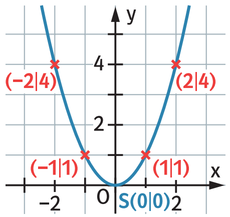
Normalparabel

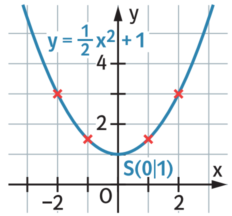
Der Graph der einfachsten quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ ist die **Normalparabel**. Sie ist achsensymmetrisch zur y-Achse und ihr **Scheitelpunkt** liegt im Koordinatenursprung.



→ Parabeln

Quadratische Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2 + c$

Der Graph mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + c$ ist eine nach oben oder unten geöffnete Parabel, die schmaler oder breiter als die Normalparabel sein kann. Sie ist zusätzlich um den Summanden c in Richtung der y-Achse verschoben. Ihr Scheitelpunkt ist $S(0|c)$.

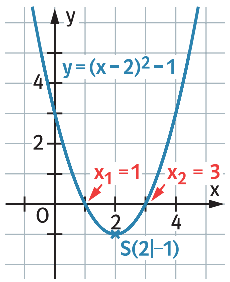


$0 < a < 1$: breiter
$a > 1$: schmaler als die Normalparabel

→ Parabeln

Quadratische Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform $y = (x - d)^2 + c$

Der Graph einer Parabel mit der Gleichung $y = (x - d)^2 + c$ ist eine um d in Richtung der x-Achse und um c in Richtung der y-Achse **verschobene Normalparabel**.
Ihr **Scheitelpunkt** ist **$S(d|c)$**.
Durch **quadratisches Ergänzen** kann die Parabelgleichung $y = x^2 + p \cdot x + q$ in die Scheitelform umgewandelt werden.

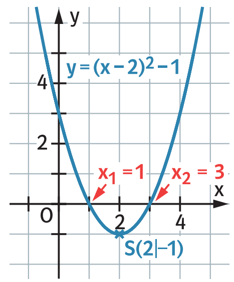


$y = x^2 - 4x + 3$
$y = x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3$
$y = (x - 2)^2 - 1$
$S(2|-1)$

→ Parabeln

Nullstellen einer quadratischen Funktion

An den Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse ist der Funktionswert y gleich null. Den x-Wert des Schnittpunkts mit der x-Achse nennt man **Nullstelle**.



Die Nullstellen der quadratischen Funktion sind:
$x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

→ Parabeln

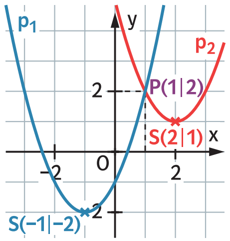
Schnittpunkte zweier quadratischer Funktionen

Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Parabeln zu berechnen, setzt man die Gleichungen gleich.

p_1: $y = x^2 + 2x - 1$
p_2: $y = x^2 - 4x + 5$
Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= x^2 - 4x + 5 && \mid -x^2 + 4x + 1 \\ 6x &= 6 && \mid :6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

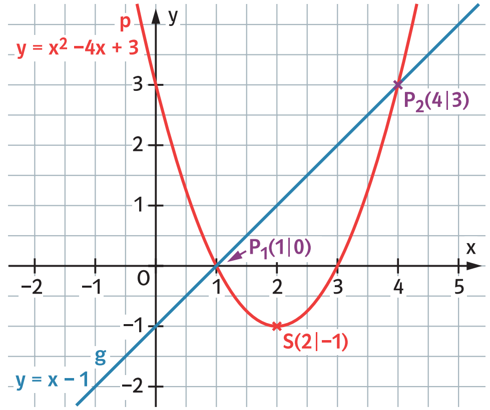
x einsetzen: $y = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1$
$y = 2$ $\quad P(1|2)$



→ Parabeln

Schnittpunkte einer linearen und einer quadratischen Funktion

Um die Koordinaten des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Parabel zu berechnen, setzt man die Gleichungen gleich.



g: $y = x - 1$
p: $y = x^2 - 4x + 3$
Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} x - 1 &= x^2 - 4x + 3 \quad \mid -x+1 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= 2{,}5 \pm \sqrt{(2{,}5)^2 - 4} \\ x_1 &= 2{,}5 - 1{,}5 = 1 \\ x_2 &= 2{,}5 + 1{,}5 = 4 \end{aligned}$$

x_1 und x_2 einsetzen:
$y_1 = 1 - 1 = 0$; $y_2 = 4 - 1 = 3$
Schnittpunkte: $P_1(1|0)$ und $P_2(4|3)$.

→ Geraden und Parabeln

Rein quadratische Gleichungen

Rein quadratische Gleichungen kann man lösen, indem man die Gleichung nach x^2 auflöst und dann auf beiden Seiten die Wurzel zieht. Ist der Radikand positiv, hat die Gleichung zwei Lösungen; ist er negativ, gibt es keine Lösung. Hat der Radikand den Wert null, gibt es genau eine Lösung.

$$\begin{aligned} 7x^2 - 13 &= 15 && \mid +13 \\ 7x^2 &= 28 && \mid :7 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{4} \\ x_1 &= 2;\ x_2 = -2 \end{aligned}$$

→ Parabeln

Quadratische Ergänzung

Gemischt quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ kann man lösen, indem man den Term $x^2 + px$ quadratisch ergänzt.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= 0 && \mid -5 \\ x^2 + 6x &= -5 && \mid +\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 \\ x^2 + 6x + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 &= -5 + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 && \mid \text{Binom} \\ (x+3)^2 &= -5 + 9 && \mid \sqrt{\ } \\ x + 3 &= \pm\sqrt{4} && \mid -3 \\ x_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{4} \\ x_1 &= -1;\ x_2 = -5 \end{aligned}$$

→ Parabeln

abc-Formel

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ lauten

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = 2x^2 + 6x + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = -2$$

→ Parabeln

p-q-Formel

Eine gemischt quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ hat die Koeffizienten p und q. Die Lösung der Gleichung kann mit der p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

bestimmt werden.

Die Gleichung $x^2 + 4x - 21 = 0$ hat die Koeffizienten $p = 4$ und $q = -21$. Einsetzen ergibt:

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-21)}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 5$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = -7$$

→ Parabeln

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. Man kann diesen Satz auch zur Überprüfung von Lösungen anwenden.

Die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Der Satz von Vieta ergibt $1 + 3 = 4 = -p$ und $1 \cdot 3 = 3 = q$.

→ Parabeln

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.