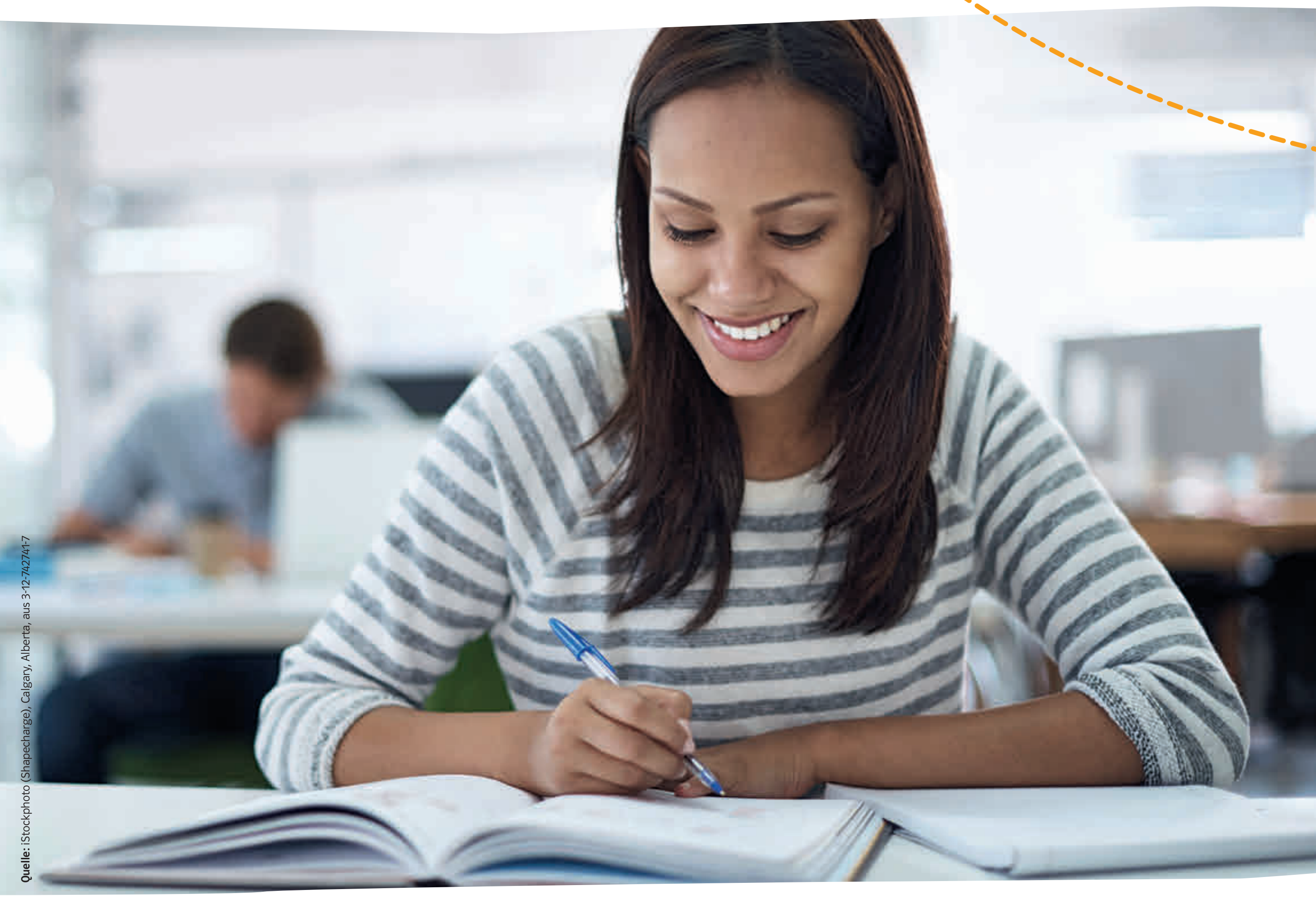
Schnittpunkt

Mathematik für die Berufsfachschule

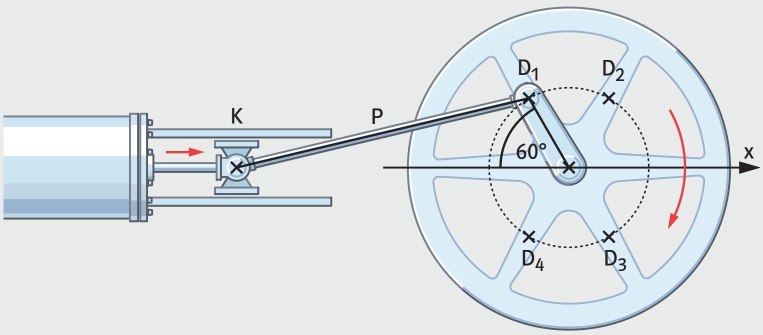
Zusatzinhalte für Rheinland-Pfalz ab 2018



Quelle: iStockphoto (Shapecharge), Calgary, Alberta, aus 3-12-742741-7

Klett

1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis



Die Kolbenbewegung der Dampfmaschine wird über den Kreuzkopf K, die Pleuelstange P und den Drehzapfen D in die Drehbewegung des Schwungrads umgesetzt. Die Lage von D ist durch den Drehwinkel bestimmt, den die Kurbel mit der positiven x-Achse einschließt.

→ Welche Winkel gehören zu den Lagen D_1, D_2, D_3 und D_4? Wo befindet sich K, wenn der Drehzapfen in der Lage D_4 ist?

Der Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 heißt **Einheitskreis**. Zu jedem Punkt P auf dem Einheitskreis gehört ein Winkel ∢ AOP im Einheitskreis, in der Zeichnung als α bezeichnet. Die Hypotenuse $\overline{OP}$ der Dreiecke OAP und OBP hat jeweils die Länge 1.

Die Anwendung vom Satz des Pythagoras im Dreieck OAP ergibt $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Es gilt $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \sin\alpha$.

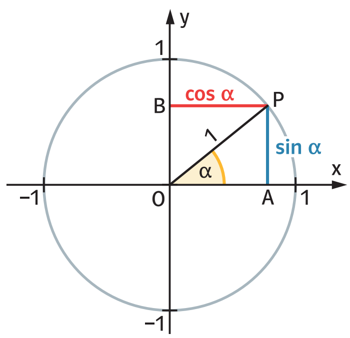
Da $\overline{OP} = 1$ ist,

ergibt sich $\overline{AP} = \sin\alpha$.

Es gilt ebenso $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \cos\alpha$.

Da $\overline{OP} = 1$ ist, ergibt sich $\overline{OA} = \cos\alpha$.

Der Punkt P hat also die Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$.



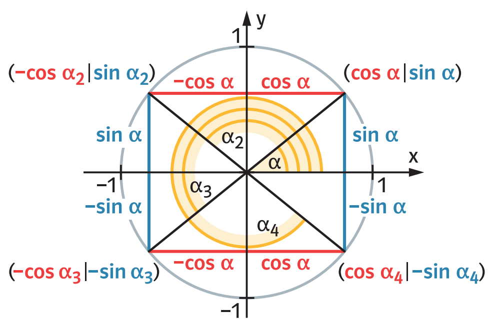
Diese Darstellung gilt zunächst nur im 1. Quadranten des Kooordinatensystems. Sie soll aber auch in den anderen drei Quadranten gelten. Deshalb werden Sinus und Kosinus für die Winkel 90° bis 360° als Koordinaten der Punkte auf dem Einheitskreis festgelegt.

Dafür benutzt man folgende Formeln:

2. Quadrant: $\sin\alpha_2 = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos\alpha_2 = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

3. Quadrant: $\sin\alpha_3 = \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos\alpha_3 = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

4. Quadrant: $\sin\alpha_4 = \sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos\alpha_4 = \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$



Um sich besser merken zu können, wann Sinus und Kosinus positive und wann negative Werte annehmen, gibt es dieses Kurzschema zu den Vorzeichen der Sinuswerte und Kosinuswerte für die vier Quadranten als Merkhilfe.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke Jeder Punkt P auf dem **Einheitskreis** hat die Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$. Die Werte von Sinus und Kosinus für Winkel zwischen 90° und 360° ergeben sich aus den Werten für die Winkel zwischen 0° und 90°. Zu jedem Sinuswert außer 0, 1 und −1 gehören zwei Winkel auf dem Einheitskreis und zu jedem Kosinuswert außer −1 gehören zwei Winkel auf dem Einheitskreis.

Beispiel

a) $\sin 215° = \sin(180° + 35°)$
$= -\sin 35° = -0{,}573\ldots$

b) $\cos 167° = \cos(180° - 13°)$
$= -\cos 13° = -0{,}974\ldots$

c) Der zweite Winkel α mit $\sin\alpha = \sin 40°$ ist $\alpha = 140°$, denn
$\sin 140° = \sin(180° - 40°)$
$= \sin 40°$

d) Der zweite Winkel α mit $\cos\alpha = \cos 25°$ ist $\alpha = 335°$, denn
$\cos 335° = \cos(360° - 25°)$
$= \cos 25°$

○ **1** Bestimmen Sie zeichnerisch am Einheitskreis (r = 10 cm) für die Winkel $\alpha = 130°$ (170°, 230°, 305°, 340°) den Sinus und Kosinus auf zwei Stellen nach dem Komma.

○ **2** Bestimmen Sie zeichnerisch am Einheitskreis (r = 10 cm) die Winkelgrößen aus dem Bereich $0° < \alpha < 360°$, für die gilt:
a) $\sin\alpha = 0{,}27$
b) $\sin\alpha = 0{,}32$
c) $\sin\alpha = -0{,}58$
d) $\sin\alpha = -0{,}44$
e) $\cos\alpha = 0{,}95$
f) $\cos\alpha = 0{,}17$
g) $\cos\alpha = -0{,}59$
h) $\cos\alpha = -0{,}6$

○ **3** Bestimmen Sie den zweiten Winkel α, wie in Beispiel c) und d).
a) $\sin\alpha = \sin 50°$
b) $\cos\alpha = \cos 40°$
c) $\sin\alpha = \sin 5°$
d) $\cos\alpha = \cos 82°$
e) $\sin\alpha = -\sin 23°$
f) $\cos\alpha = -\cos 38°$

○ **4** Geben Sie den Quadranten und jeweils zwei Winkel an, für die gilt:
a) $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha > 0$,
b) $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha < 0$,
c) $\sin\alpha < 0$ und $\cos\alpha > 0$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

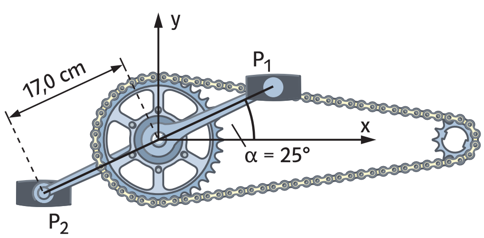
○ **5** Sinus und Kosinus haben besondere Werte für die Winkel 0°; 30°; 45°; 60°; 90°. Solche Werte ergeben sich auch für die um 90°; 180° und 270° größeren Winkel. Legen Sie eine Tabelle, die **Tabelle der besonderen Werte**, von 0° bis 360° an.

◒ **6** Finden Sie, wenn möglich, einen passenden Winkel α mit $0° \leqq \alpha \leqq 90°$.
a) $\sin\alpha = \sin 165°$
b) $\cos\alpha = \cos 300°$
c) $\sin\alpha = \sin 222°$
d) $\sin\alpha = \sin 295°$

◒ **7** Ohne Taschenrechner!
a) Berechnen Sie
$\sin 50° + \sin 140° + \sin 230° + \sin 320°$.
b) Begründen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a).
c) Geben Sie α_2, α_3 und α_4 so an, dass
$\sin 37° + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 = 0$ ist.

● **8** Welche der folgenden Formeln gelten für **alle** Winkel α von 0° bis 90°, welche sind falsch? Begründen Sie am Einheitskreis.
1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
2) $\sin\alpha = \sin(90° + \alpha)$
3) $\cos\alpha = -\cos(360° - \alpha)$
4) $\sin(180° + \alpha) = \sin(180° - \alpha)$
5) $\cos\alpha = -\cos(180° + \alpha)$
6) $\sin\alpha = -\sin(270° + \alpha)$
7) $\sin\alpha = \cos(270° + \alpha)$
8) $\cos\alpha = -\sin(270° - \alpha)$

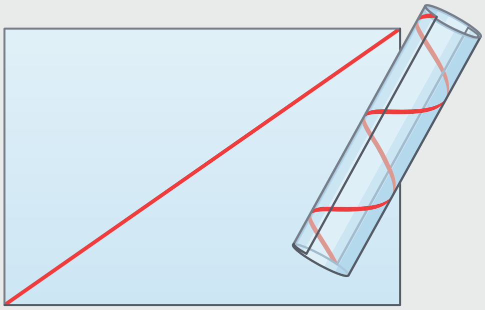
● **9** Ein Punkt P auf einem Kreis mit dem Radius r hat die Koordinaten $(r \cdot \cos\alpha \mid r \cdot \sin\alpha)$. Berechnen Sie die Koordinaten der Fahrradpedale P_1 und P_2
a) in der gezeichneten Lage.
b) eine Vierteldrehung weiter.



?! 1–7 7, 8 1, 2, 9 9

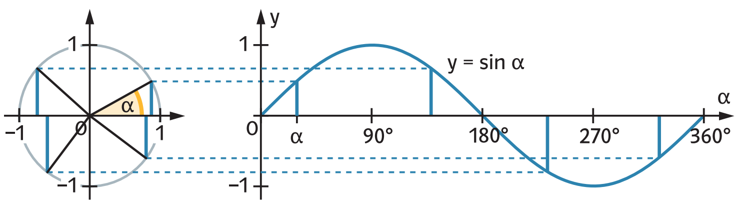
Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

2 Sinusfunktion und Kosinusfunktion

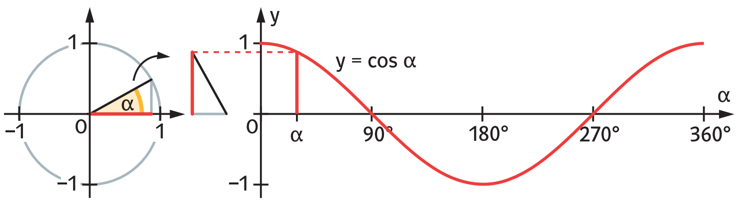


Auf eine Folie wird eine Diagonale gezeichnet. Anschließend wird die Folie zu einem Zylinder gerollt und die entstandene Raumkurve an die Wand projiziert.

→ Beschreiben Sie das Bild. Welcher Eindruck entsteht, wenn der Zylinder um seine Achse gedreht wird?



Zu jedem Wert des Winkels α von 0° bis 360° gehört ein Wert von **sin α**. Wird dieser Zusammenhang grafisch dargestellt, so entsteht der Graph der **Sinusfunktion**.



Entsprechend entsteht auch der Graph der **Kosinusfunktion**. Die am Einheitskreis waagerecht liegende Strecke mit der Länge **cos α** wird im Koordinatensystem als y-Wert abgetragen.

Merke Die **Sinusfunktion** und die **Kosinusfunktion** heißen **Winkelfunktionen**. Sie sind für alle Winkel von 0° bis 360° definiert. Ihre y-Werte reichen von −1 bis +1.

Bemerkung Für Zeichnungen von Sinusfunktion und Kosinusfunktion im Koordinatensystem wählt man die Einheiten auf den Koordinatenachsen so, dass das Intervall [0°; 60°] auf der α-Achse ebenso lang ist wie die Einheit auf der y-Achse.

Beispiel **a)** Die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion werden mit der Einheit 2 cm auf der y-Achse gezeichnet. Das Intervall [0°; 360°] wird mit der Einheit 12 cm auf der α-Achse gezeichnet. Eine gute Zeichnung entsteht mithilfe der Werte von Sinus und Kosinus für 0°; 30°; 45°; 60°; 90°; usw.

Dabei werden die Näherungen $\sin 45° \approx 0{,}71$ und $\sin 60° \approx 0{,}87$ usw. benutzt.

Am Graph ist zu erkennen, dass im Intervall [0°; 360°] zu jedem Sinuswert genau zwei Winkel α gehören.

Die entsprechende Gleichung $\sin \alpha = b$ hat also zwei Lösungen.

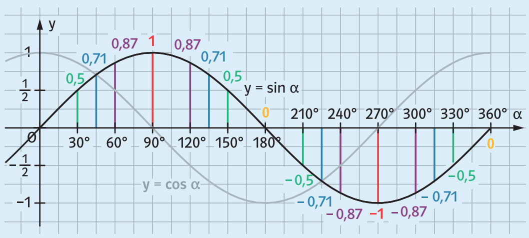
Dasselbe gilt für die Kosinusfunktion.

Ausnahme: $\sin \alpha = 0$ hat im Intervall [0°; 360°] drei Lösungen 0°; 180° und 360°,

$\sin \alpha = 1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 90° als Lösung,

$\sin \alpha = -1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 270° als Lösung,

$\cos \alpha = -1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 180° als Lösung.



Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Beispiel

b) $\sin\alpha = 0{,}8$
Wie groß ist der Winkel α?
Der Taschenrechner liefert die erste Lösung
$\alpha_1 \approx 53{,}1°$.
Aus $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
ergibt sich die 2. Lösung $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$
$\approx 126{,}9°$

c) $\cos\alpha = 0{,}8$
Wie groß ist der Winkel α?
Der Taschenrechner liefert die erste Lösung
$\alpha_1 \approx 36{,}9°$.
Aus $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
ergibt sich die 2. Lösung $\alpha_2 = 360° - \alpha_1$
$\approx 323{,}1°$

○ **1** Zeichnen Sie die Sinuskurve und die Kosinuskurve in ein Koordinatensystem mit der Einheit
a) 3 cm, b) 1 cm.

○ **2** Zeichnen Sie das Kurvenstück mit der angegebenen Einheit. Berechnen Sie dazu die y-Werte in Schritten von 15°.
a) $y = \sin\alpha$; $0° \leqq \alpha \leqq 90°$; Einheit 5 cm
b) $y = \sin\alpha$; $0° \leqq \alpha \leqq 120°$; Einheit 10 cm

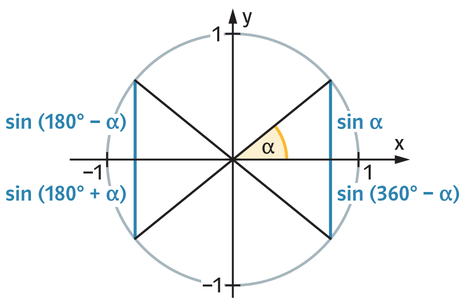
○ **3** Zwei Kurven, ein Koordinatensystem
a) Zeichnen Sie die Sinuskurve und die Kosinuskurve im selben Koordinatensystem mit der Einheit 2 cm.
b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, für welche Winkel $\sin\alpha = \cos\alpha$ und für welche Winkel $\sin\alpha = -\cos\alpha$ gilt.

○ **4** Zeichnen Sie zwei Sinuskurven in ein Koordinatensystem mit denselben Koordinatenachsen
- die Sinuskurve mit der Einheit 1 cm.
- die linke Hälfte der Sinuskurve mit der Einheit 2 cm.

Beschreiben Sie ihre Beobachtungen.

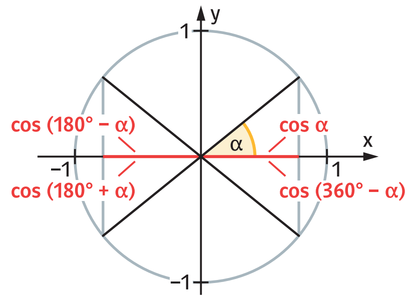
Berechnet man aus $\sin\alpha = 0{,}5$ den Wert von α mit dem Taschenrechner, muss man erst den Taschenrechner auf Grad einstellen.
$\alpha = \sin^{-1}(0{,}5) = 30°$.
$\sin^{-1}$ ist die Umkehrung von sin. Verschiedene Taschenrechner nutzen unterschiedliche Tastenkombinationen.

◒ **5** Geben Sie den zweiten Winkel α_2 an.



a) $\sin\alpha_2 = \sin 50°$ b) $\sin\alpha_2 = \sin 77°$
c) $\sin\alpha_2 = \sin 150°$ d) $\sin\alpha_2 = \sin 200°$
e) $\sin\alpha_2 = \sin 300°$ f) $\sin\alpha_2 = \sin 275°$
g) $\sin\alpha_2 = \sin 111°$ h) $\sin\alpha_2 = \sin 1°$

◒ **6** Geben Sie den zweiten Winkel α_2 an.



a) $\cos\alpha_2 = \cos 35°$ b) $\cos\alpha_2 = \cos 62°$
c) $\cos\alpha_2 = \cos 140°$ d) $\cos\alpha_2 = \cos 179°$
e) $\cos\alpha_2 = \cos 300°$ f) $\cos\alpha_2 = \cos 350°$

◒ **7** Je zwei der angegebenen Winkel haben denselben Wert der Sinusfunktion. Nennen Sie die zusammengehörigen Winkel. (Wer viel Zeit hat, benutzt hier den Taschenrechner.) Was fällt Ihnen auf?

50° 160° 250° 100° 20° 310° 190°
200° 230° 130° 340° 80° 350° 290°

◒ **8** Lösen Sie die Aufgabe mithilfe des Taschenrechners; geben Sie auch die zweite Lösung an.
a) $\sin\alpha = 0{,}2$ b) $\cos\alpha = 0{,}3$
c) $\sin\alpha = 0{,}9$ d) $\cos\alpha = 0{,}7$
e) $\cos\alpha = -0{,}8$ f) $\cos\alpha = -0{,}25$

◒ **9** Ermitteln Sie aus den Graphen im Beispiel auf Seite 298 die Intervalle für α, in denen
a) die Sinuskurve fällt.
b) die Kosinuskurve steigt.
c) die Sinus- und auch die Kosinuskurve steigen.
d) die Sinuskurve fällt und die Kosinuskurve steigt.

?! 1–9 1–4, 9

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

10 Je zwei dieser Winkel haben denselben Wert der Kosinusfunktion. Nennen Sie zusammengehörige Winkel. Was fällt Ihnen auf?

220° 200° 60° 250° 10° 140° 160°
350° 190° 300° 210° 110° 150° 170°

Man kann sich die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion auch von einer dynamischen Geometriesoftware zeichnen lassen. Schauen Sie sich dazu auch den Methodenkasten an.

11 Zeichnen Sie die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion jeweils in ein Koordinatensystem. Ermitteln Sie aus dem entsprechenden Graphen die Intervalle, in denen die
a) Sinusfunktion positiv ist und steigt.
b) Sinusfunktion negativ ist und steigt.
c) Kosinusfunktion positiv ist und fällt.
d) Kosinusfunktion negativ ist und steigt.

12 Zeichnen Sie die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion in ein Koordinatensystem. Geben Sie ein Intervall im Bereich [0°; 360°] an
a) in dem die Sinuskurve unterhalb der α-Achse liegt und steigt,
b) in dem die Kosinuskurve oberhalb der Sinuskurve liegt,
c) in dem beide Bedingungen aus den Teilaufgaben a) und b) zugleich erfüllt sind.

zu Aufgabe 13: Nutzen Sie eine Zeichnung als Hilfe

13 Für welche Winkel haben die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion
a) denselben Wert?
b) den gleichen Wert, verschiedene Vorzeichen?
c) In welchen Bereichen sind die Werte der Sinusfunktion größer als die der Kosinusfunktion?
d) Wo sind die Werte der Sinusfunktion kleiner als die der Kosinusfunktion?

14 Bestimmen Sie jeweils die Winkel α_1 und α_2. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

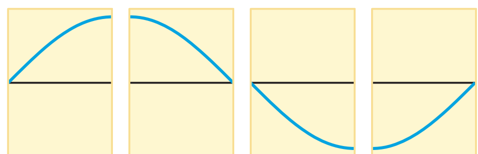
a)

$\sin\alpha$	α_1	α_2
– 0,1	■	■
– 0,86	■	■
– 0,66	■	■
– 0,19	■	■
– 0,95	■	■

b)

$\cos\alpha$	α_1	α_2
– 0,33	■	■
– 0,88	■	■
– 0,45	■	■
– 0,72	■	■
– 0,06	■	■

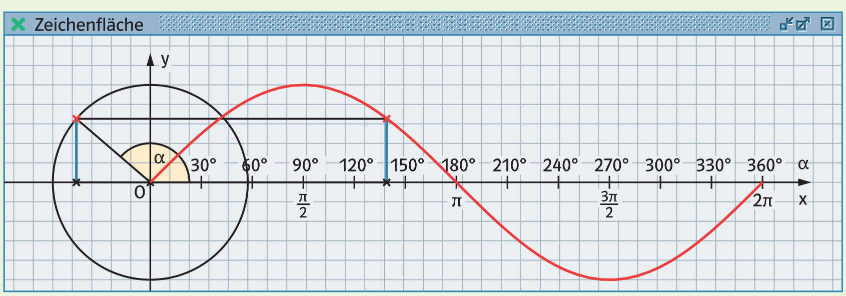
15 Zeichnen Sie die Sinuskurve mit der Einheit 2 cm auf einen 12 cm langen und 6 cm hohen Papierstreifen. Zerschneiden Sie die Kurve in gleich hohe Rechtecke und setzen Sie aus den Kurvenstücken neue Kurven zusammen (Drehung um 180° erlaubt). Wie viele Kurven ohne Knick finden Sie? Wie viele, wenn Knicke erlaubt sind?



Methode

Dynamische Geometriesoftware (DGS) und Sinusfunktion

Untersuchen Sie mit einer DGS, wie sich die Koordinaten des Punkts P auf dem Einheitskreis mit dem Winkel ändern. Wie verhält sich der Graph der Funktion an dieser Stelle?



10 – 15 10 11 – 15

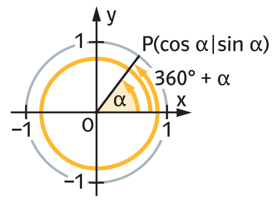
Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

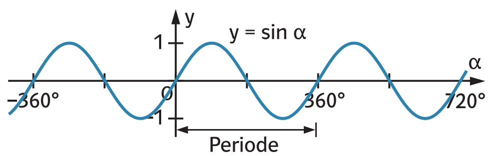
3 Eigenschaften der Sinusfunktion

Das London Eye ist mit 135,36 m Höhe das höchste Riesenrad Europas. Es hat 32 fast vollständig aus Glas geformte Kapseln und dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 0,936 km/h. Für eine komplette Umdrehung benötigt das London Eye 30 Minuten.

→ Welcher Drehwinkel gehört zu folgenden Zeiten: 7,5 min; 15 min; 20 min; 45 min; 1,5 h?

Zur Beschreibung von Drehungen sind oft auch Winkel nötig, die über 360° hinausgehen. Drehbewegungen im negativen Drehsinn werden durch negative Winkel angegeben.
Nach Drehungen um + 360° bzw. − 360° wiederholen sich die Koordinaten des auf dem Einheitskreis umlaufenden Punkts P (cos α | sin α).
Entsprechend werden die Kosinus- und die Sinuskurve durch Verschiebung um Vielfache von 360° nach links und rechts beliebig weit fortgesetzt.
Dabei entstehen **periodische Kurven**. Für alle Winkel α und alle natürlichen Zahlen n gilt dann:





$\cos(\alpha \pm n \cdot 360°) = \cos\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(\alpha \pm n \cdot 360°) = \sin\alpha$

Merke

Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion sind auch für Winkel über 360° und negative Winkel definiert. Ihre Werte wiederholen sich jeweils nach 360°. Sie heißen daher **periodische Funktionen**. Die **Periode** beträgt 360°.

Bemerkung

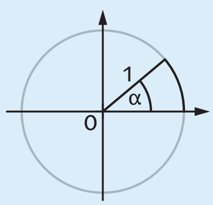
Bogenmaß

$u = 2\pi r$

für $r = 1$ gilt $u = 2\pi$

Statt dem Winkel α kann man auch die Bogenlänge als Anteil von 2π angeben.

$b = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$

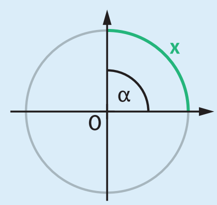


für $\alpha = 90°$ gilt

$x = 2\pi \cdot \frac{90°}{360°}$

$x = \frac{\pi}{2}$

Beim Taschenrechner muss die Anzeige auf RAD (für „Radius") umgestellt werden!



Beispiel

a) $\sin(-60°) = \sin(-60° + 360°) = \sin 300° \approx -0{,}87$

b) Berechnen Sie das Bogenmaß zu $\alpha = 60°$.
$x = 2\pi \cdot \frac{60°}{360°} = \frac{\pi}{3}$

○ **1** Zeichnen Sie die Sinuskurve von − 180° bis 540° mit der Einheit 1 cm.

○ **2** Geben Sie zwei Winkel im Intervall [0°; 360°] an, für die die Sinusfunktion denselben Wert hat wie
a) sin 450° b) sin (− 321°).

○ **3** Vervollständigen Sie die Tabelle zur Berechnung des Bogenmaßes x zum Winkel α.

α	30°	45°	75°	150°	180°
x	■	■	■	■	■

?! 2, 3 1

Quellen: iStockphoto (mkos83), Calgary, Alberta; aus 3-12-742721-2 S.259
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

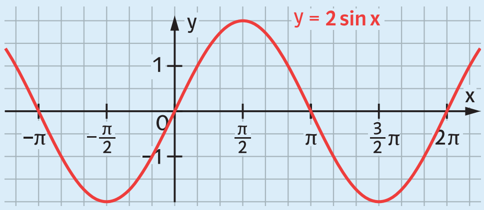
Hier wird das Bogenmaß benutzt!

Der Graph der Funktion **$y = a \cdot \sin(x)$** ist eine in y-Richtung gestreckte oder gestauchte Sinuskurve.
Der Faktor a gibt diese Änderung an. Den maximalen Abstand der Kurve zur x-Achse nennt man **Amplitude**. Je größer a ist, desto größer ist die Amplitude. Je kleiner a ist, desto kleiner ist die Amplitude.
Die Periode (2π) bleibt erhalten.

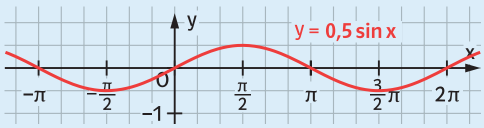
Der Graph der Funktion **$y = \sin(b \cdot x)$** ist eine in x-Richtung gestreckte oder gestauchte Sinuskurve.
Der Faktor b gibt diese Änderung der **Periodenlänge** an. Je größer b ist, desto kleiner ist die Periodenlänge. Je kleiner b ist, desto größer ist die Periodenlänge.
Die Amplitude ($-1 \leqq y \leqq 1$) bleibt erhalten.

Beispiel

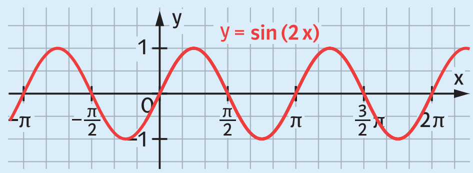
a) Für $a = 2$ erhält man $y = 2 \cdot \sin(x)$.



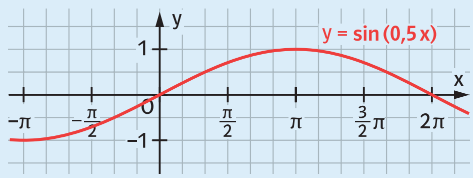
Für $a = 0{,}5$ erhält man $y = 0{,}5 \cdot \sin(x)$.



b) Für $b = 2$ erhält man $y = \sin(2x)$.



Für $b = 0{,}5$ erhält man $y = \sin(0{,}5\,x)$.



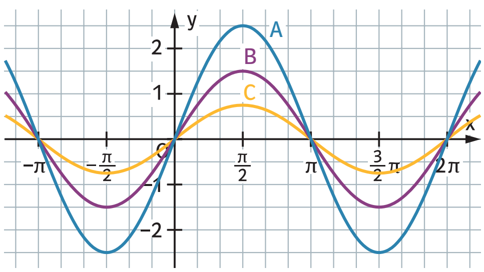
Bemerkung

Wird bei einer Sinuskurve die Amplitude und die Periodenlänge geändert, so erhält man die Funktion der Gleichung **$y = a \cdot \sin(b\,x)$**.

○ **4** Änderung der Amplitude

a) Geben Sie die Amplitude für $a = 1{,}5$ an.

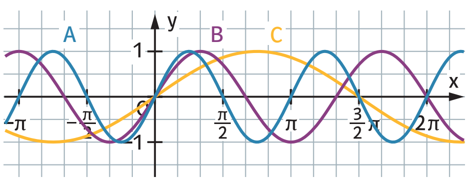
b) Geben Sie die Funktionsgleichungen an.



○ **5** Änderung der Periodenlänge

a) Geben Sie die Periodenlänge für $b = 1{,}5$ an.

b) Geben Sie die Funktionsgleichungen an.

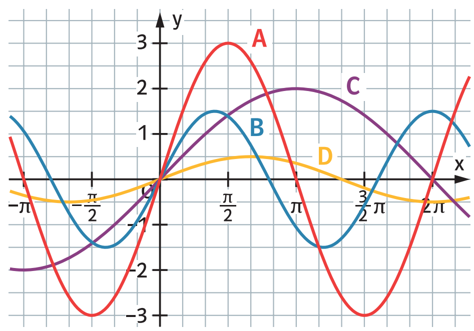


◒ **6** Änderung von Amplitude und Periodenlänge.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für $a = 2$ und $b = 0{,}8$ im Vergleich zum Graphen der Funktion $y = \sin(x)$.

b) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für $a = 0{,}2$ und $b = 1{,}5$ im Vergleich zum Graphen der Funktion $y = \sin(x)$.

c) Geben Sie die Funktionsgleichungen für die Graphen an.



?! 4, 5   6

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

4 Exponentielles Wachstum

Weltweit beobachtet man besorgt die Zunahme resistenter Schädlingsarten. DDT steht für Dichlordiphenyltrichlorethan. Es ist ein Insektenvernichtungsmittel, das heute in Deutschland verboten ist. Kurz nach dem ersten Einsatz von DDT im Jahr 1945 zählte man nur sieben resistente Arten. Seit damals wächst die Anzahl der resistenten Arten jährlich um rund 15 %.

→ Stellen Sie die Entwicklung für den Zeitraum 1945 bis 1960 tabellarisch dar.
→ Erstellen Sie eine entsprechende Grafik.
→ Können Sie eine allgemeingültige Formel herleiten? Welche Tendenz zeigt sich daraus für die weitere Entwicklung?

Es ist mühsam, bei einer Hochrechnung jeden Zwischenwert einzeln zu errechnen. Wenn die Werte **in gleichen Zeitabschnitten** um den gleichen Prozentsatz – also **mit gleicher Wachstumsrate** – wachsen, kann man eine Formel aufstellen, mit der man die Werte für jeden beliebigen Zeitabstand berechnet. So beträgt die erwartete Bevölkerung einer Stadt mit 10 000 Einwohnerinnen und Einwohnern bei einer jährlichen Wachstumsrate von 3 %

… nach einem Jahr	$10\,000 \cdot 1{,}03 = 10\,300$	Einwohner.
… nach 2 Jahren	$10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 10\,000 \cdot 1{,}03^2 = 10\,609$	Einwohner.
… nach n Jahren	$10\,000 \cdot 1{,}03^n$	Einwohner.

Merke

Wächst eine Größe in gleich großen Abschnitten um den gleichen Prozentsatz p %, wird sie also immer mit dem gleichen Faktor vervielfacht, so liegt ein **exponentielles Wachstum** vor.
Die Größe wächst dann in n Abschnitten auf das q^n-Fache des Anfangswerts G_0.
Dabei ist q der **Wachstumsfaktor** mit $q = 1 + p\,\%$.

$$G_n = G_0 \cdot q^n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Die Zeit, in der sich bei einem exponentiellen Wachstum die Ausgangsgröße verdoppelt, heißt **Generationszeit T_2** mit **$q = 1 + 100\,\% = 2$.**

Bemerkung

Das Wachstum heißt **exponentiell**, weil die Variable, die bei gegebener Ausgangsgröße das Wachstum bestimmt, im **Exponenten** steht.

Beispiel

Wird Geld länger als ein Jahr angelegt, dann werden auch die Zinsen verzinst. Die zusätzlich entstandenen Zinsen bezeichnet man als **Zinseszinsen**.
$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit dem Startkapitel K_0, dem Wachstumsfaktor q und der Anzahl von Jahren n.

a) Ein Vermögen von 1000 € wird für 4 Jahre zu 2,2 % angelegt. Wie groß ist es nach 4 Jahren?

Zeit (Jahre)	Kapital (€)	Kapital neu (€)
0	1000	= 1000
1	1000 · 1,022	= 1022
2	1022 · 1,022	= 1044,48
3	1044,48 · 1,022	= 1067,46
4	1067,46 · 1,022	= 1090,95

Nach vier Jahren beträgt das Vermögen 1090,95 €.

b) Eine Bakterienkultur hat eine Generationszeit von 2 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung sind 250 Bakterien vorhanden. Wie viele Bakterien sind es nach 8 Stunden?

Zeit (h)	Rechnung	Bakterienzahl
0	$250 \cdot 2^0$	250
2	$250 \cdot 2^1$	500
4	$250 \cdot 2^2$	1000
6	$250 \cdot 2^3$	2000
8	$250 \cdot 2^4$	4000

Nach acht Stunden sind es 4000 Bakterien.

Quellen: Fotosearch Stock Photography (Digital Vision), Waukesha, WI; aus 3-12-742711-0 S.301

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Ein Anfangskapital beträgt 2000 €.
Bestimmen Sie jeweils den jährlichen Wachstumsfaktor und berechnen Sie den Endwert.

	jährliche Wachstumsrate	Zahl der Jahre
a)	2,2 %	4
b)	2,16 %	8
c)	1,12 %	12
d)	1,17 %	21

◒ **2** Ein Kapital von 7200 € wird zu 2,3 % für 10 Jahre festgelegt.
a) Bestimmen Sie die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor und berechnen Sie das Endkapital.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Kapitalentwicklung für die gesamte Laufzeit.
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital etwa verdoppelt?
d) Nach einer Näherungsformel gilt, dass sich ein Kapital, das man zu p % verzinst, nach $\frac{72}{p}$ Jahren verdoppelt. Prüfen Sie dies mit 3 %; 8 %; 7 % und 10 % nach.

◒ **3** Eine Algenkultur wächst pro Tag um 30 %. Zu Beginn der Beobachtung waren 200 g Algen vorhanden.
a) Bestimmen Sie die Algenmasse für die nächsten fünf Tage.
b) Bestimmen Sie die Algenmasse für die vier Tage, bevor 200 g erreicht wurden.
c) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.
d) In der Versuchsanordnung ist nur für 1200 g Algen Platz. Nach wie vielen Tagen ist das exponentielle Wachstum beendet?

◒ **4** Gegeben sind folgende Funktionen:
$y_1 = 2x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = 2^x$.
a) Stellen Sie zu jeder Funktion eine Wertetabelle für das Intervall [−5; 5] auf.
b) Zeichnen Sie die drei zugehörigen Graphen für diesen Bereich in ein Koordinatensystem.
c) Naomi vergleicht die drei Graphen miteinander. Sie fragt sich: „In welchem Intervall ist der Graph der Funktion y_1 steiler als die beiden anderen Graphen? Wo ist y_2 am steilsten, wo y_3?“ Was meinen Sie?

◒ **5** Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung (DSW) veröffentlichte Ende 2014 folgende Daten zur Entwicklung der Weltbevölkerung.

Gebiet	Bevölkerung (2014 in Mio.)	jährlicher Zuwachs in %
Welt	7238	1,2
Afrika	1136	2,5
Asien	4351	1,1
Ozeanien	39	1,1
Südamerika	410	1,1
Nordamerika	353	0,4

a) Berechnen Sie nach dieser Tabelle die Bevölkerungszahlen für das Jahr 2050.
b) Wie können Sie die Bevölkerung von Europa im Jahr 2014 und im Jahr 2015 berechnen?
c) Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der einzelnen Gebiete an der Weltbevölkerung für 2014 und 2050. Zeichnen Sie dazu ein Kreisdiagramm.

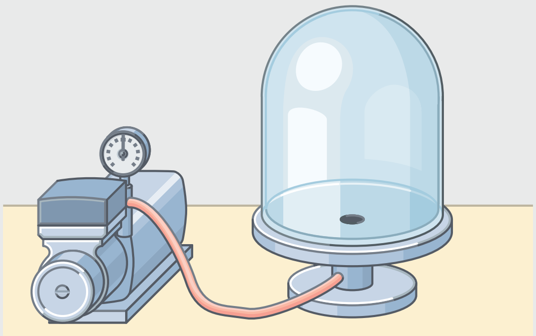
● **6** Der Wald von Herrn Huber hat einen Holzbestand von 45 000 m². Ohne störende Umwelteinflüsse wie z. B. Schädlingsbefall nimmt der Holzbestand pro Jahr um 3,7% annähernd exponentiell zu.
a) Auf wie viel m³ wächst der Holzbestand nach vier Jahren (nach 8; 12; 16; 20 Jahren)?
b) Durch einen Schädlingsbefall sinkt das Wachstum auf 2,8 % jährlich. Auf wie viel m³ wächst der Holzbestand nun nach vier Jahren (nach 8; 12; 16; 20 Jahren)?
c) Nach 8 Jahren hat sich der Wald vom Schädlingsbefall weitgehend erholt. Wie viel m³ Holzbestand hat der Wald nach weiteren vier (nach 8; 12) Jahren?

?! 1–4, 6   💬 4   ◺ 2–5   ⚙

Quellen: Fotolia.com (Grigory Bruev), New York; aus 3-12-742711-0 S.302

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

5 Exponentielle Abnahme



Aus einem Behälter werden mit einer Vakuumpumpe pro Sekunde 5 % der vorhandenen Luft abgepumpt.

→ Wie viel Prozent Luft sind nach einer Sekunde noch im Behälter enthalten?

→ Wie viel Prozent Luft sind es nach 2; 3; 4 oder 10 Sekunden?

→ Warum hat man nach 20 Sekunden immer noch kein Vakuum im Behälter erreicht?

Zahlreiche Vorgänge wie z. B. radioaktiver Zerfall verlaufen so, dass ein Anfangswert in gleichen Zeitabschnitten um einen gleich bleibenden Prozentsatz, die **Wachstumsrate**, abnimmt.

Merke

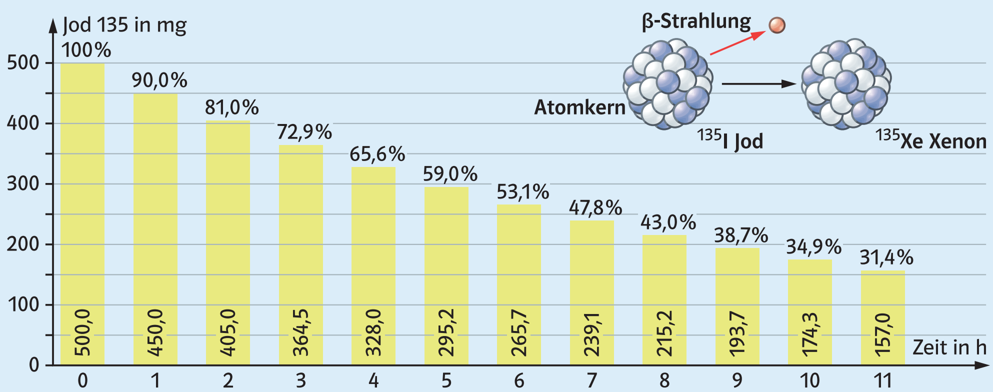
Wenn eine Größe in gleich großen Abschnitten um den gleichen Prozentsatz p % abnimmt, d. h. immer mit dem gleichen Faktor $(0 < q < 1)$ vervielfacht wird, liegt eine **exponentielle Abnahme** vor.
Die Größe nimmt dann in n Abschnitten auf das q^n-Fache des Anfangswerts G_0 ab.
Dabei ist q der **Wachstumsfaktor** mit $q = 1 - p\,\%$.

$$\mathbf{G_n = G_0 \cdot q^n = G_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n}$$

Die Zeit, in der sich bei exponentieller Abnahme die Ausgangsgröße halbiert, nennt man die **Halbwertzeit $T_{\frac{1}{2}}$**.
Der Wachstumsfaktor für diese Zeitspanne ist $\mathbf{q = 1 - 50\,\% = 0{,}5}$.

Beispiel

Bei radioaktiven Stoffen zerfällt pro Zeiteinheit immer derselbe Prozentsatz der noch vorhandenen radioaktiven Kerne. So zerfallen bei radioaktivem Jod 135 zum Beispiel pro Stunde 10 % der noch vorhandenen radioaktiven Kerne und wandeln sich in Xenon 135 und β-Strahlung um. Zu Beginn sind 500 mg radioaktives Jod 135 vorhanden. Wie viel mg sind es nach 11 Stunden?



$G_{11} = 500 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{11} = 500 \cdot 0{,}9^{11} \approx 156{,}9$

Nach 11 Stunden sind noch ca. 157 mg radioaktives Jod 135 vorhanden.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Seit ein paar Jahren sterben mehr Menschen in Deutschland als Menschen geboren werden. Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung (DSW) hat dazu 2014 veröffentlicht: Die natürliche Wachstumsrate beträgt −0,2 % bei einer Bevölkerung von etwa 81 Mio. Menschen in Deutschland. Berechnen Sie die zu erwartenden Bevölkerungszahlen für die Jahre 2020, 2030 und 2050.

◒ **2** Bei radioaktivem Wismut 210 beträgt die Halbwertszeit fünf Tage. Es wandelt sich unter Abgabe radioaktiver Strahlung allmählich in Polonium 210 um.

a) Stellen Sie eine Wertetabelle für 5; 10; 15; 20; 25 und 30 Tage auf und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.

b) Wie viel Wismut ist von 10 g nach zwölf Tagen noch vorhanden?

◒ **3** Ein Labor soll nach einem Störfall mit einem Mittel desinfiziert werden, dessen Konzentration im Raum jede halbe Stunde um 10 % abnimmt.

a) Nach welcher Zeit ist nur noch die Hälfte der Anfangskonzentration vorhanden?

b) Fällt die Konzentration unter 0,1 % der Anfangskonzentration, darf das Labor gefahrlos betreten werden. Nach wie vielen Stunden ist das möglich?

◒ **4** Erfahrungswerte haben gezeigt, dass ein neues Auto beginnend mit dem Kaufdatum jedes Jahr ungefähr 25 % seines Werts verliert. Frau Huang hat ein Auto gekauft, das ein Jahr nach dem Kauf noch einen Restwert von 15 000 € hat.

a) Wie viel Euro hat Frau Huang für das Auto bezahlt?

b) Wie viel Euro ist das Auto zwei, vier und fünf Jahre nach dem Kauf noch Wert?

c) Berechnen Sie die Halbwertszeit.

d) Zeichnen Sie den Graphen für den Wert des Autos in Abhängigkeit der Jahre. Überprüfen Sie nun Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben a), b) und c) anhand des Graphen.

● **5** Die Lichtintensität nimmt in klarem Wasser um ca. 11 % pro Meter ab.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Abnahme der Lichtintensität im Wasser auf.

b) Auf wie viel Prozent des Ausgangswerts ist die Lichtintensität in 10 m Tiefe gesunken?

c) Zeichnen Sie den Graphen und lesen Sie ab, in welcher Tiefe nur noch die Hälfte (ein Viertel) der Lichtintensität vorhanden ist.

d) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität 80 %, 60 % oder 10 % des Ausgangswerts? Lesen Sie die Werte aus Ihrer Zeichnung ab.

● **6** Auf der Erdoberfläche lastet die gesamte Luftschicht und verursacht den atmosphärischen Druck. Er wird in Hektopascal (hPa) angegeben und beträgt in Meereshöhe etwa 1013 hPa. Je höher man steigt, desto „dünner" wird die Luft, da die darüber liegende Luftschicht geringer wird. Der Luftdruck nimmt um 1,23 % pro 100 m Höhenunterschied ab.

a) Auf wie viel Prozent ist der Luftdruck in 1000 m Höhe ungefähr gesunken?

b) Wie ändert sich der Luftdruck, wenn man aus einer Höhe von 500 m bei beständigem Wetter auf die Zugspitze (2962 m) steigt?

c) Berechnen Sie den Luftdruck auf dem Kilimandscharo (5895 m) und dem Mount Everest (8850 m) bezogen auf 1013 hPa.

d) Der Luftdruckmesser (Barometer) zeigt auf der Spitze eines Bergs, dass hier nur 78 % des Luftdrucks auf Meereshöhe vorhanden sind. Wie hoch ist der Berg etwa?

e) Zeichnen Sie einen Graphen für den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe.

?! 1–6   2, 4–6

Quellen: Stockphoto (Oversnap), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.304

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Exponentialfunktion

In einem Labor wird die Entwicklung von Bakterien bei unterschiedlichen Temperaturen beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung haben alle Proben 320 Bakterien.
Probe A verdoppelt sich jede Stunde.
Probe B verdreifacht sich jede Stunde.
Probe C nimmt um die Hälfte pro Stunde zu.
Probe D halbiert sich jede Stunde.

→ Erstellen Sie für alle Proben eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen.
→ Erweitern Sie die Tabelle und die Graphen bis zu drei Stunden vor Beobachtungsbeginn (bei gleichen Bedingungen).
→ Beschreiben Sie die Eigenschaften der vier Graphen.

Wächst ein Ausgangswert G_0 in gleich großen Abschnitten immer um den gleichen Wachstumsfaktor q, so erhält man nach x Abschnitten den Endwert $y = G_0 \cdot q^x$.
Jedes prozentuale Wachstum lässt sich als Funktion mit der allgemeinen Form $y = c \cdot a^x$ mit $c \neq 0$ und $a > 0$ darstellen, zum Beispiel $y = 320 \cdot 2^x$.

Merke

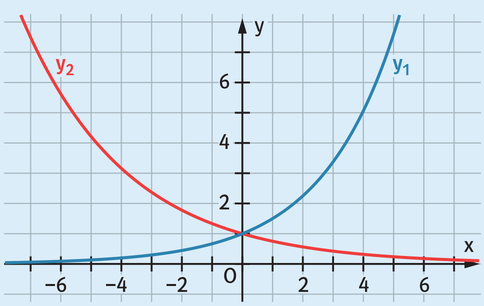
Die Funktion $\mathbf{y = a^x}$ mit gegebener Zahl $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Der Graph der Exponentialfunktion verläuft immer oberhalb der x-Achse.
Ist $a > 1$, so steigt der Graph.
Ist $0 < a < 1$, so fällt der Graph.
Wird die Exponentialfunktion mit einem Faktor $c \neq 0$ multipliziert, hat also die Funktionsgleichung die allgemeine Form $\mathbf{y = c \cdot a^x}$, so heißt sie **erweiterte Exponentialfunktion**. Dann ist c der Funktionswert an der Stelle $x = 0$.

Beispiel

a) $y_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ $\qquad$ $y_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

x	−7	−5	−3	0	1	3	5	7
y_1	0,06	0,13	0,3	1	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	3,38	7,59	17,9

x	−7	−5	−3	0	1	3	5	7
y_2	7,49	4,21	2,37	1	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	0,42	0,24	0,13

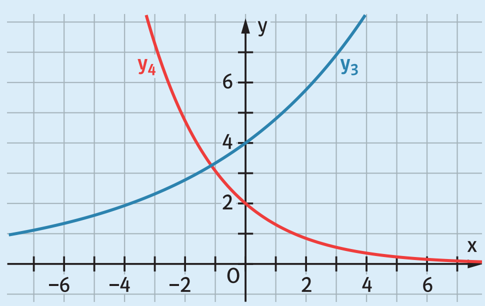


Ist der Faktor $c = 1$, so ist a der y-Wert zu $x = 1$. Dies lässt sich am Graphen ablesen.

b) $y_3 = 4 \cdot 1{,}2^x$ $\qquad$ $y_4 = 2 \cdot 0{,}65^x$

x	−7	−5	−3	0	3	5	7
y_3	1,12	1,61	2,31	4	6,91	9,95	14,3

x	−7	−5	−3	0	3	5	7
y_4	40,8	17,2	7,28	2	0,55	0,23	0,10



Der Faktor c ist der y-Achsenabschnitt des Graphs.

Quellen: Fotolia.com (Angellodeco), New York; aus 3-12-742711-0 S.305
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

1 Stellen Sie zu den Funktionen $y_1 = 3^x$ und $y_2 = 0{,}5^x$ jeweils eine Wertetabelle für das Intervall $[-5;\ 5]$ auf. Zeichnen Sie die Graphen in unterschiedlichen Farben in ein Koordinatensystem.

2 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y_1 = 1{,}5^x$ und $y_2 = 0{,}4^x$. Lesen Sie an den Graphen näherungsweise folgende Werte ab. $1{,}5^{3,2}$; $1{,}5^{4,5}$; $1{,}5^{-1,7}$; $0{,}4^{-1,7}$; $0{,}4^{-0,3}$; $0{,}4^{1,5}$

3 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

$y_1 = \left(\frac{8}{5}\right)^x$ und $y_2 = \left(\frac{5}{8}\right)^x$,

$y_3 = 4^x$ und $y_4 = 0{,}25^x$.

Was stellen Sie fest?
Können Sie mithilfe Ihrer Beobachtungen eine allgemeingültige Regel formulieren?

4 Welche Wertetabelle stellt ein lineares, welche ein exponentielles Wachstum dar? Geben Sie in diesen Fällen jeweils die Funktionsgleichungen an.

x	−1	0	1	2	3
y_1	−2	1	4	7	10

x	−1	0	1	2	3
y_2	0,1	1	10	100	1000

x	−1	0	1	2	3
y_3	3	2	1	0	−1

x	−1	0	1	2	3
y_4	0,4	1	2,5	6,25	15,625

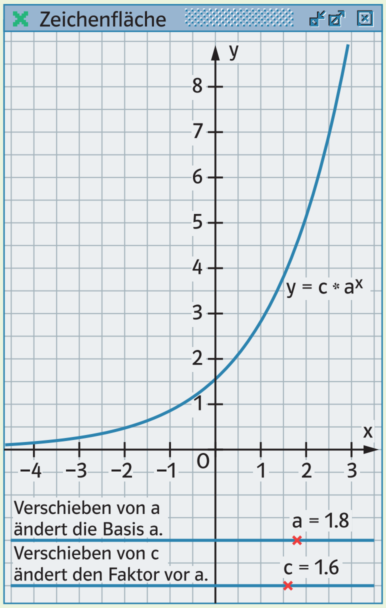
5 Gegeben sind $y_1 = 1{,}4^x$ und $y_2 = 0{,}75^x$.
a) Welcher der zugehörigen Graphen steigt, welcher fällt? Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Intervall $[-5;\ 5]$.
c) Lesen Sie die x-Werte zu $y_1 = 1{,}5$; $y_1 = 3{,}7$; $y_2 = 2{,}5$ und $y_2 = 3{,}8$ am Graphen ab.

Methode

Exponentialfunktion und dynamische Geometriesoftware (DGS)

Mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) können Sie ausprobieren, welche Auswirkung auf den Graphen der Funktion $y = c \cdot a^x$ eine Veränderung der Variablen a oder c hat. Sie können einen Gleiter erzeugen, mit dem Sie die Werte der Basis a kontinuierlich verändern. Mit einem zweiten Gleiter können Sie auch den Faktor c verändern.

- Setzen Sie c auf 1. Bewegen Sie a zwischen 0,5 und 2,5. Beschreiben Sie die Eigenschaften der Graphen und formulieren Sie einen Merksatz.
- Setzen Sie a auf 2. Bewegen Sie nun c zwischen 0,5 und 1,5. Welche Veränderung stellen Sie fest? Formulieren Sie eine allgemeingültige Regel.
- Lassen Sie von folgenden Funktionen die Graphen zeichnen: $y_1 = 2^x$; $y_2 = 2^x + 3$; $y_3 = 2^x - 3$.
  Was bewirken die Summanden 3 bzw. −3? Formulieren Sie eine allgemeingültige Regel.
- Lassen Sie von folgenden Funktionen die Graphen zeichnen: $y_1 = 0{,}8^x$; $y_2 = 0{,}8^{-x}$.
  Was stellen Sie fest?
- Was passiert mit dem Graphen $y = c \cdot a^x$, wenn $c < 0$ ist?

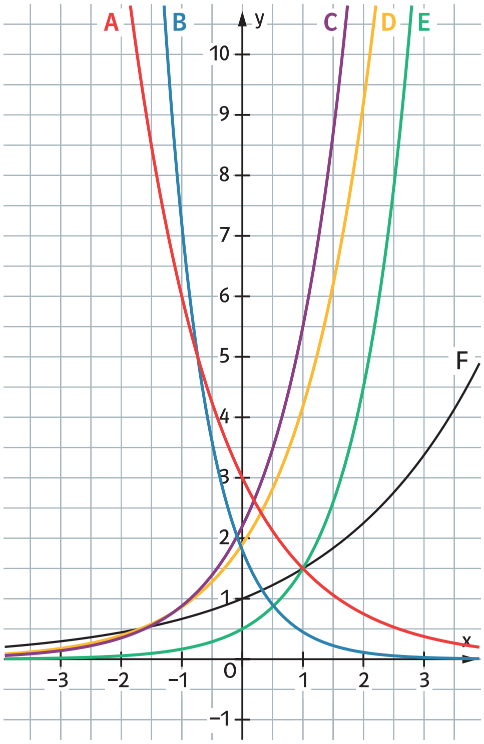


?! 1–5   3, 5   1–3, 5

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Unten sehen Sie die Graphen von sechs Exponentialfunktionen der Form $y = c \cdot a^x$. Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Wahl.



$y_1 = 0{,}5 \cdot 3^x$ $\qquad y_2 = 3 \cdot 0{,}5^x$

$y_3 = 1{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $\qquad y_4 = 2{,}2 \cdot 2{,}5^x$

$y_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ $\qquad y_6 = 1{,}9 \cdot 2{,}2^x$

$y_7 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ $\qquad y_8 = 1{,}5^x$

Setzen Sie die Funktionswerte in die allgemeine Form $y = c \cdot a^x$ ein.

7 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft.
Beispiel: $P_1(0\,|\,1{,}5)$ und $P_2(1{,}5\,|\,7{,}5)$
P_1: $1{,}5 = c \cdot a^0$ also $c = 1{,}5$
P_2: $7{,}5 = 1{,}5 \cdot a^{1{,}5}$ also $a \approx 2{,}92$
Die Funktionsgleichung lautet
$y = 1{,}5 \cdot 2{,}92^x$.

a) $P_1(0\,|\,4)$ und $P_2(1\,|\,5)$
b) $P_1(0\,|\,2)$ und $P_2(2\,|\,0{,}5)$
c) $P_1(1\,|\,18)$ und $P_2(4\,|\,31{,}104)$
d) $P_1(2\,|\,16)$ und $P_2(4\,|\,0{,}4096)$
e) Warum ist eine Exponentialfunktion durch zwei Punkte eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Behauptung.

8 In einer Petrischale befindet sich eine Bakterienkultur. Ihr Wachstum wird durch die Funktion $y = 2 \cdot 1{,}25^x$ (x: Dauer in Stunden, y: Fläche in cm^2) dargestellt.
a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
b) Wie groß war die Fläche der Kultur zu Beginn der Messung?
c) Welcher Zeitpunkt ist gemeint, wenn $x = -0{,}5$ ist?


9 Bei einem Laborversuch wird das Wachstum von zwei Pilzkulturen beobachtet und dokumentiert. Nach x Stunden ist die Fläche y in cm^2 bedeckt.
a) Wie lautet jeweils die Funktionsgleichung?
Pilzkultur A

x	−2	−1	0	0,5	1	2
y	0,16	0,40	1	1,58	2,5	6,25

Pilzkultur B

x	−2	−1	0	0,5	1	2
y	0,06	0,25	1	2	4	16

b) Erklären Sie jeweils die ersten beiden Tabellenspalten.

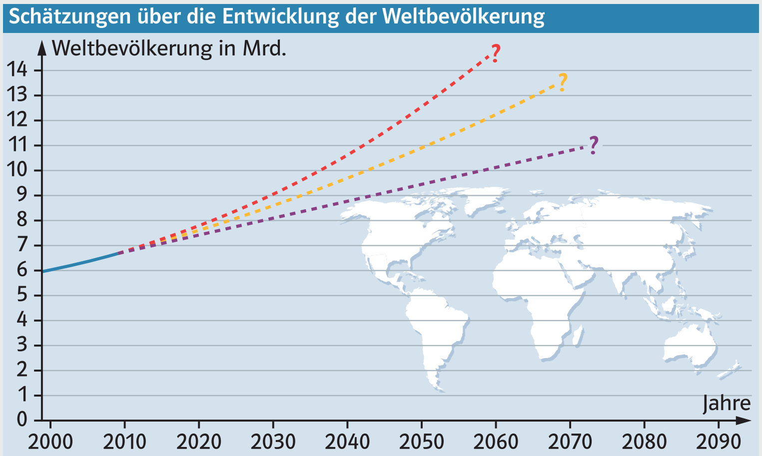
10 Bei radioaktiven Stoffen zerfällt pro Zeiteinheit immer derselbe Prozentsatz der noch vorhandenen radioaktiven Kerne. Bei Jod 123 zerfallen 5 % pro Stunde.
a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für den radioaktiven Zerfall von Jod 123 auf und zeichnen Sie den Graphen.
b) Wie müsste die Gleichung lauten, wenn 50 g Jod 123 zerfallen?

11 Stellen Sie eine Wertetabelle für die Funktionen $y_1 = 2^x$, $y_2 = 2^{x+1}$, $y_3 = 2^{x+2}$ und $y_4 = 2^{x-1}$ auf. Zeichnen Sie die vier Graphen in ein Koordinatensystem. Was fällt Ihnen auf?

6–11   6, 7, 9, 11   8, 10, 11

Quellen: 1; 2 Klett-Archiv (Elke Peter), Stuttgart; aus 3-12-742711-0 S.307
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

7 Logarithmus und Exponentialgleichungen



Die Weltbevölkerung umfasste zu Beginn des Jahres 2009 rund 6,7 Milliarden Menschen. Die Wachstumsrate beträgt derzeit weltweit durchschnittlich 1,2 % jährlich.

→ Wann wurde die Marke von 7 Milliarden erreicht? Berechnen Sie zuerst die Schätzung aus dem Jahr 2009, recherchieren Sie dann den tatsächlichen Zeitpunkt.

→ Wann dürften 8 Milliarden erreicht sein? Schätzen Sie zuerst, prüfen Sie dann.

→ Wird noch in diesem Jahrhundert die Marke von 10 Milliarden erreicht, wenn die Wachstumsrate unverändert bleibt?

Bisher konnten solche Aufgaben nur durch Probieren oder grafisch gelöst werden. Mithilfe des Logarithmus ist eine schnelle und genaue Berechnung möglich. Dabei heißt der gesuchte Exponent x **Logarithmus zur Basis a**. Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 hat den Wert 3, denn $2^3 = 8$.

Merke

Der **Logarithmus von y zur Basis a** (mit $a > 0$; $a \neq 1$; $y > 0$), kurz **$\log_a y$**, ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um y zu erhalten.
Die Gleichung $x = \log_a y$ ist also gleichbedeutend mit $a^x = y$.

Beispiel

Bestimmung des Logarithmus durch Probieren:

a) In der Aufgabe $2^x = 16$ ist die Zahl gesucht, mit der man 2 potenzieren muss, um 16 zu erhalten.
$x = \log_2 16 = 4$
denn $2^4 = 16$

b) $10^x = 10\,000$
$x = \log_{10} 10\,000$
$x = 4$
denn $10^4 = 10\,000$

c) $2^x = 0{,}125$
$x = \log_2 0{,}125$
$x = -3$
denn $2^{-3} = 0{,}125$

Bemerkung

Auf den meisten Taschenrechnern findet sich eine Taste „**log**“. Damit lässt sich der Logarithmus zur Basis 10 berechnen. Der Logarithmus zur Basis 10 heißt auch **Zehnerlogarithmus** oder dekadischer Logarithmus und wird mit **lg** abgekürzt:
$\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$

○ **1** Bestimmen Sie den Logarithmus im Kopf.

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 \frac{1}{4}$ c) $\log_9 81$
d) $\log_3 1$ e) $\log_5 25$ f) $\log_7 7^5$
g) $\log_4 \frac{1}{64}$ h) $\lg 1000$ i) $\lg 0{,}0001$

○ **2** Bestimmen Sie den Logarithmus im Kopf.

a) $\log_4 128$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$
c) $\log_6 \frac{1}{6}$ d) $\log_4 16^3$
e) $\lg 10\,000\,000$ f) $\lg 0{,}01$

○ **3** Bestimmen Sie den Logarithmus mit dem Taschenrechner.

a) $\lg 157$ b) $\lg 25{,}7$
c) $\lg 0{,}038$ d) $\lg \frac{1}{2}$

◒ **4** Bestimmen Sie den Logarithmus.

a) $\log_3 3^x$ b) $\log_b \sqrt{b}$
c) $\log_5 \sqrt{5^k}$ d) $\log_a \sqrt[n]{a^m}$
e) $\log_c c^{x+y}$ f) $\log_a (a^x)^y$
g) $\lg 10^{x+3}$ h) $\lg 1000^2$

?! 1–4 3

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

5 Schreiben Sie als Potenzgleichung.
Beispiel: $\log_2 8 = 3$ ist gleichwertig mit
$2^3 = 8$

a) $\log_5 625 = 4$ b) $\log_6 7776 = 5$
c) $\log_8 64 = 2$ d) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$
e) $\log_2 0{,}125 = -3$ f) $\log_{3,5} 12{,}25 = 2$

6 Bestimmen Sie die Zahl x, deren Logarithmus gegeben ist.

a) $\log_2 x = 7$ b) $\log_5 x = 3$
c) $\log_3 x = 3$ d) $\lg x = 4$
e) $\log_6 x = 0$ f) $\log_4 x = 0{,}5$
g) $\log_3 x = 2$ h) $\lg x = 10$
i) $\log_5 x = -3$ j) $\log_4 x = 4$

Ohne den Zahlenwert des Logarithmus zu kennen, kann man die Gleichungen
$10\,000 = 10^x$ als $10\,000 = 10^{\lg 10\,000}$
und $526 = 10^x$ als $526 = 10^{\lg 526}$ schreiben.
Allgemein gilt daher $z = 10^{\lg z}$ für $z > 0$.

Diese allgemeine Gleichung zeigt, dass jede beliebige positive Zahl z als Zehnerpotenz mit dem Exponenten lg z darstellbar ist. Dies wendet man auf die Gleichung $a^x = y$ an:

$a^x = y$ | a ersetzen durch $10^{\lg a}$, y ersetzen durch $10^{\lg y}$
$(10^{\lg a})^x = 10^{\lg y}$ | Potenzgesetz anwenden
$10^{x \cdot \lg a} = 10^{\lg y}$ | Die Gleichung ist erfüllt, wenn beide Exponenten gleich sind
$x \cdot \lg a = \lg y$ | : lg a
$x = \frac{\lg y}{\lg a}$
$\log_a y = \frac{\lg y}{\lg a}$

Merke Der Logarithmus von y zu einer beliebigen Basis a kann mithilfe der Zehnerlogarithmen berechnet werden: $\log_a y = \frac{\lg y}{\lg a}$

Beispiel

a) Bestimmen Sie mithilfe des Zehnerlogarithmus.
$x = \log_{20} 3$
$x = \frac{\lg 3}{\lg 20}$
$x \approx 2{,}727$

b) Lösen Sie die Gleichung durch Umwandeln in einen Logarithmus.
$7^x = 2401$
$\log_7 2401 = \frac{\lg 2401}{\lg 7} = 4$
Probe: $7^4 = 2401$ ✔

7 Bestimmen Sie den Logarithmus mit dem Taschenrechner.
a) $\lg 3285$; $\lg 0{,}0357$; $\lg 625$
b) $\log_3 95$; $\log_6 832$; $\log_4 0{,}085$; $\log_4 9$

8 Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und bestimmen Sie die Lösung.
a) $3^x = 729$ b) $8^x = 512$
c) $9^x = 6561$ d) $11^x = 1331$

9 Bestimmen Sie die Zehnerlogarithmen von 10; 100; 1000; 10000; 5,2; 0,1; 0,001; 0,00001; 0,6.

10 Von welchen Zahlen ist der Zehnerlogarithmus ganzzahlig?

11 Bestimmen Sie den Logarithmus.
a) $\log_5 5^7$ b) $\log_b (b^u)^v$
c) $\log_2 4^3$ d) $\log_3 \sqrt{81}$
e) $\log_7 50$ f) $\log_{11} 100$

12 Die Halbwertszeit von Calcium 49 beträgt ungefähr 8,7 Minuten. Um wie viel Prozent zerfällt Calcium 49 pro Minute?

?! 5–12 10 7 12

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die gesuchte Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz vorkommt.
Exponentialgleichungen kann man durch verschiedene Vorgehensweisen lösen.

Lösung durch Vergleich der Exponenten
Man formt die Gleichung mithilfe der Potenzgesetze so um, dass auf beiden Seiten genau eine Potenz mit der gleichen Basis steht.
Die beiden Seiten sind gleich, wenn die Exponenten der beiden Potenzen gleich sind.

Lösung mithilfe der Logarithmusregeln
Man formt die Gleichung so um, dass der Term mit der Potenz auf einer Seite alleine steht.
Danach löst man die Gleichung mithilfe der Logarithmusregeln.

Beispiel

a) $3^x \cdot 3^{(x+1)} = 3^5$ | Potenzgesetze anwenden

$3^{(x+x+1)} = 3^5$

$3^{(2 \cdot x+1)} = 3^5$

Vergleich der Exponenten

$2 \cdot x + 1 = 5$ | −1

$2 \cdot x = 4$ | : 2

$x = 2$

b) $4 \cdot 2^x = 20$ | : 4

$2^x = 5$ | in einen Logarithmus umformen

$x = \log_2 5$ | Zehnerlogarithmen benutzen

$x = \frac{\lg 5}{\lg 2}$

$x \approx 2{,}32$

13 Lösen Sie die Exponentialgleichungen.
a) $2^{x-1} \cdot 2^{x+2} = 2^7$
b) $5^{2x} - 5^{x+1} = 0$
c) $7^x \cdot 7^{x-3} = 7^5$
d) $3^x = 9$

14 Lösen Sie die Exponentialgleichungen mithilfe des Logarithmus.
a) $2 \cdot 3^x = 10$
b) $12 \cdot 10^x = 36$
c) $8 \cdot 4^{x+1} = 16$
d) $9^x = 1$

15 Geben Sie die Lösung folgender Gleichung an.
Beispiel: $5^{3x-2} = 9$
Lösung: $3x - 2 = \log_5 9$

$$3x - 2 = \frac{\lg 9}{\lg 5}$$
$$3x = \frac{\lg 9}{\lg 5} + 2$$
$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{\lg 9}{\lg 5} + 2\right) \approx 1{,}12174$$

Probe: $5^{3 \cdot 1{,}12174 - 2} = 5^{1{,}36522} = 9$

a) $12^x = 18$
b) $28^{x-4} = 270$
c) $5 \cdot 6^{2x+1} = 70$
d) $3^{2x} = 3^{x-1}$
e) $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$
f) $3 \cdot 4^x = 6 \cdot 10^x$

ppm = parts per million auf Deutsch „Teile pro 1 Million".

16 Im Jahr 2013 nutzten 298 Mio Menschen im mittleren Osten und in Afrika das Internet. In welchem Jahr verdoppelt sich die Anzahl der Internetnutzer, wenn eine jährliche Wachstumsrate von 15,3 % erwartet wird.

17 In der Gleichung $a^x = y$ kann der Potenzwert $y = a^x$, die Basis $a = \sqrt[x]{y}$ oder der Exponent $x = \log_a y$ gesucht sein. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie entsprechend.

Potenzgleichung	Wurzelgleichung	Logarithmusgleichung
$3^6 = 729$	■	■
■	$\sqrt[8]{256} = 2$	■
■	■	$\log_4 1024 = 5$
■	■	$\lg 10\,000 = 4$
$2^{-4} = 0{,}0625$	■	■
■	$\sqrt[4]{1296} = 6$	■

18 Ein Kapital von 10 000 € wird zu 6 % fest angelegt.
Nach wie vielen Jahren ist es auf ca. 15 000 € angewachsen?

19 Ein Badesee wurde durch Chemikalien mit 200 ppm verseucht. Die Verunreinigung nimmt alle 5 Tage um 15 % ab.
Nach wie vielen Tagen hat die Verunreinigung den unbedenklichen Wert von 10 ppm?

13 – 19   16, 18, 19

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7