Sind irrationale Zahlen unvernünftig?

Schon die alten Griechen haben herausgefunden, dass es irrationale Zahlen gibt.

Wie konnten die das denn merken?

Zum Beispiel ist die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat irrational.

Die Länge ist doch $\sqrt{2}$.

Richtig, und die Griechen haben sogar bewiesen, dass diese Zahl irrational ist. Also nicht als Bruch dargestellt.

Das stelle ich mir aber gar nicht einfach vor!

Dazu haben sie ein Verfahren benutzt, welches man heutzutage als indirekten Beweis bezeichnet.

Und wie soll das gehen?

Man nimmt das Gegenteil von dem an, was man beweisen will und zeigt, dass das nicht gehen kann, dass es also zu einem Widerspruch führt. Daraus schließt man, dass die Annahme falsch gewesen sein muss.

Das verstehe ich noch nicht!

Stell dir vor, du willst beweisen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Du beweist es indirekt, indem du zunächst annimmst, dass es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt. Dann gibt es auch eine größte natürliche Zahl m. Aber du kannst sofort eine noch größere natürliche Zahl angeben.

Ja, zum Beispiel $m + 3$.

Richtig, und damit hast du einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur endlich viele Zahlen gibt, hergeleitet.

Somit gibt es also unendlich viele natürliche Zahlen. Das habe ich verstanden. Aber wie kann man beweisen, dass die Wurzel aus 2 irrational ist? Zunächst nimmt man sicherlich an, dass sie rational sei.

Ja, also, dass sie als Bruch dargestellt werden kann.

Klar, Zähler durch Nenner.

Zum Beispiel a durch b. Dann ist 2 aber auch a^2 durch b^2.

Dazu musst du ja nur beide Seiten der Gleichung quadrieren. Dann ist auch $2b^2$ gleich a^2. Das ist aber noch kein Widerspruch.

Genau. Aber jede natürliche Zahl kann man in eindeutiger Weise als Produkt von lauter Primzahlen darstellen. Diese Behauptung hat einst der Mathematiker Gauß bewiesen. 140 zum Beispiel ist $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Dann ist $140^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Also kommt jede Primzahl zweimal oder viermal usw. oft vor.

So ist das auch bei unserem a^2, jeder Primzahlfaktor kommt in einer geraden Anzahl vor.

Bei b^2 ist es doch genauso!

Ja, aber bei $2b^2$ nicht. Es gibt die 2, die keinen Partner hat. Und das kann nicht sein, weil $2b^2$ gleich a^2 sein soll.

Denn gleiche Zahlen haben ja die gleiche Produktdarstellung durch Primfaktoren, was ja dieser exzellente Mathematiker bewiesen hat. Und damit haben wir nun einen Widerspruch konstruiert.

Ja, und das beweist, dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar und somit irrational ist.

Und das haben schon die Griechen bewiesen? Die waren wirklich ganz schön clever.

Online-Link
aus Mathematikbuch 8, Ausgabe A, ISBN 978-3-12-700381-9