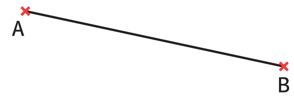
Strecke

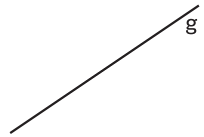
Eine **Strecke** ist die geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten. Sie wird mit ihrem Anfangspunkt und ihrem Endpunkt bezeichnet. Man schreibt: $\overline{AB}$.
Man liest: „Strecke AB".



→ Messen und Zeichnen

Gerade

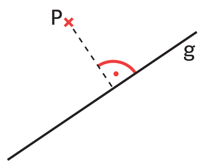
Eine **Gerade** hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt. Sie ist eine in beide Richtungen beliebig weit verlängerte Strecke. Geraden werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet.



→ Messen und Zeichnen

Abstand

Der Abstand eines Punkts P von einer Geraden g ist die kürzeste Entfernung zwischen dem Punkt und der geraden Linie. Dieser Abstand ist die Länge der senkrechten Strecke zwischen P und g.



Abstand des Punkts P von der Geraden g.

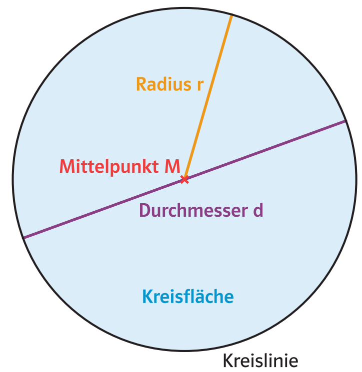
→ Messen und Zeichnen

Kreis

Jede Strecke vom **Mittelpunkt M** zu einem Punkt auf dem Kreis heißt **Radius r**.

Jede Strecke durch den Mittelpunkt, die zwei Punkte auf dem Kreis verbindet, heißt **Durchmesser d**.

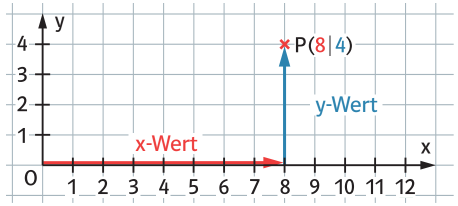
Der Durchmesser ist doppelt so lang wie der Radius. Die **Kreisfläche** wird von der **Kreislinie** eingeschlossen.



→ Messen und Zeichnen

Koordinatensystem

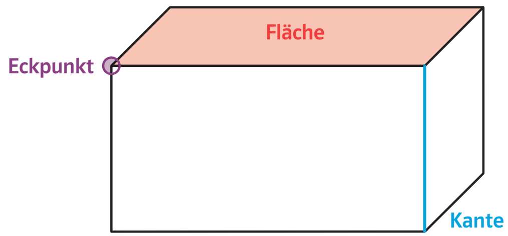
Im Koordinatensystem kann man Punkte durch x-Wert und y-Wert angeben. Für den Punkt P mit dem x-Wert 8 und dem y-Wert 4 schreibt man P(8 | 4).



→ Messen und Zeichnen

Länge und Fläche

Körper werden von **Flächen** begrenzt. Stoßen zwei Flächen zusammen, entstehen **Kanten**. Stoßen Kanten zusammen, entstehen **Eckpunkte**.
Der Abstand zwischen zwei Eckpunkten ist die **Länge einer Kante.**

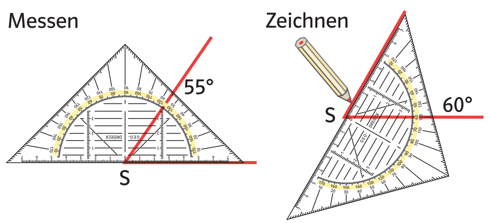


→ Messen und Zeichnen

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Winkelmessung

Ein Winkel wird von zwei Schenkeln mit gemeinsamem Anfangspunkt, dem Scheitel S begrenzt. Die Maßeinheit für die Größe eines Winkels heißt Grad (kurz: °). Sie entsteht durch Teilung eines Kreises in 360 gleiche Teile.

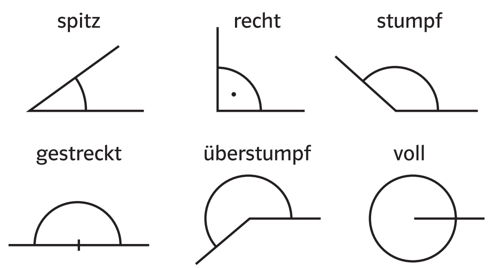


→ Messen und Zeichnen

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Einteilung der Winkel

Winkel werden nach ihrer Größe eingeteilt.
spitze Winkel $\alpha < 90°$
rechte Winkel $\alpha = 90°$
stumpfe Winkel $90° < \alpha < 180°$
gestreckte Winkel $\alpha = 180°$
überstumpfe Winkel $180° < \alpha < 360°$
volle Winkel $\alpha = 360°$



→ Messen und Zeichnen

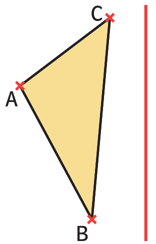
Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Achsenspiegelung

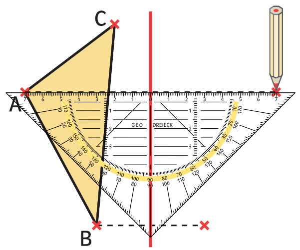
Bei der Achsenspiegelung wird jeder Punkt einer Figur auf der anderen Seite der Symmetrieachse abgebildet.

- Die Verbindung von einem Punkt A und seinem gespiegelten Bildpunkt A′ ist senkrecht zur Symmetrieachse.
- Ein Punkt A und sein gespiegelter Bildpunkt A′ haben denselben Abstand zur Symmetrieachse.

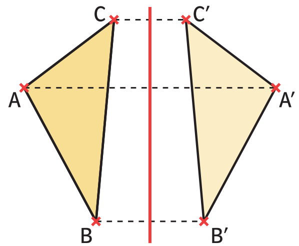
1. Zeichnen Sie die Symmetrieachse.



2. Tragen Sie die Bildpunkte mit dem Geodreieck ab.



3. Benennen Sie die Bildpunkte und verbinden Sie sie zur spiegelbildlichen Figur.

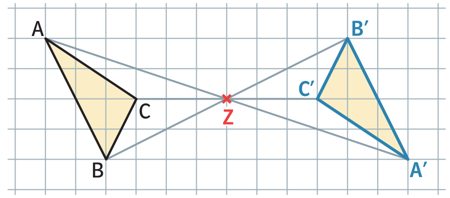


→ Messen und Zeichnen

Punktspiegelung

Bei der Punktspiegelung wird jeder Punkt einer Figur auf der anderen Seite des Spiegelzentrums abgebildet.

- Die Verbindung von einem Punkt A und seinem gespiegelten Bildpunkt A′ verläuft durch das Spiegelzentrum Z.
- Ein Punkt A und sein gespiegelter Bildpunkt A′ haben denselben Abstand zum Spiegelzentrum.



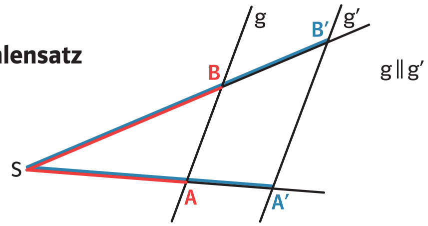
→ Messen und Zeichnen

Strahlensätze

Schneiden zwei parallele Geraden die Schenkel eines Winkels, so gilt:

Erster Strahlensatz

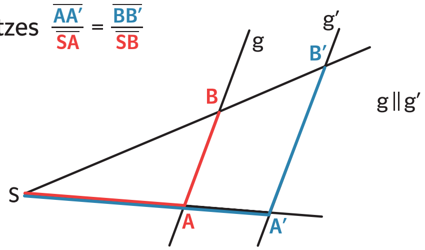
$$\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$



Erweiterung des 1. Strahlensatzes $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}$

Zweiter Strahlensatz

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \text{ und } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$$



→ Trigonometrie

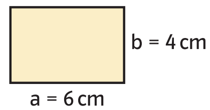
Rechteck und Quadrat

Der **Flächeninhalt A eines Rechtecks** kann aus dem Produkt seiner Seitenlängen a und b berechnet werden.

A = a · b

Für den **Umfang u** gilt **u = 2 · (a + b)**.

Beim **Quadrat** sind Länge und Breite gleich groß.



$A = a \cdot b$	$u = 2 \cdot (a + b)$
$A = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2$	$u = 2 \cdot (6 + 4)\,\text{cm}$
$A = 24\,\text{cm}^2$	$u = 20\,\text{cm}$

→ Flächen

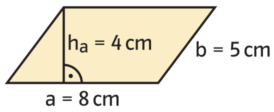
Parallelogramm und Raute

Der **Flächeninhalt A eines Parallelogramms** kann aus dem Produkt einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe berechnet werden.

$A = a \cdot h_a$ **$A = b \cdot h_b$**

Für den **Umfang** gilt **$u = 2 \cdot (a + b)$**.

Bei der **Raute** sind alle Seiten gleich lang.



$A = a \cdot h_a$	$u = 2 \cdot (a + b)$
$A = 8 \cdot 4\,cm^2$	$u = 2 \cdot (8 + 5)\,cm$
$A = 32\,cm^2$	$u = 26\,cm$

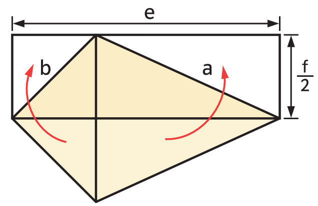
→ Flächen

Drachen und Trapez

Der **Flächeninhalt eines Drachens** kann aus dem halben Produkt der Längen der beiden Diagonalen berechnet werden:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

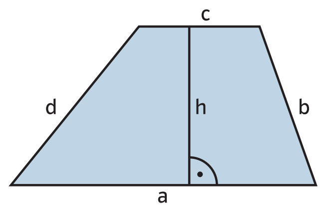
Für den **Umfang** gilt: **$u = 2 \cdot (a + b)$**



Der **Flächeninhalt des Trapezes** kann aus den Längen seiner beiden parallelen Seiten und der Höhe berechnet werden.

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ oder **$A = m \cdot h$**

Für den **Umfang** gilt: **$u = a + b + c + d$**



→ Flächen

Dreieck

Der **Flächeninhalt A eines Dreiecks** kann aus dem halben Produkt einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe berechnet werden.

$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

$A = \frac{1}{2} b \cdot h_b$

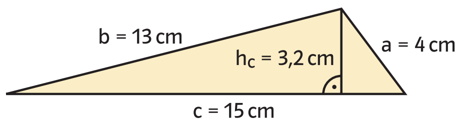
$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Für das **rechtwinklige Dreieck** ergibt sich:

$A = \frac{1}{2} a \cdot b$ (da $\gamma = 90°$).

Für den **Umfang** von Dreiecken gilt

$u = a + b + c$.

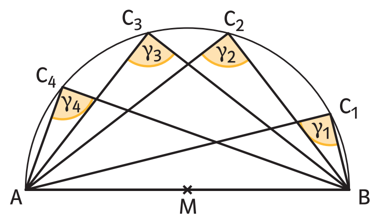


$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$	$u = a + b + c$
$A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3{,}2\,cm^2$	$u = 4 + 13 + 15\,cm$
$A = 24\,cm^2$	$u = 32\,cm$

→ Flächen

Satz des Thales

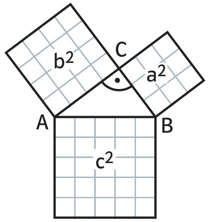
Liegt der Punkt C eines Dreiecks auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, so gilt $\gamma = 90°$.



→ Trigonometrie

Satz des Pythagoras

Ist ein Dreieck rechtwinklig, so haben die Quadrate über den beiden Katheten zusammen denselben Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. Nennt man die Katheten a und b und die Hypotenuse c, gilt
$c^2 = a^2 + b^2$.



→ Flächen

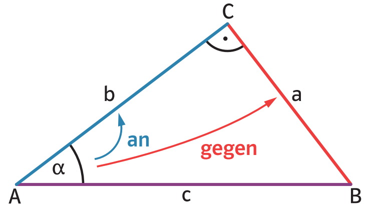
Sinus, Kosinus, Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$; also $\sin\alpha = \frac{a}{c}$,

$\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$; also $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$; also $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.



Im rechtwinkligen Dreieck lassen sich aus zwei Seiten oder aus einer Seite und einem spitzen Winkel die übrigen Seiten und Winkel berechnen.

→ Trigonometrie

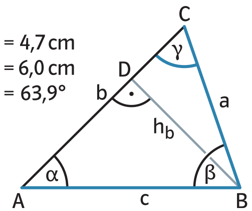
Allgemeine Dreiecke berechnen

Mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich allgemeine Dreiecke berechnen. Wichtig dabei ist die Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Teildreiecke.
Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung von

Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ und

Kosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$a = 4{,}7\,\text{cm}$
$c = 6{,}0\,\text{cm}$
$\gamma = 63{,}9°$



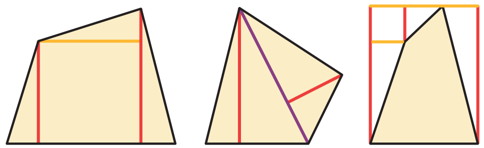
Schritt	Formel	Wert
1	$h_b = a \cdot \sin\gamma$	$h_b \approx 4{,}09\,\text{cm}$
2	$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$	$\alpha \approx 42{,}97°$
…	…	…

Ergebnis: $\alpha \approx 43{,}0°$; …

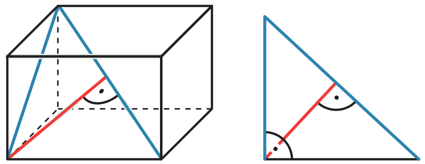
→ Trigonometrie

Trigonometrie in Ebene und Raum

Seitenlängen, Winkel und Flächeninhalte von Vierecken und Vielecken lassen sich durch **Zerlegen oder Ergänzen** berechnen. Geeignete Teilfiguren oder Ergänzungsfiguren sind rechtwinklige Dreiecke, Quadrate und Rechtecke.



Körper berechnet man mithilfe von rechtwinkligen Stützdreiecken.



→ Trigonometrie

Kreiszahl π

Das Verhältnis von Kreisumfang u zu Kreisdurchmesser d wird **Kreiszahl π** genannt.
In Anwendungen genügt meist die Näherung 3,14.

$\frac{u}{d} = \pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944\,592\,307\ldots$

→ Flächen

Kreisumfang und Kreisfläche

Für den **Umfang u eines Kreises** mit dem Durchmesser d bzw. dem Radius r gilt
$u = \pi d$ bzw. **$u = 2\pi r$**.

Für den **Flächeninhalt A eines Kreises** mit dem Radius r gilt $A = \pi r^2$.

Wegen $r = \frac{d}{2}$ gilt auch $A = \frac{\pi d^2}{4}$.

$d = 2{,}0\,cm$ $\quad u = \pi d$
$r = 1{,}0\,cm$ $\quad u = \pi \cdot 2{,}0$
$u = 6{,}3\,cm$

$A = \pi r^2$ $\qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$

$A = \pi \cdot 1{,}0^2$ $\qquad A = \frac{\pi \cdot 2{,}0^2}{4}$

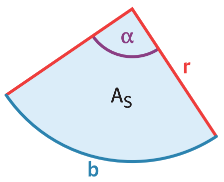
$A = 3{,}1\,cm^2$ $\qquad A = 3{,}1\,cm^2$

→ Flächen

Kreisbogen und Kreisausschnitt

Die **Länge des Kreisbogens b** eines Kreisausschnitts ist proportional zum zugehörigen **Mittelpunktswinkel α**.
Es gilt $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$.

Der **Flächeninhalt A_s des Kreisausschnitts** ist proportional zum Mittelpunktswinkel α.
Es gilt $A_s = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $A_s = \frac{b \cdot r}{2}$.



Gegeben: $r = 4{,}5\,cm$; $\alpha = 60°$

$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

$b = \pi \cdot 4{,}5 \cdot \frac{60°}{180°}$

$b = 4{,}7\,cm$

$A_s = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

$A_s = \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot \frac{60°}{360°}$

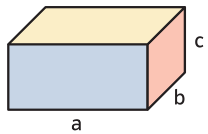
$A_s = 10{,}6\,cm^2$

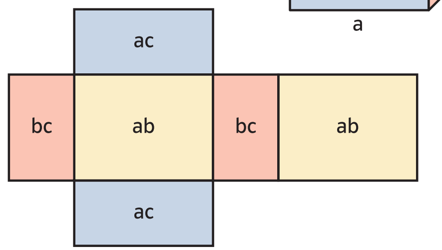
→ Flächen

Quader und Würfel

Ein **Quader** mit den Kantenlängen a, b und c hat das **Volumen** $V = a \cdot b \cdot c$
und die **Oberfläche** $O = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$.

Ein **Würfel** ist ein Quader mit drei gleichen Kantenlängen $a = b = c$. Er hat das **Volumen** $V = a^3$ und die **Oberfläche** $O = 6a^2$.

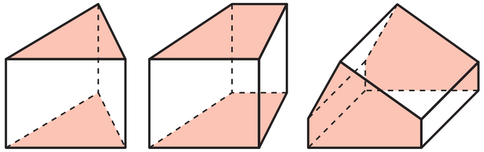




→ Körper

Prisma

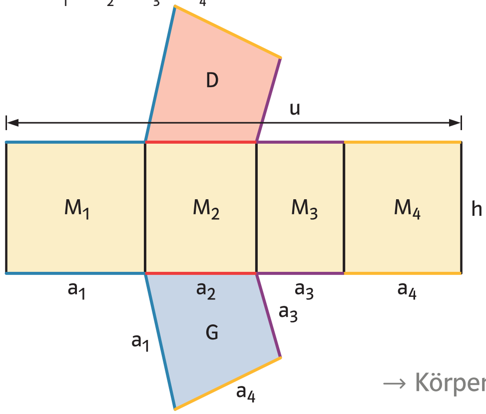
Ein **Prisma** wird begrenzt von der **Grundfläche**, der **Deckfläche** und dem **Mantel**.
Grundfläche G und Deckfläche D sind deckungsgleiche (kongruente) Dreiecke, Vierecke oder Vielecke. Die Mantelfläche M besteht aus Rechtecken.



$D = G$

$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$

$u = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



Die **Oberfläche O** ist die Summe aus dem Doppelten der **Grundfläche G** und der **Mantelfläche M**
O = 2 · G + M.

Die **Mantelfläche M** ist das Produkt aus dem **Umfang u** der Grundfläche und der **Körperhöhe h**
M = u · h.

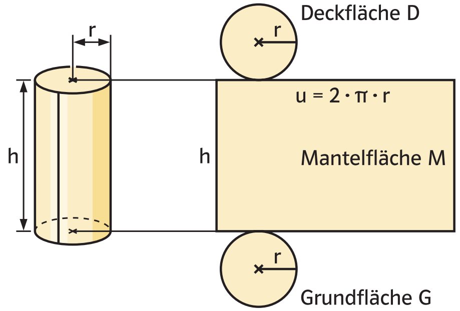
Das **Volumen eines Prismas** lässt sich als Produkt aus Grundfläche und Körperhöhe berechnen
V = G · h.

→ Körper

Zylinder

Die **Mantelfläche M eines Zylinders** kann als Produkt des Grundkreisumfangs und der Zylinderhöhe berechnet werden.

M = u · h **M = 2 π r · h**



Zur Berechnung der **Oberfläche O eines Zylinders** verdoppelt man den Flächeninhalt der Grundfläche G und addiert die Mantelfläche M.

O = 2 · G + M **O = 2 · π r² + 2 π r · h**

O = 2 π r (r + h)

Das **Volumen V eines Zylinders** kann als Produkt der Grundfläche und der Höhe berechnet werden.

V = G · h **V = π r² · h**

$r = 2{,}0\,\text{cm}$
$h = 4{,}0\,\text{cm}$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
$O = 2\pi \cdot 2{,}0^2\,\text{cm}^2 + 2\pi \cdot 2{,}0 \cdot 4{,}0\,\text{cm}^2$
$O = 25{,}1\,\text{cm}^2 + 50{,}3\,\text{cm}^2$
$O = 75{,}4\,\text{cm}^2$

$V = \pi r^2 h$
$V = \pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 4{,}0\,\text{cm}^3$
$V = 50{,}3\,\text{cm}^3$

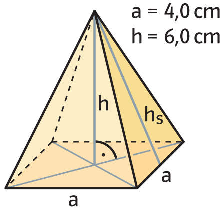
→ Körper

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Pyramide

Die **Oberfläche O einer Pyramide** ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche G und Mantelfläche M
O = G + M.

Für das **Volumen V einer Pyramide** mit der Grundfläche G und der Pyramidenhöhe h gilt
$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$.



$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$h_s = \sqrt{6{,}0^2 + 2{,}0^2}\,\text{cm}$
$h_s = 6{,}32\,\text{cm}$

$O = a^2 + 2 a h_s$
$O = 4{,}0^2\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 4{,}0 \cdot 6{,}32\,\text{cm}^2$
$O = 66{,}6\,\text{cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}0^2 \cdot 6{,}0\,\text{cm}^3$
$V = 32{,}0\,\text{cm}^3$

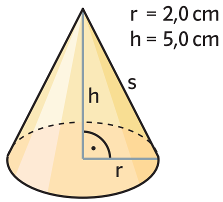
→ Körper

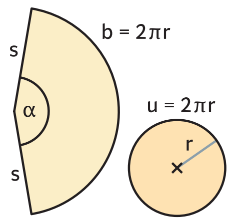
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Kegel

Die **Oberfläche O eines Kegels** ist die Summe der Flächeninhalte von Grundfläche und Mantelfläche
O = π · r² + π · r · s.

Für das **Volumen V eines Kegels** mit dem Grundkreisradius r und der Kegelhöhe h gilt
$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$.





$s^2 = h^2 + r^2$
$s = \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}0^2}\,\text{cm}$
$s = 5{,}39\,\text{cm}$

$O = \pi r^2 + \pi r s$
$O = \pi \cdot 2{,}0^2\,\text{cm}^2 + \pi \cdot 2{,}0 \cdot 5{,}39\,\text{cm}^2$
$O = 46{,}4\,\text{cm}^2$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 5{,}0\,\text{cm}^3$
$V = 20{,}9\,\text{cm}^3$

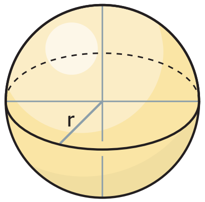
→ Körper

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Kugel

Für die **Oberfläche O einer Kugel** mit dem Radius r gilt $\mathbf{O = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$.

Für das **Volumen V einer Kugel** mit dem Radius r gilt $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$.



$O = 4\pi r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 4^2\,\text{cm}^2$

$O = 201{,}1\,\text{cm}^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3\,\text{cm}^3$

$V = 268{,}1\,\text{cm}^3$

→ Körper