des 1. Strahlensatzes $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}$

Zweiter Strahlensatz

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$



→ Trigonometrie

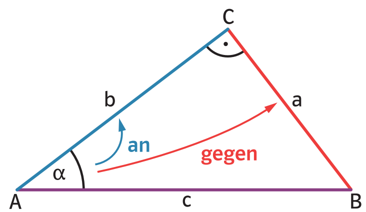
Sinus, Kosinus, Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$; also $\sin\alpha = \frac{a}{c}$,

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$; also $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$; also $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.



Im rechtwinkligen Dreieck lassen sich aus zwei Seiten oder aus einer Seite und einem spitzen Winkel die übrigen Seiten und Winkel berechnen.

→ Trigonometrie

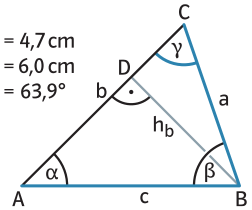
Allgemeine Dreiecke berechnen

Mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich allgemeine Dreiecke berechnen. Wichtig dabei ist die Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Teildreiecke.
Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung von

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ und

Kosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$a = 4{,}7\,\text{cm}$
$c = 6{,}0\,\text{cm}$
$\gamma = 63{,}9°$



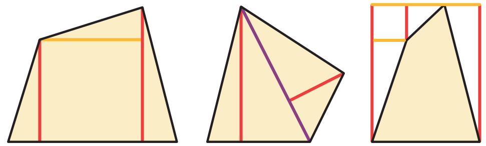
Schritt	Formel	Wert
1	$h_b = a \cdot \sin\gamma$	$h_b \approx 4{,}09\,\text{cm}$
2	$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$	$\alpha \approx 42{,}97°$
…	…	…

Ergebnis: $\alpha \approx 43{,}0°$; …

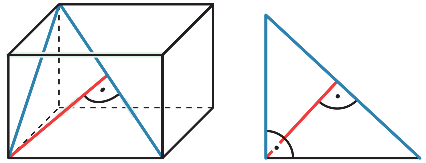
→ Trigonometrie

Trigonometrie in Ebene und Raum

Seitenlängen, Winkel und Flächeninhalte von Vierecken und Vielecken lassen sich durch **Zerlegen oder Ergänzen** berechnen. Geeignete Teilfiguren oder Ergänzungsfiguren sind rechtwinklige Dreiecke, Quadrate und Rechtecke.



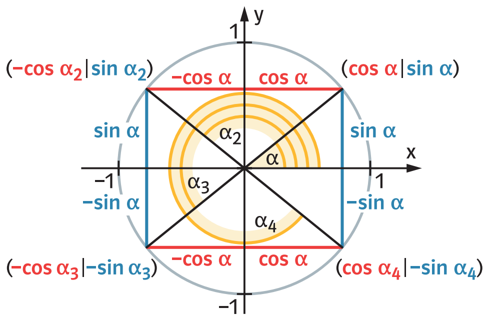
Körper berechnet man mithilfe von rechtwinkligen Stützdreiecken.



→ Trigonometrie

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Am Einheitskreis kann jeder Winkel α zwischen 0° und 360° dargestellt werden. Ein Punkt auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$.
Der Sinus ordnet jedem Winkel α den y-Wert des zugehörigen Punkts auf dem Einheitskreis zu.
Der Kosinus ordnet jedem Winkel α den x-Wert des zugehörigen Punkts auf dem Einheitskreis zu.



→ Trigonometrie