

Rationale Zahlen

Die ganzen Zahlen zusammen mit allen positiven und negativen Bruchzahlen heißen **rationale Zahlen**.

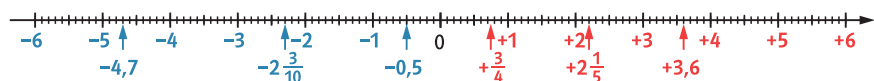
Die Menge der rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} bezeichnet.

Je weiter links eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto kleiner ist sie.

Je weiter rechts eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto größer ist sie.

negative rationale Zahlen

positive rationale Zahlen



$$-4,7 < -2\frac{3}{10} < -0,5 < +\frac{3}{4} < 2\frac{1}{5} < +3,6$$

→ Rechnen



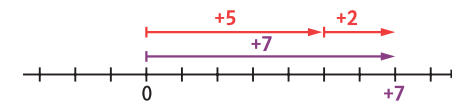
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Addition rationaler Zahlen gleicher Vorzeichen

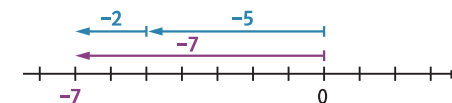
Summand + Summand = Summe

Bei gleichen Vorzeichen der Summanden werden die Beträge addiert.

Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.



$$(+5) + (+2) = 5 + 2 = 7$$



$$(-5) + (-2) = -(5 + 2) = -7$$

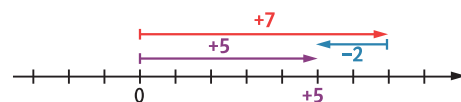
→ Rechnen



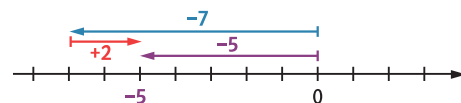
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Addition rationaler Zahlen verschiedener Vorzeichen

Bei verschiedenen Vorzeichen der Summanden werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.



$$(+7) + (-2) = 7 - 2 = 5$$



$$(-7) + (+2) = -(7 - 2) = -5$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Subtraktion rationaler Zahlen

Minuend - Subtrahend = Differenz

Rationale Zahlen werden subtrahiert, indem man die Gegenzahl des Subtrahenden addiert.

$$(+8) - (+15) = (+8) + (-15) = -(15 - 8) = -7$$

$$(+17) - (-4) = (+17) + (+4) = 17 + 4 = 21$$

$$(-5,6) - (-3,4) = (-5,6) + (+3,4) = -(5,6 - 3,4) = -2,2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{2} = -2$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Vereinfachte Schreibweise

Bei der Addition und der Subtraktion können positive Vorzeichen und Klammern weggelassen werden.

Ist das Vorzeichen negativ, wird das vorangegangene Rechenzeichen beim Auflösen der Klammer umgekehrt.

Ersetzen Sie

- + (+) durch +,
- + (-) durch -,
- (+) durch -,
- (-) durch +.

$$(+27) + (+14) = 27 + 14 = 41$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$(-80) - (+150) = -80 - 150 = -230$$

$$(-4,3) - (-6,7) = -4,3 + 6,7 = 2,4$$

→ Rechnen

Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Faktor · Faktor = Produkt

Dividend : Divisor = Quotient

Haben beide Zahlen **gleiche Vorzeichen**, so ist das Ergebnis positiv.

$$\begin{array}{l} + \cdot + = + \qquad + : + = + \\ - \cdot - = + \qquad - : - = + \end{array}$$

Haben beide Zahlen **verschiedene Vorzeichen**, so ist das Ergebnis negativ.

$$\begin{array}{l} + \cdot - = - \qquad + : - = - \\ - \cdot + = - \qquad - : + = - \end{array}$$

$$(+13) \cdot (+2) = +(13 \cdot 2) = +26$$

$$(-56) : (-7) = +(56 : 7) = +8$$

$$(-3) \cdot (+9) = -(3 \cdot 9) = -27$$

$$(-2,4) : (+8) = -(2,4 : 8) = -0,3$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)

Durch das Vertauschen kann man oft Rechen Vorteile ausnutzen.

Bei der **Addition** dürfen die Summanden vertauscht werden.

$$a + (-b) = (-b) + a$$

$$a - b = -b + a$$

Bei der **Multiplikation** dürfen die Faktoren vertauscht werden.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$-38 + 40 = 40 - 38$$

$$17 + 15 - 7 = 17 - 7 + 15 = 10 + 15$$

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = 4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$25 \cdot 6 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 6 = 100 \cdot 6$$

→ Rechnen

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)

Wenn **mehr als zwei Summanden addiert** werden, ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Summanden addiert werden.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Werden **mehr als zwei Faktoren multipliziert**, so spielt die Reihenfolge der Multiplikation keine Rolle.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$4 + (5 + 13) = (4 + 5) + 13$$

$$4 + 18 = 9 + 13$$

$$22 = 22$$

$$4 \cdot (25 \cdot 14) = (4 \cdot 25) \cdot 14$$

$$4 \cdot 350 = 100 \cdot 14$$

$$1400 = 1400$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Klammern auflösen

Steht vor der Klammer ein **Pluszeichen**, darf man die Klammer weglassen.

$$15 + (-36 + 27) \\ = 15 - 36 + 27$$

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen**, werden beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen und Rechenzeichen aus der Klammer umgekehrt.

$$15 - (-36 + 27) \\ = 15 + 36 - 27$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)

Beim **Ausmultiplizieren** wird der Faktor außerhalb der Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert.

$$6 \cdot 37 \\ = 6 \cdot (30 + 7) \\ = 6 \cdot 30 + 6 \cdot 7 \\ = 180 + 42 = 222$$

Beim **Ausklammern** schreibt man den gemeinsamen Faktor vor oder hinter die Klammer.

$$-8,3 \cdot 57 + (-8,3) \cdot 43 \\ = -8,3 \cdot (57 + 43) \\ = -8,3 \cdot 100 = -830$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Reihenfolge beim Rechnen

1. Innere Klammer vor äußerer Klammer
2. Punktrechnung vor Strichrechnung
3. sonst immer von links nach rechts

$$((16 - 11,5) : (-1,5)) - 3 \cdot (-12) \\ = ((4,5) : (-1,5)) - (-36) \\ = -3 + 36 = 33$$

→ Rechnen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Terme

Terme sind Rechenausdrücke, in ihnen kommen Zahlen, Variablen und Rechenzeichen vor. Ersetzt man die Variablen durch Zahlen, lässt sich der Wert eines Terms berechnen.

Das Malzeichen zwischen Variablen und zwischen einer Zahl und einer Variablen kann weggelassen werden.

Wert des Terms $2x + 3y - 9$ für $x = -2$ und $y = 4$:

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 - 9 \\ = -4 + 12 - 9 \\ = -1$$

$$2 \cdot x = 2x \\ 1 \cdot a = 1a = a \\ (-1) \cdot a = -1a = -a \\ a \cdot b = ab \\ x \cdot y \cdot z = xyz$$

→ Terme



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Vereinfachen von Termen durch Addition und Subtraktion

Gleichartige Terme lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen, verschiedenartige dagegen nicht.

$$\begin{aligned} & a - 2b + a + 5b - 3a \\ &= a + a - 3a - 2b + 5b \\ &= -1a + 3b \\ &= -a + 3b \end{aligned}$$

→ Terme

Multiplikation und Division von Termen mit Variablen

Reihenfolge beim Rechnen:

1. Vorzeichen bestimmen
2. Koeffizienten (Zahlen vor den Variablen) multiplizieren bzw. dividieren
3. Variablen multiplizieren bzw. dividieren und alphabetisch ordnen.

$$\begin{aligned} & 4y \cdot 5x \\ &= 4 \cdot 5 \cdot y \cdot x \\ &= 20xy \\ & 8x \cdot (-10x) \cdot 5y \\ &= -8 \cdot 10 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \\ &= -400x^2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -6 \cdot (-7m) \cdot 2k \cdot n \\ &= +6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot m \cdot k \cdot n \\ &= 84kmn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 24xy : (-3) \\ &= -(24 : 3) \cdot x \cdot y \\ &= -8 \cdot xy \\ &= -8xy \end{aligned}$$

→ Terme



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) mit Variablen

Beim **Ausmultiplizieren** wird jeder Faktor außerhalb der Klammer mit jedem Term in der Klammer multipliziert. Dabei wird aus einem Produkt eine Summe, wenn in der Klammer eine Summe steht. Steht in der Klammer eine Differenz, so wird aus dem Produkt eine Differenz.

$$\begin{aligned} & 10a \cdot (20a + 3b) \\ &= 10a \cdot 20a + 10a \cdot 3b \\ &= 200a^2 + 30ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (4x - 3xy) \cdot 7x \\ &= 4x \cdot (7x) - 3xy \cdot (7x) \\ &= 28x^2 - 21x^2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 40x + 60xy \\ &= 20x \cdot 2 + 20x \cdot 3y \\ &= 20x \cdot (2 + 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7a + 14ab - 28a^2 \\ &= 7a \cdot 1 + 7a \cdot 2b - 7a \cdot 4a \\ &= 7a \cdot (1 + 2b - 4a) \end{aligned}$$

→ Terme

Multiplikation von Summen

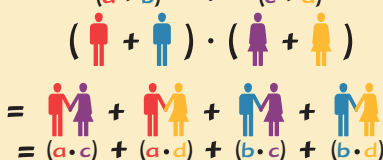
Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Anschließend werden die neuen Summanden zusammengefasst, wenn es möglich ist.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$\begin{aligned} & (7 + x)(y + 4) \\ &= 7 \cdot y + 7 \cdot 4 + x \cdot y + x \cdot 4 \\ &= 7y + 28 + xy + 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a + 4b) \cdot (a - 6b + c) \\ &= a \cdot a - a \cdot 6b + a \cdot c + 4b \cdot a - 4b \cdot 6b + 4b \cdot c \\ &= a^2 - 6ab + ac + 4ab - 24b^2 + 4bc \\ &= a^2 - 2ab + ac - 24b^2 + 4bc \end{aligned}$$

Merke: „Jeder begrüßt jede.“

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

$$= (a \cdot c) + (a \cdot d) + (b \cdot c) + (b \cdot d)$$

→ Terme



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Gleichungen lösen

Zum Lösen einer Gleichung verwendet man Äquivalenzumformungen. Alle Rechenschritte werden auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt.

1. Gleichung **vereinfachen** (durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen).
2. **Sortieren** mithilfe von Addition oder Subtraktion (alle Terme mit der Variablen z.B. x kommen auf eine Seite, alle Zahlen ohne die Variable x auf die andere Seite).
3. Durch den Koeffizienten (Zahl vor der Variablen) von x **dividieren**, damit man ein x erhält.

4. Lösung angeben.

Die Probe kann man durchführen, indem man den gefundenen Wert für x in die erste Gleichung einsetzt und überprüft, ob beide Seiten gleich sind.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x + 13) &= -4 \cdot (x - 4) + 2 && | \text{ausmultiplizieren} \\ 3x + 39 &= -4x + 16 + 2 && | \text{zusammenfassen} \\ 3x + 39 &= -4x + 18 && | +4x \\ 7x + 39 &= 18 && | -39 \\ 7x &= -21 && | :7 \\ x &= -3, \text{ also } L = \{-3\} \end{aligned}$$

Probe:

linker Term	rechter Term
$3 \cdot (-3 + 13)$	$-4 \cdot (-3 - 4) + 2$
$3 \cdot 10$	$-4 \cdot (-7) + 2$
30	28 + 2
	30 → Gleichungen

Bruchterme

Terme, die im Nenner eine Variable enthalten, nennt man **Bruchterme**. Setzt man für die Variablen Zahlen ein, kann der Wert eines Terms berechnet werden, außer dann, wenn der Nenner den Wert null annimmt.

Statt $x \neq 5$ schreibt man auch $D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$.

Man liest: Die Definitionsmenge D ist gleich \mathbb{Q} (Menge der rationalen Zahlen) ohne die 5.

$$\frac{x+1}{5-x}$$

Für x darf nicht der Wert 5 eingesetzt werden, weil der Nenner dadurch den Wert 0 annehmen würde.

$$\frac{5+1}{5-5} \quad x \neq 5$$

→ Terme



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Bruchgleichungen

Schritte für das Lösen einer **Bruchgleichung**

1. Welchen Wert darf x nicht annehmen?
2. Einen gemeinsamen Nenner suchen und damit die Gleichung multiplizieren.
3. Kürzen, damit man eine Gleichung ohne Brüche erhält.
4. Die Gleichung vereinfachen und lösen.
5. Überprüfen, ob der gefundene Wert vorkommen darf und die Lösungsmenge L angeben.

$$\frac{9}{2x} + \frac{6}{x} = \frac{7}{2} \quad | \cdot 2x \quad x \neq 0$$

$$\frac{9 \cdot 2x}{2x} + \frac{6 \cdot 2x}{x} = \frac{7 \cdot 2x}{2} \quad | \text{kürzen}$$

$$9 + 12 = 7x$$

$$21 = 7x \quad | :7$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

→ Gleichungen

Potenz

Die **Potenz a^n** ist ein Produkt aus n gleichen

Faktoren a .

Dabei ist a eine rationale Zahl und n eine positive natürliche Zahl.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

→ Potenzen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Potenzgesetze für Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert** bzw. **dividiert**, indem man die Basis beibehält und ihre **Exponenten** addiert bzw. subtrahiert.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} \\ = 2^9 = 512$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; a \neq 0$$

$$10^7 : 10^3 = 10^{7-3} \\ = 10^4 \\ = 10\,000$$

→ Potenzen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Potenzgesetze für Potenzen mit gleichen Exponenten

Potenzen mit gleichen Exponenten werden **multipliziert** bzw. **dividiert**, indem man ihre **Basen** multipliziert bzw. dividiert und den gemeinsamen **Exponenten** beibehält.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3 \\ = 20^3 \\ = 8000$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m; b \neq 0$$

$$8^5 : 4^5 = (8 : 4)^5 \\ = 2^5 \\ = 32$$

→ Potenzen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Potenzgesetze für Potenzen mit negativen Exponenten

Potenzen mit einer negativen ganzen Zahl im Exponenten sind erklärt durch

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0.$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$0,4^{-5} = \frac{1}{0,4^5} = \frac{1}{0,01024}$$

Potenzen mit Exponent 0 sind erklärt durch

$$a^0 = 1; a \neq 0.$$

→ Potenzen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise

Natürliche Zahlen und positive Dezimalzahlen kann man in Produkte der Form $a \cdot 10^n$ oder $a \cdot 10^{-n}$ umwandeln. Hierbei ist a eine Dezimalzahl mit genau einer Ziffer vor dem Komma, die nicht die Null ist.

$$9182,73 = 9,18273 \cdot 10^3 \\ 0,000\,034 = 3,4 \cdot 10^{-5} \\ 9182,73 \cdot 10^{-4} = 9,18273 \cdot 10^{-1} \\ 0,000\,034 \cdot 10^7 = 3,4 \cdot 10^2$$

→ Potenzen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel** einer positiven Zahl b ist die positive Zahl a , die mit sich selbst multipliziert die Zahl b ergibt, d.h. $a^2 = b$.

Die Schreibweise ist $a = \sqrt{b}$.

Diese Regel gilt auch für die Zahl Null.

$$\sqrt{64} = 8; \text{ da } 8 \cdot 8 = 64$$

$$\sqrt{1,21} = 1,1; \text{ da } 1,1 \cdot 1,1 = 1,21$$

$$\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}; \text{ da } \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

$$\sqrt{0} = 0; \text{ da } 0 \cdot 0 = 0$$

→ Wurzeln

Multiplikation und Division von Quadratwurzeln

Quadratwurzeln kann man **multiplizieren** bzw. **dividieren**, indem man die **Radikanden** miteinander multipliziert bzw. dividiert und dann die Wurzel zieht.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad a, b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 28} = \sqrt{196} = 14$$

$$\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4$$

→ Wurzeln



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

Summen bzw. **Differenzen**, in denen Quadratwurzeln mit **gleichen Radikanden** vorkommen, können durch **Ausklammern** zusammengefasst werden.

Sind die Radikanden nicht gleich, dann können sie nicht unter einer Wurzel addiert oder subtrahiert werden.

$$5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (5 + 2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{36} + \sqrt{64} &\neq \sqrt{36 + 64} \\ 6 + 8 &\neq \sqrt{100} \\ 14 &\neq 10 \end{aligned}$$

→ Wurzeln

Kubikwurzel und n-te Wurzel

Die **Kubikwurzel** einer positiven Zahl b ist die positive Zahl a , deren dritte Potenz gleich der Zahl b ist, d.h.

$$\sqrt[3]{b} = a; \text{ wenn } a^3 = b \quad a, b \geq 0.$$

Die **n-te Wurzel** aus einer Zahl a schreibt man $\sqrt[n]{a}$. Darunter versteht man die Zahl b , die mit n potenziert a ergibt: $\sqrt[n]{a} = b$.

n muss eine natürliche Zahl größer als Null sein. a und b sind positive Zahlen.

Man erweitert die Potenzgesetze und vereinbart

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$\sqrt[3]{343} = 7; \text{ da } 7^3 = 343$$

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1$$

$$\sqrt[4]{625} = 5, \text{ denn } 5^4 = 625$$

$$\sqrt[5]{243} = 3, \text{ denn } 3^5 = 243$$

$$625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}, \text{ denn } \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{64}{729} \end{aligned}$$

→ Wurzeln



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1. binomische Formel	$(x + 4)^2$ $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$ $= x^2 + 8x + 16$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	2. binomische Formel	$(2y - 3)^2$ $= (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2$ $= 4y^2 - 12y + 9$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	3. binomische Formel	$(5a + 7b)(5a - 7b)$ $= (5a)^2 - (7b)^2$ $= 25a^2 - 49b^2$

→ Terme

Dreisatz

Der Dreisatz ist ein Rechenverfahren, das man bei **proportionalen Zuordnungen** anwenden kann.

3 Tafeln Schokolade wiegen 225 g. Wie viel Gramm wiegen 5 Tafeln?

1. Satz: 3 Tafeln wiegen 225 g.
2. Satz: 1 Tafel wiegt $225 \text{ g} : 3 = 75 \text{ g}$.
3. Satz: 5 Tafeln wiegen $75 \text{ g} \cdot 5 = 375 \text{ g}$.

→ Dreisatz



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Umgekehrter Dreisatz

Der umgekehrte Dreisatz ist ein Rechenverfahren, das man bei **umgekehrt proportionalen Zuordnungen** anwenden kann.

5 Personen räumen einen Abstellraum in 3 Stunden aus. Wie lange benötigen 2 Personen?

1. Satz: 5 Personen benötigen 3 h.
2. Satz: 1 Person benötigt $3 \text{ h} \cdot 5 = 15 \text{ h}$.
3. Satz: 2 Personen benötigen $15 \text{ h} : 2 = 7,5 \text{ h}$.

→ Dreisatz

Prozente

Prozente sind Anteile mit dem Nenner 100.

1 Prozent bedeutet $\frac{1}{100}$ $1\% = \frac{1}{100}$
p Prozent bedeutet $\frac{p}{100}$ $p\% = \frac{p}{100}$

$$\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$$

$$\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = 33\frac{1}{3}\%$$

Am Sporttag entscheiden sich 11 von 25 Schülerinnen und Schülern einer Klasse für Basketball.

Wie viel Prozent sind das?

$$\frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 44\%$$

44 % der Schülerinnen und Schüler spielen Basketball.

→ Prozente



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Beim Prozentrechnen ist der **Grundwert G** das Ganze und entspricht 100%.

Der **Prozentwert W** ist der Anteil des Ganzen.

Der **Prozentsatz p %** gibt den Anteil in Prozent an.

Die Aufgaben der Prozentrechnung lassen sich mit dem Dreisatz oder der Grundformel der Prozentrechnung lösen:

$$W = G \cdot p \% \quad \text{oder} \quad W = G \cdot \frac{p}{100}$$

Wie viel Euro sind 10% von 75 €?

Der Prozentwert W ist gesucht, Grundwert G = 75 €, Prozentsatz p % = 10%.

$$W = \frac{75 \cdot 10}{100} \text{ €} = 7,50 \text{ €}$$

Der Prozentwert W beträgt 7,50 €.

→ Prozente

Prozentuale Veränderungen

Prozentuale Veränderungen d.h. Vermehrung und Verminderung lassen sich mit dem Prozentfaktor q ausdrücken und berechnen:

Vermehrung	Verminderung	Prozentwert
$q = 1 + \frac{p}{100}$	$q = 1 - \frac{p}{100}$	$W = G \cdot q$

Der Preis eines Mountainbikes von 358 € wurde um 20% reduziert. Wie hoch ist der neue Preis?

$$q = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$W = G \cdot q$$

$$W = 358 \text{ €} \cdot 0,8 = 286,40 \text{ €}$$

Der neue Preis des Mountainbikes beträgt 286,40 €.

→ Prozente



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Zinsen

Spart man Geld, indem man es bei der Bank anlegt, bekommt man dafür Zinsen Z. Leihst man von der Bank Kapital K, muss man Zinsen bezahlen. Der Zinssatz p% bezieht sich auf einen Zeitraum von einem Jahr. Man nennt diese Zinsen deshalb auch **Jahreszinsen**.

$$Z = K \cdot p \% = K \cdot \frac{p}{100}$$

Berechnen der Zinsen

Sarina hat bei der Bank ein Jugendkonto. Zu Beginn des Jahres hat sie ein Guthaben von 800 €. Der Zinssatz für das Konto beträgt 1,5%. Am Ende des Jahres werden die Zinsen berechnet: Gegeben:

Kapital K = 800 € und Zinssatz p % = 1,5%

Die Formel für den Prozentwert kann für die Berechnung der Zinsen verwendet werden.

$$Z = K \cdot \frac{p}{100}$$

$$Z = 800 \text{ €} \cdot \frac{1,5}{100}$$

$$Z = 800 \text{ €} \cdot 0,015$$

$$Z = 12 \text{ €}$$

Sarina erhält für ein Kapital von 800 € nach einem Jahr 12 € Zinsen.

→ Zinsen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Monatszinsen und Tageszinsen

Beim Zinsrechnen muss man auch die Zeitdauer berücksichtigen. Die Jahreszinsen werden mit dem Zeitfaktor i multipliziert. t ist die Anzahl der Tage.

Zinsen = Jahreszinsen · Zeitfaktor

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot i$$

Deutsche Zinsmethode

$i = \frac{t}{360}$ Volle Monate werden mit 30 Tagen gerechnet.

Hat man nur volle Monate m zu berechnen gilt $i = \frac{m}{12}$.

Taggenaue Zinsmethode

$$i = \frac{t}{365} \quad \text{oder} \quad i = \frac{t}{366}$$

Der Zeitraum in Tagen ist kalendermäßig berechnet.

Berechnung der Zinsen

Dora hat 135 Tage lang 1300 € auf ihrem Sparkonto bei einem Zinssatz von 1,5% angelegt.

Deutsche Zinsmethode:

$$Z = 1300 \text{ €} \cdot \frac{1,5}{100} \cdot \frac{135}{360} = 7,31 \text{ €}$$

Dora erhält nach der Deutschen Zinsmethode 7,31 € Zinsen.

Taggenaue Zinsmethode, kein Schaltjahr:

$$Z = 1300 \text{ €} \cdot \frac{1,5}{100} \cdot \frac{135}{365} = 7,21 \text{ €}$$

Dora erhält nach der taggenauen Zinsmethode 7,21 € Zinsen.

→ Zinsen



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.



© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016 | Alle Rechte vorbehalten | Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.

Zinseszins

Wird ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinssatz von $p\%$ über n Jahre verzinst, wird das Endkapital K_n mit der Zinseszinsformel berechnet

$$K_n = K_0 \cdot q^n \text{ mit } q = 1 + \frac{p}{100}$$

Berechnung des Endkapitals K_n :

Für ein Anfangskapital von 8000 € und einen Zinssatz von 3,5% lässt sich das Kapital nach 5 Jahren berechnen.

$$K_0 = 8000 \text{ €}; \quad q = 1 + \frac{3,5}{100} = 1,035; \quad n = 5$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_5 = 8000 \text{ €} \cdot 1,035^5$$

$$K_5 = 9501,49 \text{ €}$$

Das Endkapital beträgt 9501,49 €.

→ Zinsen