**Wie man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ bestimmt**

Man erhält durch Abzählen in den zugehörigen Bäumen:

$\binom{1}{0} = 1$; $\binom{1}{1} = 1$

$\binom{2}{0} = 1$; $\binom{2}{1} = 2$; $\binom{2}{2} = 1$

$\binom{3}{0} = 1$; $\binom{3}{1} = 3$; $\binom{3}{2} = 3$; $\binom{3}{3} = 1$

Fig. 1 zeigt, wie man die Anzahl $\binom{4}{2}$ rekursiv aus den bekannten Anzahlen $\binom{3}{1}$ und $\binom{3}{2}$ bestimmen kann. Bis $n = 3$ ist der Baum vollständig gezeichnet, für $n = 4$ sind nur die $\binom{4}{2}$ Pfade mit zwei Einsen eingetragen.

Diese Pfade erhält man
- aus den $\binom{3}{1}$ Pfaden mit einer Eins durch eine weitere Eins (rot eingezeichnet),
- aus den $\binom{3}{2}$ Pfaden mit zwei Einsen durch eine weitere Null (blau eingezeichnet).

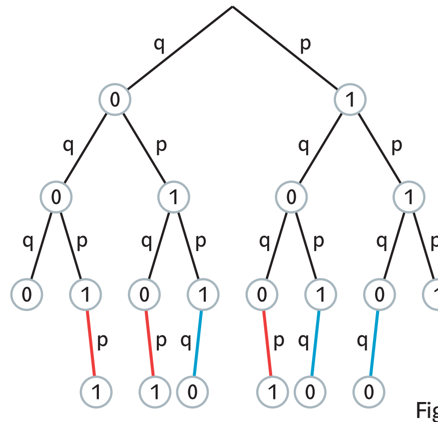



Fig. 1

Daher gilt $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$. Allgemein: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

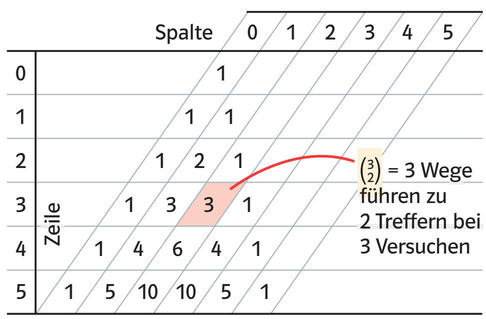
Zur Erinnerung:
$\binom{n}{r}$ ist bei einem Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge n die Anzahl der Pfade mit r Treffern.

**recurrere** (lat.): zurücklaufen

Wenn man nach vier Durchführungen zwei Einsen haben will, muss man nach drei Durchführungen bereits entweder eine Eins oder zwei Einsen haben.

Man kann sich die Formel gut merken, wenn man die Binomialkoeffizienten in Form des „Pascal-Dreiecks“ anordnet. Eine Zahl $\binom{n}{r}$ ist durch ihre Zeile n und die (schräg liegende) Spalte r eindeutig bestimmt, wobei die Zählung mit 0 beginnt.

Im Innern des Dreiecks ist eine Zahl die Summe der beiden links und rechts darüber stehenden.




$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ denn zu 0 und zu n Treffern gibt es jeweils nur einen Pfad.

**11** a) Bestimmen Sie mit dem Pascal-Dreieck: $\binom{4}{1}$; $\binom{5}{3}$; $\binom{5}{5}$; $\binom{6}{0}$; $\binom{7}{3}$.

b) Binomialkoeffizienten kann man mit der Formel $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ berechnen.
Überprüfen Sie die Formel an drei selbst gewählten Beispielen.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ gilt.
Wie kann man auch ohne Rechnung begründen, dass $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ sein muss?

**12 Woher der Name Binomialkoeffizient kommt**

a) Berechnen Sie $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$. Vergleichen Sie mit dem Pascal-Dreieck.
Was fällt auf?

b) Aus a) ergibt sich die Vermutung, dass die Binomialkoeffizienten gerade die Zahlen sind, die in den allgemeinen binomischen Formeln vorkommen. So ist z.B.
$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 b^3 + 5 \cdot a b^4 + 1 \cdot b^5$.
Kontrollieren Sie das, indem Sie berechnen: $(a+b)^4 \cdot (a+b)$.
Geben Sie eine Formel an für $(a+b)^6$.

c) Berechnen Sie: $(x+3)^4$; $(a-b)^3$; $(x-1)^5$; $(2-x)^4$.