Lösungen – Kompetenzcheck

Lineare Funktionen

1

a. Weil es Geraden sind.

b. $f(x) = 3x - 2$ $g(x) = -2x + 3$

Man kann zwei beliebige Punkte des Graphen nehmen und mithilfe eines linearen Gleichungssystems die Funktionsgleichungen bestimmen oder y-Achsenabschnitt und Steigung des Graphen ablesen und daraus die Funktionsgleichung bestimmen.

c. z. B. $y = h(x) = -x - 2$

d. $h(x) = 2x$

e. Die Funktionsgleichung muss die Koordinaten des gegebenen Punktes als Lösung haben, z. B. in Teilaufgabe c.

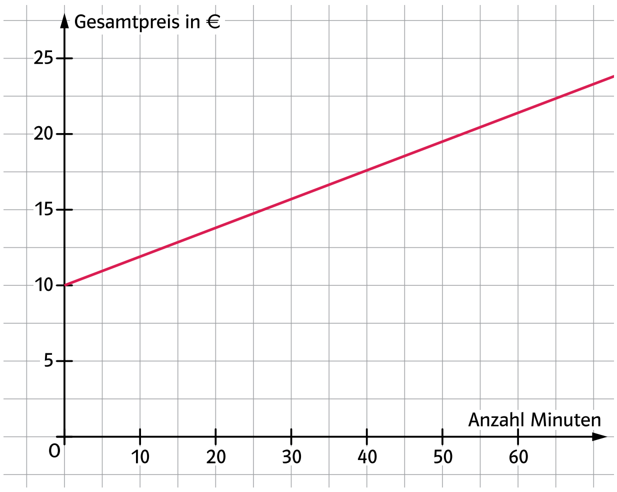
$-7 = h(5) = -5 - 2 = -7$

2

a. $y = 0{,}19\,€ \cdot x + 10\,€$

y ist der Gesamtpreis, x ist die Anzahl der Minuten, die man in fremde Netze telefoniert.

b.



c. Wie der Graph wirklich aussieht, hängt von der Taktung ab. Wenn eine 60/60 Taktung vorliegt, müsste der Graph eigentlich aus parallelen Linien in Form einer Treppe bestehen, da sich der Preis immer erst nach einer Minute wieder ändert.

d. z. B. Taxipreis, Strompreis, etc.

3

a. Alle Geraden, die die Steigung $\frac{2}{3}$ haben, sind parallel zur Geraden aus Teilaufgabe a.

z. B. $y = \frac{2}{3}x$; $y = \frac{2}{3}x + 1$; $y = \frac{2}{3}x + 2$; $y = \frac{2}{3}x - 2$

b. Alle Geraden, die die Steigung $-\frac{3}{2}$ haben, stehen senkrecht zu den Geraden mit der Steigung $\frac{2}{3}$.

z. B. $y = -\frac{3}{2}x$; $y = -\frac{3}{2}x + 1$; $y = -\frac{3}{2}x + 3$; $y = -\frac{3}{2}x - 4$

c. Alle Geraden, deren y-Achsenabschnitt -1 ist.

z. B. $y = x - 1$; $y = 2x - 1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$; $y = -3x - 1$

4

a. $y = -0{,}5x + 1{,}5$

b. $y = -3x + 2$

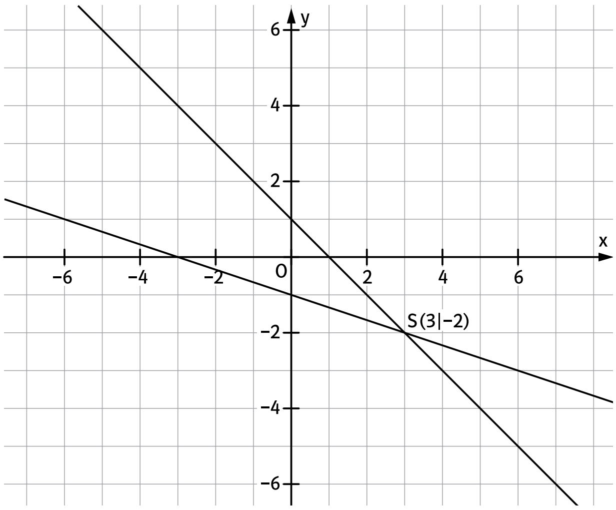
5 Der gemeinsame Punkt aller Geraden ist $(1\,|\,0)$. Er ist gleichzeitig Schnittpunkt mit der x-Achse. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist jeweils $(0\,|\,t)$, da der y-Achsenabschnitt von $f_t(x)$ jeweils der Parameter t ist.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

Lineare Gleichungssysteme

1

a.



b. (1) $y = -\frac{1}{2}x$ und $y = \frac{1}{2}x + 2$;

(2) $y = -2x + 1$ und $-2y = 4x - 2$

(3) $x + y = 3$ und $2x + 2y = 4$

2

a. $x = 0$ und $y = 2$ **b.** $x = 9$ und $y = 5$ **c.** $x = -\frac{8}{3}$ und $y = -\frac{5}{3}$

3 Beide Ansätze sind richtig.

(1) Carine bezeichnet die Anzahl der Dreibettzimmer mit x und die Anzahl der Fünfbettzimmer mit y. Dann ist $3x$ die Anzahl der Gäste in den (voll belegten) Dreibettzimmern und $5y$ die Anzahl der Gäste in den Fünfbettzimmern.

(2) Die Anzahl der Gäste in den Dreibettzimmern bezeichnet Tim mit der Variablen a und die Variable b steht für die Gästezahl in den Fünfbettzimmern. Die Anzahl der Dreibettzimmer ist dann $\frac{1}{3}a$ und die Anzahl der Fünfbettzimmer $\frac{1}{5}b$.

4

a. **A** $y = 0{,}6x + 35$ (x: Anzahl der gefahrenen Kilometer; y: Kosten)
$0{,}6x + 35 = 134 \iff x = 165$. Herr Schmidt ist 165 Kilometer gefahren.

b. **B** $y = 0{,}8x$, das lineare Gleichungssystem $y = 0{,}6x + 35$; $y = 0{,}8x$ hat die Lösung $x = 175$ und $y = 140$.
Man kann nicht sagen, dass ein Angebot grundsätzlich günstiger ist als das andere.
Fährt man weniger als 175 km, so ist Angebot B günstiger. Fährt man 175 km, so betragen die Kosten für beide Angebote 140 €. Für mehr als 175 km ist Angebot A günstiger.

5

a. Additionsverfahren: Die Addition beider Gleichungen liefert $0 = -3y + 7 \iff y = \frac{7}{3}$.
$y = \frac{7}{3}$ in die erste Gleichung eingesetzt liefert $x = -\frac{2}{3}$.

b. (1) $x = 4y - 3$ und $-x = 10 - 4y$; (2) $x = 4y - 10$ und $-x = 10 - 4y$;
(3) $3y - 9 = 3x$ und $-2x = 20 - 8y$

6

a. Wenn der x-Wert um den Wert 1 wächst, so nimmt der y-Wert jeweils um einen festen Wert zu. Die Zunahme des y-Wertes beträgt bei der ersten Funktion 1 und bei der zweiten Funktion 0,25. Daher handelt es sich um lineare Funktionen.

b. Die x-Koordinate des Schnittpunktes muss zwischen −1 und 0 liegen, Begründung:
Bei $x = -1$ ist der erste Funktionswert 2 kleiner als der zweite Funktionswert 2,25. Bei $x = 0$ ist aber der erste Funktionswert 3 größer als der zweite Funktionswert 2,5. Die y-Koordinate des Schnittpunktes muss zwischen 2 und 3 liegen.

c. Die Funktionsgleichungen lauten $y = x + 3$ und $y = \frac{1}{4}x + 2{,}5$. Schnittpunkt der Graphen: $S\left(-\frac{2}{3}\,\middle|\,\frac{7}{3}\right)$

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

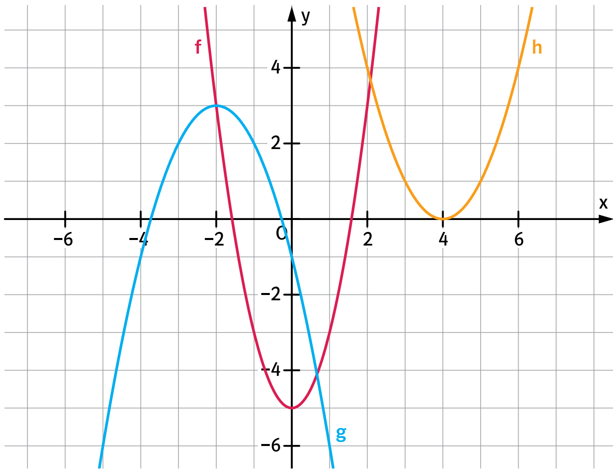
7 1. Möglichkeit: Ich löse das Gleichungssystem grafisch. Hierfür löse ich beide Gleichungen nach y auf und erhalte $y = -2x + 4$ und $y = x + 1$. Da ich nun die Steigungen und y-Achsenabschnitte der dazugehörigen Geraden kenne, zeichne ich diese Geraden in ein Koordinatensystem und lese ihren Schnittpunkt ab: $S(1|2)$. Die Lösung lautet also $x = 1$ und $y = 2$.
2. Möglichkeit: Ich wende das Additionsverfahren an. Deshalb multipliziere ich die zweite Gleichung mit -2 und addiere die neue Gleichung zur ersten Gleichung. Dadurch erhalte ich eine Gleichung, in der die Unbekannte y nicht mehr auftaucht: $6x + 2 = 8 \iff 6x = 6 \iff x = 1$.
Setze ich $x = 1$ in die zweite Gleichung ein, so erhalte ich $y = 2$.
Der zweite Weg ist der schnellere. Ich muss keine Geraden zeichnen und komme auch dann zu einer exakten Lösung, wenn der Schnittpunkt nicht genau bestimmt werden kann.

8 Beispiel:
Frau Schmidt kauft zweimal in der Woche frisches Obst ein. Am Montag kaufte sie 2 kg Äpfel und 1 kg Apfelsinen und bezahlte dafür 6,90 €. Am Donnerstag bezahlte sie für 1,5 kg Äpfel und 2 kg Apfelsinen zusammen 8,30 €. Wie teuer ist 1 kg Äpfel, wie teuer 1 kg Apfelsinen?

Quadratische Funktionen und Gleichungen

1

a.



b. $f(x) = -2(x + 3)^2 - 2$

$g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5$

$h(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2$

2

a. Alle Parabeln mit der Gleichung $y = a(x - 1)(x + 4)$ haben die beiden Nullstellen $x = 1$ und $x = -4$. Dabei ist a eine beliebige von null verschiedene Zahl. Es gibt also unendlich viele solcher Parabeln.

b. Da $A(2|9)$ auf der Parabel liegt, müssen die Koordinaten von A die Parabelgleichung erfüllen: $9 = a(2 - 1)(2 + 4)$. Aus dieser Geichung folgt $a = 1{,}5$. Die Parabelgleichung lautet $y = 1{,}5(x - 1)(x + 4)$.

3

a. $x = 5$ **b.** $x = -3$ oder $x = 2$ **c.** $x = -2$ oder $x = 3$ **d.** $x = -\sqrt{13} - 3 \approx -6{,}61$ oder $x = \sqrt{13} - 3 \approx 0{,}61$

e. $x = -\sqrt{10} - 2 \approx -5{,}16$ oder $x = \sqrt{10} - 2 \approx 1{,}16$ **f.** $x = x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x = 0$ oder $x = -1$ oder $x = 2$

4 Die dazugehörige Parabel hat den Scheitelpunkt $S(2|b)$.
(1) $b = 0$ und $a \neq 0$: Es gibt genau eine Nullstelle bei $x = 2$; die Parabel berührt bei $x = 2$ die x-Achse.
(2) $b > 0$ und $a > 0$: Es gibt keine Nullstelle; die Parabel ist nach oben geöffnet und liegt ganz oberhalb der x-Achse.
(3) $b > 0$ und $a < 0$: Es gibt zwei verschiedene Nullstellen; die Parabel ist nach unten geöffnet und schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten.
(4) $b < 0$ und $a > 0$: Es gibt zwei verschiedene Nullstellen; die Parabel ist nach oben geöffnet und schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten.
(5) $b < 0$ und $a < 0$: Es gibt keine Nullstelle; die Parabel ist nach unten geöffnet und liegt ganz unterhalb der x-Achse.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

5

a. $S(-3\,|\,0)$ **b.** $S(0{,}5\,|\,2)$ **c.** $S(0\,|\,4)$ **d.** $f(x) = (x-3)^2 + 0{,}5$ also $S(3\,|\,0{,}5)$

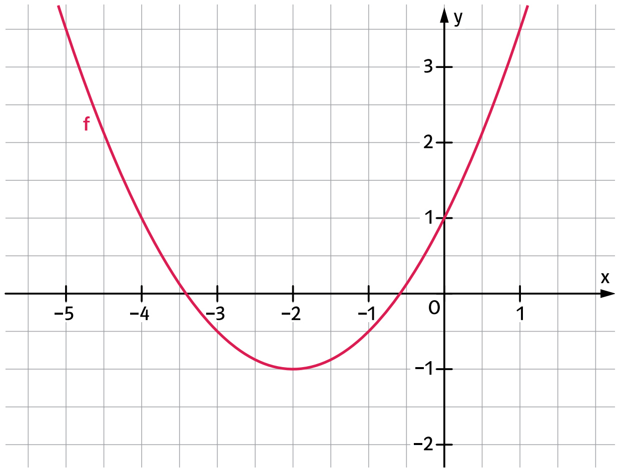
6

a. Die um vier Einheiten nach rechts verschobene Parabel hat die Gleichung $g(x) = (x-1)^2$, die anschließend um eine Einheit nach unten verschobene Parabel hat die Funktionsgleichung $h(x) = (x-1)^2 - 1$.

b. Die Parabelgleichung muss die Form: $y = a(x+1)^2$ haben. Da $P(2\,|\,3)$ auf der Parabel liegt, folgt $a(2+1)^2 = 3 \iff a = \frac{1}{3}$.

c. $f(x) = (x-1)^2 + 2$; $g(x) = -(x-1)^2 + 2$

7



8

a. Mit $v = 10\,\frac{m}{s}$ folgt für die Gleichung der Flugbahn $y = x - 0{,}1x^2 + 2$. Die Stoßweite ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x - 0{,}1x^2 + 2 = 0$. Man erhält eine Weite von etwa 11,7 m.

b. Grafische und rechnerische Experimente mit dem Rechner zeigen, dass Nils die Kugel mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $8{,}6\,\frac{m}{s}$ abgestoßen hat.

c. Für $v = 10\,\frac{m}{s}$ würde sich die Bahngleichung $y = 1{,}73x - 0{,}2x^2 + 2$ ergeben. Die dazugehörige Wurfweite beträgt etwa 9,7 m. Für $v = 8{,}6\,\frac{m}{s}$ ergibt sich die Bahngleichung $y = 1{,}73x - 0{,}27x^2 + 2$ und eine Wurfweite von etwa 7,4 m.
Nils sollte also den Abstoßwinkel nicht erhöhen. Im Gegenteil: Weitere Rechner-Experimente zeigen, dass bei vorgegebener Abstoßgeschwindigkeit und einer Abstoßhöhe von 2 m eine optimale Wurfweite bei einem Abstoßwinkel von ungefähr 40° erreicht wird.

9

a. Wir wählen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, dessen x-Achse parallel zum Erdboden verläuft und dessen Ursprung mit der Spritzdüse des Schlauchs übereinstimmt. Da der Punkt $P(-2\,|\,-0{,}15)$ auf der Parabel liegt, folgt $a(-2)^2 = -0{,}15 \iff a = -0{,}0375$. Die Parabel hat also die Gleichung $y = -0{,}0375x^2$.
Der Funktionswert von -5 ist $y(-5) = -0{,}9375$, d. h. das Schlauchende befindet sich etwa 94 cm über dem Boden.

b. $y(-7) = -1{,}8375$, d. h. der Schlauch muss etwa 1,84 m hoch gehalten werden.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

Potenzfunktionen und Potenzgleichungen

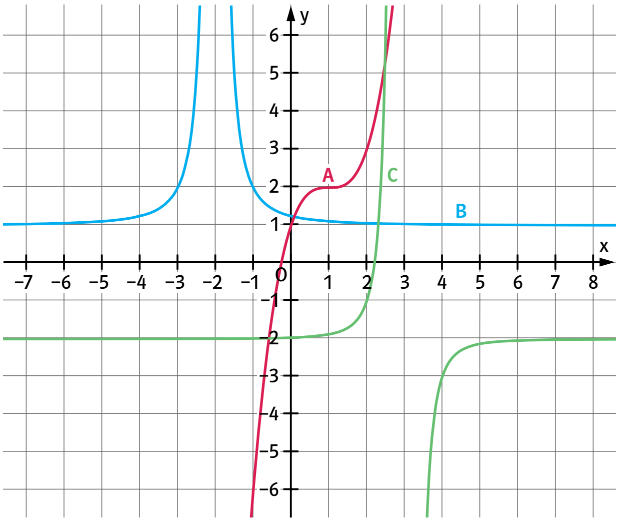
1

a./b. Gelber Graph: $f(x) = -(x + 2)^3 - 2$
punktsymmetrisch zu $(-2|-2)$; der Graph verläuft vom 2. Quadranten über den Schnittpunkt mit der x-Achse in den 3. Quadranten; $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

Blauer Graph: $f(x) = (x + 1)^{-2}$
achsensymmetrisch bzgl. $x = -1$; der Graph verläuft vom 2. Quadranten mit einem Sprung an der Definitionslücke bei $x = -1$ über den Schnittpunkt an der y-Achse in den 1. Quadranten; $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $W = \mathbb{R}^+$

Roter Graph: $f(x) = -(x - 2)^4 + 1$
achsensymmetrisch bzgl. $x = 2$; der Graph verläuft vom 4. Quadranten über den Schnittpunkt mit der x-Achse bei $x = 1$ in den 1. Quadranten und nachdem er bei $(2|1)$ seinen höchsten Punkt erreicht hat vom 1. Quadranten über den Schnittpunkt $x = 3$ mit der x-Achse in den 4. Quadranten; $D = \mathbb{R}^+$; $W = \mathbb{R}\backslash\{x > 1\}$

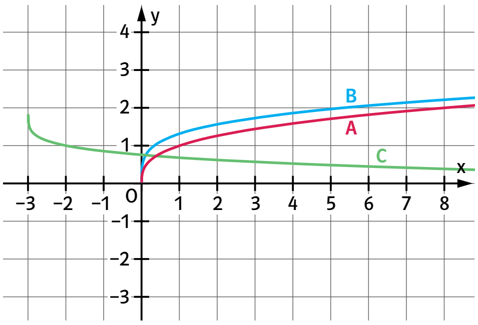
c. **A:** $f(x) = (x - 1)^3 + 2$
B: $g(x) = (x + 2)^{-2} + 1$
C: $h(x) = (3 - x)^{-3} - 2$



2

a. $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$
$D = \mathbb{R}\backslash\{x < 2\}$

b. **A:** $f\colon x \mapsto x^3$, $D = \mathbb{R}$;
$g\colon x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $D = \mathbb{R}_0^+$
B: $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^4$, $D = \mathbb{R}$;
$g\colon x \mapsto \sqrt[4]{3x}$, $D = \mathbb{R}_0^+$
C: $f\colon x \mapsto (2 - x)^5 - 3$, $D = \mathbb{R}$;
$g\colon x \mapsto 2 - \sqrt[5]{x + 3}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{x < -3\}$

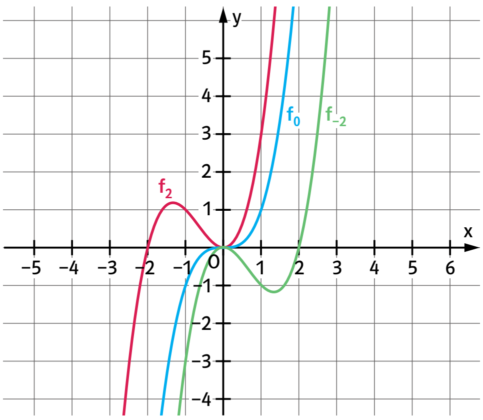


3

a. $f_2(x) = x^3 + 2x^2$
$f_0(x) = x^3$
$f_{-2}(x) = x^3 - 2x^2$

b. Für alle Werte von t berühren sich die Graphen im Ursprung $(0|0)$.

c. Für $t = 3$ verläuft der Graph der Funktion f_t durch den Punkt $P(-2|4)$.



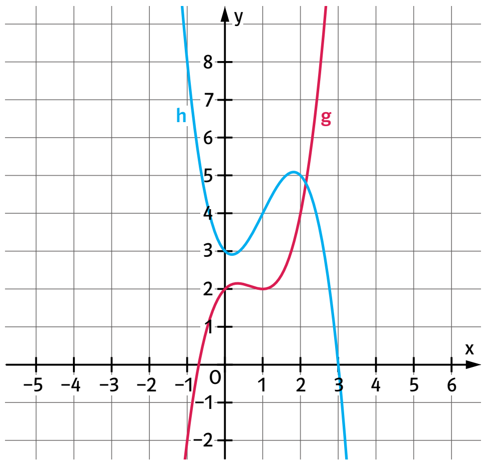
Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

Lösungen – Kompetenzcheck

4

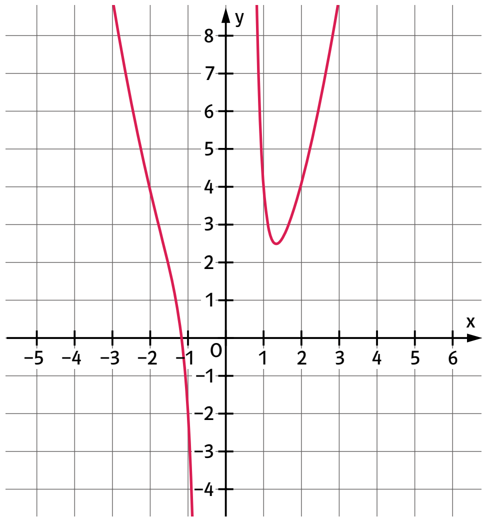
$g(x) = x^3 + x^2 + 2$
$h(x) = -x^3 + 2x + 4$

Der einzige Schnittpunkt liegt etwa bei (1,2 | 4,8).
Die x-Koordinate 1,2 ist die Lösung der algebraischen Gleichung
$x^3 + x^2 + 2 = -x^3 + 2x + 4$.



5

a. $b = 3$
b. $h(x) = x^2 + 3x^{-5}$
$D = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ W = \mathbb{R}$
c. Der Term $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ ist nur für x-Werte ungleich null definiert, da man durch null nicht teilen darf.



6

a. $(x-4)^3 = 27$ $\quad L = \{3\}$
b. $(2x-3)^4 = 10\,000$ $\quad L = \{6{,}5\}$
c. $\sqrt[5]{8-2x} = 3$ $\quad L = \{-117{,}5\}$
d. $12 - \sqrt[4]{x^3} = 11$ $\quad L = \{1\}$

Wachstum

1

a. Rekursiv:
$B(0) = 50$ (im Jahr 1992) mit $B(n) = B(n-1) \cdot c$
Explizit:
$B(n) = B(0) \cdot c^n$
Man erhält durch Probieren mit $c = 1{,}35$:
$B(20) = 50 \cdot 1{,}35^{20} \approx 20\,200$
Pro Jahr wuchs der Bestand also um etwa 35 %.
b. 35 % von 20 000 sind 7000. Man müsste pro Jahr etwa 7000 Schlangen fangen.
c. $B(0) = 20\,000$ (im Jahr 2012)
$B(1) = 20000 \cdot 1{,}35 - x$
$B(2) = B(1) \cdot 1{,}35 - x$
$B(n) = B(n-1) \cdot 1{,}35 - x$
Bei $x = 6817$, also 6817 gefangenen Schlangen pro Jahr lässt sich die Schlangenpopulation auf unter 30 000 bis zum Jahr 2022 begrenzen. Erstaunlich, dass man nahezu genau so viele Schlangen fangen muss, wie bei b.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

2

a. $B(n) = B(n-1) + 0{,}28 \cdot (300 - B(n-1))$ mit $B(0) = 1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B(n)	1	84,72	145	188,4	219,65	242,15	258,35	270,01	278,41	284,45	288,81	291,94

b. 90 % von 300, also $300 \cdot 0{,}9 = 270$

Es ist also zu beantworten, wann $270\,m^2$ Teichfläche von Algen bedeckt sind. Laut Tabelle gilt dies nach 7 Tagen.

3

A: $B(n) = B(n-1) \cdot 0{,}5 + 100$ mit $B(0) = 0$

B: $B(n) = B(n-1) \cdot 0{,}8 + 100$ mit $B(0) = 0$

C: $B(n) = B(n-1) \cdot 0{,}9 + 100$ mit $B(0) = 0$

D: $B(n) = B(n-1) \cdot 0{,}8 + 100$ mit $B(0) = 0$

Der Sättigungswert ist erreicht, wenn Abbau und Zuwachs identisch sind.

A: In einer Stunde werden 50 % abgebaut. Sättigung / Schranke · 0,5 = 100 (verabreichte Medikamentenmenge)
daher Sättigungswert / Schranke = 200

B: In einer Stunde werden 20 % abgebaut. Sättigungswert · 0,2 = 100
Sättigungswert / Schranke = 100 · 5 = 500.

C: In einer Stunde werden 10 % abgebaut. Sättigungswert · 0,1 = 100
Sättigungswert / Schranke = 100 · 10 = 1000.

D: In einer Stunde werden 20 % abgebaut. Sättigungswert · 0,2 = 200
Sättigungswert / Schranke = 200 · 5 = 1000.

Allgemein gilt:

Sättigungswert = Verabreichte Medikamentenmenge · $\frac{100}{\text{Abbaurate}}$ (in %)

	A	B	C	D
verabreichte Medikamentenmenge in mg/Stunde	100	100	100	100
verabreichte Medikamentenmenge in mg/Stunde	50 %	20 %	10 %	20 %
Halbwertszeit in Stunden	1	3,1	6,6	3,1
Sättigungswert in mg	200	500	1000	1000

Halbwertszeit T_h:

Abbaurate 20 % heißt, dass nach einer Stunde noch 80 % Wirkstoff im Blut sind.

$100 \cdot 0{,}8^t = 50$

$0{,}8^t = 0{,}5$

$t = \log(0{,}5) / \log(0{,}8) = 3{,}1$

Analog:

$0{,}9^t = 0{,}5 \Rightarrow t = 6{,}6$

Der Sättigungswert ist erreicht, wenn Abbau und Zuwachs identisch sind.

A: In einer Stunde werden 50 % abgebaut. Sättigung/Schranke · 0,5 = 100 (verabreichte Medikamentenmenge)
daher Sättigungswert / Schranke = 200

B: In einer Stunde werden 20 % abgebaut. Sättigungswert · 0,2 = 100
Sättigungswert/Schranke = 100 · 5 = 500.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

C: In einer Stunde werden 10 % abgebaut. Sättigungswert · 0,1 = 100
Sättigungswert/Schranke = 100 · 10 = 1000.

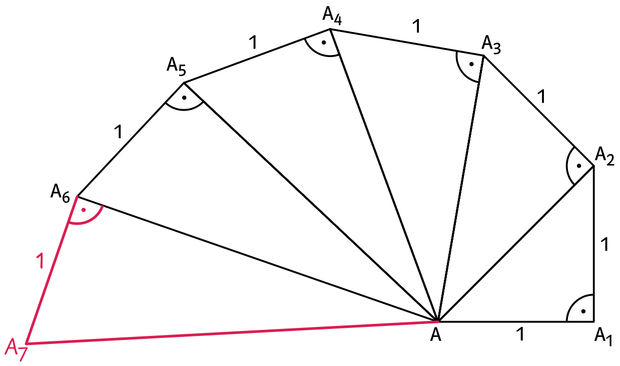
D: In einer Stunde werden 20 % abgebaut. Sättigungswert · 0,2 = 200
Sättigungswert/Schranke = 200 · 5 = 1000.

Allgemein gilt:
Sättigungswert = Verabreichte Medikamentenmenge · $\frac{100}{\text{Abbaurate}}$ (in %)

Satz des Pythagoras, Ähnlichkeit, Satz des Thales

1

a.



b. $\overline{AA_2} = \sqrt{2}$
$\overline{AA_3} = \sqrt{3}$
⋮
$\overline{AA_n} = \sqrt{n}$

c. $F(AA_1A_2) = \frac{1}{2}$
$F(AA_2A_3) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$
⋮
$F(AA_{n-1}A_n) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n-1}$

d. $W(AA_1A_2) = 2 + \sqrt{2}$
$W(AA_1A_2A_3) = 3 + \sqrt{3}$
⋮
$W(AA_1A_2 \ldots A_n) = n + \sqrt{n}$

e. Die Dreiecke sind nicht ähnlich, da die Winkel bei A nicht kongruent sind.

f. Da die Dreiecke rechtwinklig sind, liegt der dritte Punkt stets auf dem dazugehörigen Thaleskreis.

2

a. Bei einem Winkel von 45° ist das Steigungsdreieck gleichschenklig. Also ist das Verhältnis und somit die Steigung 1.

b. Die Länge beträgt ca. 2,5 km und der Höhenunterschied ist 100 m.

c. Die horizontale Entfernung beträgt ca. 6,19 km und der Höhenunterschied ist 310 m.

d.

	Original	1:10 000	1:25 000
Horizontale Länge	798,6 m	7,986 cm	3,19 cm
Höhendifferenz	47,9 m	0,48 cm	0,192 cm
Länge	800 m	8 cm	3,2 cm

Die Quotienten sind stets gleich, weil die Dreiecke ähnlich sind.

e. Das Gefälle beträgt 1,5 %, das ist das 6-fache des zulässigen Werts, was nicht tolerabel ist.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

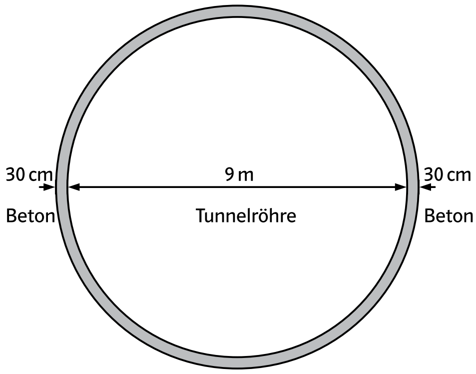
Körper und Flächen

1

a. $57\,000\,m : 325\,m = 175{,}3$
Die Anzahl kann stimmen.

b. $(2{,}125^2 \cdot \pi) \cdot 40 \approx 567{,}5$
Da der Außendurchmesser größer ist, müssen mehr als $567{,}5\,m^3$ Fels für einen Querschlag entfernt werden.

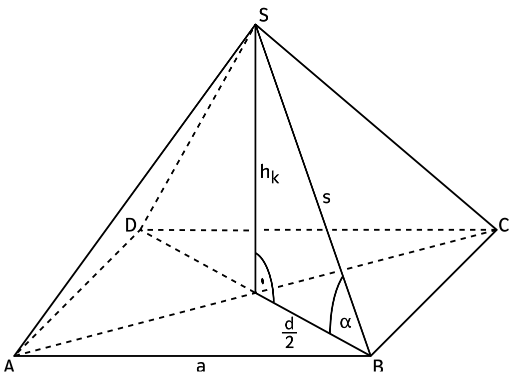
c.



$9\,m + 2 \cdot 0{,}3\,m = 9{,}6\,m$
$\pi \cdot 4{,}8^2 - \pi \cdot 4{,}5^2 \approx 8{,}765$
$8{,}765 \cdot 40 \approx 350{,}6$
Es müssen maximal $350{,}6\,m^3$ Beton am Tag bereit gestellt werden.

d. $2 \cdot (57\,000 \cdot 4{,}8^2 \cdot \pi) = 8\,251\,581{,}6$
Beide Tunnelröhren erzeugen zusammen etwa 8,25 Millionen m^3 Auswurfmaterial. Allerdings ist dann das Auswurfmaterial für die Querstollen $(178 \cdot 567{,}5\,m^3 = 101\,015\,m^3)$ noch nicht berücksichtigt. Zusammen sind das etwa 8,35 Millionen m^3 Auswurfmaterial.
Die Aussage, dass das Auswurfmaterial des Basistunnels etwa das 5-fache Volumen der Cheops-Pyramide aufweist, stimmt also nicht.

e. Vorgaben $a = 350\,m$ Seitenlänge



Material $13\,300\,000\,m^3$

$13\,300\,000 = \frac{1}{3} \cdot 350^2 \cdot h_k$

$325{,}7 \approx h_k$
$d^2 = a^2 + a^2$
$d \approx 495$

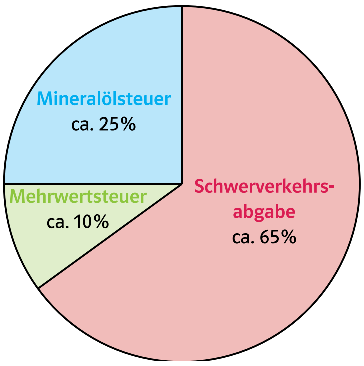
$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h_k^2 = s^2$

$428{,}7 \approx s$

$\sin\alpha = \frac{h_k}{s} \approx 0{,}76 \quad \alpha \approx 49{,}4°$

f. Im Bild ist die „Auswurfpyramide" 5 cm breit, dann müsste sie nach den Berechnungen aus e. eine Höhe von 4,7 cm in der Zeichnung haben.

g.



10 % ≙ 3 Mrd. Franken
25 % ≙ 7,5 Mrd. Franken
65 % ≙ 19,5 Mrd. Franken
Beträge in Euro abhängig vom Wechselkurs Franken in Euro
z. B. Kurs 0,77
3 Mrd. Franken · 0,77 = 2,31 Mrd. Euro

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

Trigonometrie

1

a. **A** $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$; $\alpha = 36{,}9°$; $\gamma = 53{,}1°$; $c = b \cdot \sin(\gamma) = 8\,\text{cm}$

B $\alpha = 50°$; $b = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 7\,\text{cm}$; $a = b \cdot \sin(\alpha) = 5{,}4\,\text{cm}$

C $\gamma = 23°$; $c = b \cdot \sin(\gamma) = 3{,}4\,\text{cm}$; $a = b \cdot \sin(\alpha) = 8\,\text{cm}$

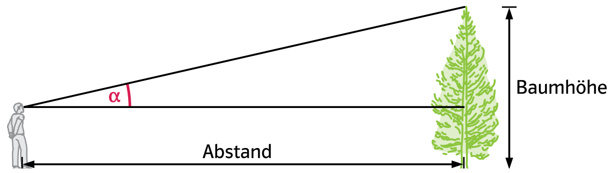
b. **A** $\sin(\gamma) = \frac{c}{b} = 0{,}42 \Longrightarrow$ mögliche Maße: $a = 9{,}1\,\text{cm}$; $b = 10\,\text{cm}$; $c = 4{,}1\,\text{cm}$
$\alpha = 65°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 25°$

B $\sin(\alpha) = \frac{a}{b} = 0{,}83 \Longrightarrow$ mögliche Maße: $c = 5{,}6\,\text{cm}$; $b = 10\,\text{cm}$; $a = 8{,}3\,\text{cm}$
$\alpha = 56°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 34°$

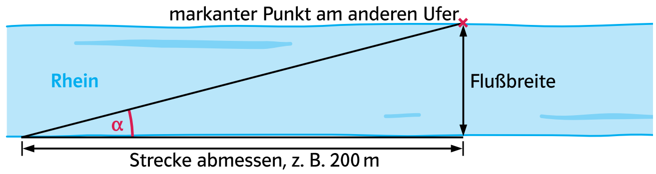
c. In beiden Teilaufgaben nutzt man das konstante Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken aus (Definition des Sinus). In anderen Dreiecken sind die Verhältnisse anders.

2

a. Mögliche Vorgehensweise:
Abstand vom Baum messen
Winkel α durch Anpeilen messen
Baumhöhe ≈ Abstand · tan (α) + Körpergröße



b. Mögliche Vorgehensweise:
Markanten Punkt am gegenüberliegenden Ufer suchen, eine begehbare Strecke (wie in der Skizze gezeigt) am eigenen Ufer abmessen, Winkel α durch Anpeilen ermitteln,
Breite ≈ Streckenlänge · tan (α)



3

a. **I + II** Durch Einzeichnen der Höhe entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, daraus lassen sich die Gleichungen I und II aufstellen. Beide Gleichungen werden nach h aufgelöst.

III Das Gleichsetzungsverfahren wird angewendet, der Winkel γ ist jetzt die einzige Unbekannte, somit kann in IV die Gleichung nach $\sin(\gamma)$ aufgelöst werden, der entsprechende Sinuswert wird bestimmt.

IV Mithilfe des Taschenrechners wird γ bestimmt.

b. $h = 8{,}5 \cdot \sin(36°) = 5\,\text{cm}$ $\quad\quad$ $\beta = 180° - (36° + 43{,}9°) = 100{,}1°$
$b = b_1 + b_2 = 8{,}5 \cdot \cos(36°) + 7{,}2 \cdot \cos(43{,}9°) = 6{,}9\,\text{cm} + 5{,}2\,\text{cm} = 12{,}1\,\text{cm}$

c. Für das gegebene Beispiel erhält man durch eine allgemeine Schreibweise in Gleichung III $a \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\alpha)$ bzw. durch Umstellen: $\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$
Für spitzwinklige Dreiecke kann man Bettinas Verfahren leicht auf andere Seitenverhältnisse übertragen und erhält so: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$. Die Beweisführung für stumpfwinklige Dreiecke gestaltet sich etwas schwieriger, da die Höhe hier außerhalb des Dreiecks liegt. (Deshalb genügt für diesen Fall eine einfache rechnerische Bestätigung.)

d. Das Verfahren lässt sich auf die Beispiele A, B und D anwenden, aber nicht auf Beispiel C. Begründung: Unter den gegebenen Größen muss immer eine Seite und der jeweils gegenüberliegende Winkel gegeben sein. Bei Beispiel C ist der gegebene Winkel zwischen den beiden gegebenen Seiten eingeschlossen.

4

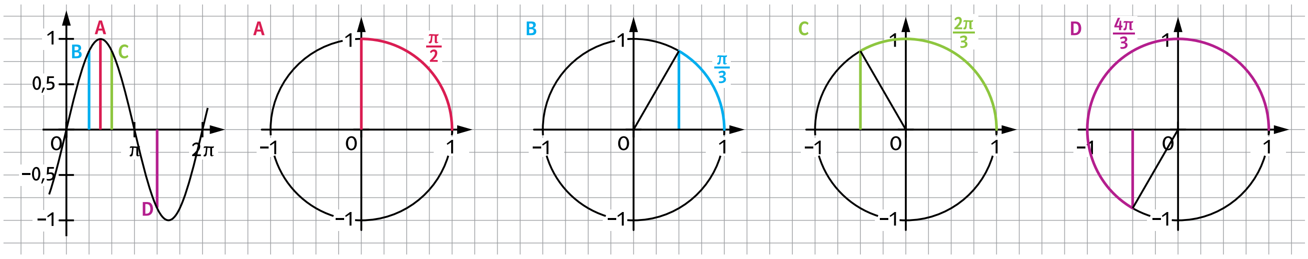
a. In der Abbildung A ist die Funktion $f(x) = \sin(x)$ dargestellt, die Größe x wird im Bogenmaß angegeben, es handelt sich also um Längeneinheiten. In der Abbildung B wird die Funktion $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ dargestellt, die Größe α wird im Gradmaß angegeben.

b. Im Einheitskreis errechnet sich die jeweilige Bogenlänge mithilfe der Formel $\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}$ bzw. $b = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$.

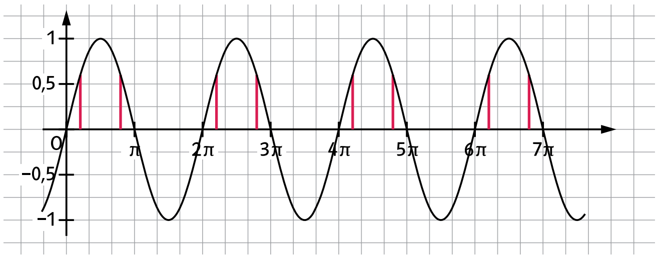
Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

5

a. **A** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$ **B** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = x$ **C** $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = x$ **D** $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = x$



b. | c. **A** $\sin(x) = 0,6$



Die Gleichung hat, wie man gut am Graphen erkennt, beliebig viele Lösungen:
$x_1 \approx 0,64$, $x_{11} = 0,64 + 2\pi$, $x_{12} = 0,64 + 4\pi$ usw.
$x_2 = \pi - 0,64 \approx 2,5$, $x_{21} = 2,5 + 2\pi$ usw.
Die Lösungen zu B und D sind analog; C hat keine Lösung.

c. Eine Gleichung $\sin(x) = a$ ist dann lösbar, wenn $-1 \le a \le 1$ gilt. Dann gibt es immer beliebig viele Lösungen.

6

a. Stimmt, wie man am Graphen sieht.

b. Stimmt, der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

c. Stimmt nicht, z. B. ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

7

a. Gleichung I passt nicht, der zugehörige Graph müsste entlang der x-Achse verschoben sein.
Gleichung II passt, da Verschiebung um π und Spiegelung an der x-Achse den gleichen Graphen erzeugt.
Gleichung III passt, da sich die Werte periodisch wiederholen.

b. **A** Der Ausgangsgraph ist der Graph der Funktion $\sin x$.
Der zweite Graph ist mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht und an der x-Achse gespiegelt. Er gehört zur Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

B Beim Ausgangsgraph zu $y = \sin x$ wiederholen sich die Werte nach 2π wieder, bei $y = \sin 2x$ wiederholen sie sich bereits nach π wieder.

C Der Ausgangsgraph zu $y = -\sin x$ wird um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung verschoben zu $y = -\sin x + \frac{1}{2}$.

Wahrscheinlichkeit

1

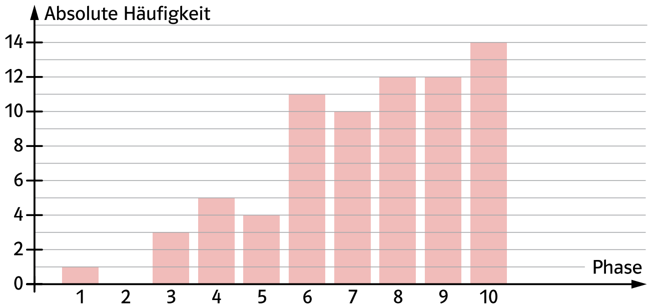
a. „1“ bei Phase 1 bedeutet, dass noch eine Person bei Phase 1 war, d. h. keine Phase in der ganzen Runde geschafft hat.
„5“ bei Phase 4 bedeutet, dass bei den 12 Spielen 5-mal eine Person bzw. mehrere Personen bei Phase 4 waren als das gesamte Spiel beendet wurde.
„14“ bei Phase 10 bedeutet, dass 2 Spieler auch in Phase 10 waren, dann aber nicht alle Karten ablegen konnten und somit nicht gewonnen haben.

arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + \ldots + 10 \cdot 14}{72} \approx 7,36$

Zentralwert 8

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1

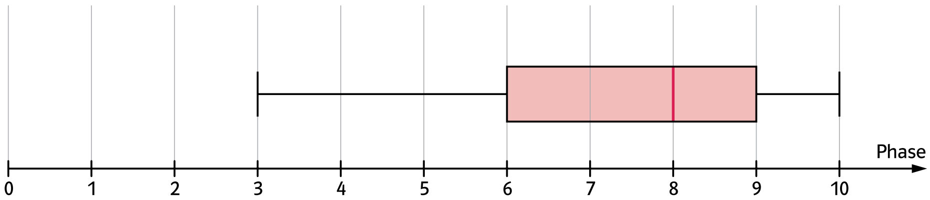
Durchschnittlich befanden sich die Spieler in Phase 7,36, wenn das Spiel beendet wurde. Dies ist so natürlich nicht möglich. Der Zentralwert gibt die Phase an, die in der Mitte liegt.



Andere Darstellungen sind auch möglich, z. B. Boxplots, Kreisdiagramme.

Es ist nur in ein oder zwei Spielen „knapp" ausgegangen. An der absoluten Häufigkeit von Phase 10 erkennt man, dass sich 2 Spieler (in einem oder zwei Spielen) ebenfalls in Phase 10 befanden, als das Spiel beendet wurde.

b.



Es fällt auf, dass der Zentralwert übereinstimmt. Das Minimum liegt jedoch bei Phase 3, d. h. also, dass diesmal alle Spieler pro Spiel mindestens bis Phase 3 gekommen sind.

I Ist so nicht richtig: In höchstens 25 % der Spiele ist der „Verlierer" noch in Phase 3 bis 6.

II Diese Aussage stimmt. Der Median liegt bei 8.

III Phase 9 und 10 wird von höchstens 25 % der Spieler erreicht (oberstes Quartil). Es lässt sich aber keine genauere Angabe machen.

2

a. P(„7") = $\frac{8}{108}$

P(„Aussetzen") = $\frac{4}{108}$

P(„Joker") = $\frac{8}{108}$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maren bzw. Sylvie anfangen darf gleich, nämlich $\frac{8}{108}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Heike beginnt, ist nur halb so groß.

b. P(erste beide Karten rote 7) = $\frac{2}{108} \cdot \frac{1}{107} = \frac{2}{11556} \approx 0{,}00017 \approx 0{,}02\,\%$

P(erste beiden Karten sind Zwilling) = $\frac{96}{108} \cdot \frac{1}{107} = \frac{96}{11556} \approx 0{,}0083 \approx 0{,}83\,\%$

c. P(6 Richtige) = $\frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,071\,5 = 0{,}000\,007\,15\,\%$

P(7 Karten einer Farbe) = $\frac{96}{108} \cdot \frac{23}{107} \cdot \frac{22}{106} \cdot \frac{21}{105} \cdot \frac{20}{104} \cdot \frac{19}{103} \cdot \frac{18}{102} \approx 4{,}96 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,049\,6 = 0{,}004\,96\,\%$

d. Aufgrund der großen Anzahl an Möglichkeiten sind die Wahrscheinlichkeiten für alle Phasen recht schwierig zu bestimmen, da man für jedes Ereignis auch noch beachten muss, an welcher Stelle es auftreten kann.

Online-Link
aus Mathematikbuch 5, Ausgabe B, ISBN 978-3-12-700591-1