Schnittpunkt

Mathematik für die Berufsfachschule

Zusatzinhalte für Rheinland-Pfalz

Quelle: iStockphoto (Shapecharge), Calgary, Alberta, aus 3-12-742741-7

Klett

1 Exponentielles Wachstum

Weltweit beobachtet man besorgt die Zunahme resistenter Schädlingsarten. DDT steht für Dichlordiphenyltrichlorethan. Es ist ein Insektenvernichtungsmittel, das heute in Deutschland verboten ist. Kurz nach dem ersten Einsatz von DDT im Jahr 1945 zählte man nur sieben resistente Arten. Seit damals wächst die Anzahl der resistenten Arten jährlich um rund 15 %.

→ Stellen Sie die Entwicklung für den Zeitraum 1945 bis 1960 tabellarisch dar.
→ Erstellen Sie eine entsprechende Grafik.
→ Können Sie eine allgemeingültige Formel herleiten? Welche Tendenz zeigt sich daraus für die weitere Entwicklung?

Es ist mühsam, bei einer Hochrechnung jeden Zwischenwert einzeln zu errechnen. Wenn die Werte **in gleichen Zeitabschnitten** um den gleichen Prozentsatz – also **mit gleicher Wachstumsrate** – wachsen, kann man eine Formel aufstellen, mit der man die Werte für jeden beliebigen Zeitabstand berechnet. So beträgt die erwartete Bevölkerung einer Stadt mit 10 000 Einwohnerinnen und Einwohnern bei einer jährlichen Wachstumsrate von 3 %

… nach einem Jahr	$10\,000 \cdot 1{,}03$	$= 10\,300$	Einwohner.
… nach 2 Jahren	$10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 10\,000 \cdot 1{,}03^2$	$= 10\,609$	Einwohner.
… nach n Jahren	$10\,000 \cdot 1{,}03^n$		Einwohner.

Merke

Wächst eine Größe in gleich großen Abschnitten um den gleichen Prozentsatz p %, wird sie also immer mit dem gleichen Faktor vervielfacht, so liegt ein **exponentielles Wachstum** vor.
Die Größe wächst dann in n Abschnitten auf das q^n-Fache des Anfangswerts G_0.
Dabei ist q der **Wachstumsfaktor** mit $q = 1 + p\,\%$.

$$G_n = G_0 \cdot q^n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Die Zeit, in der sich bei einem exponentiellen Wachstum die Ausgangsgröße verdoppelt, heißt **Generationszeit T_2** mit **$q = 1 + 100\,\% = 2$**.

Bemerkung

Das Wachstum heißt **exponentiell**, weil die Variable, die bei gegebener Ausgangsgröße das Wachstum bestimmt, im **Exponenten** steht.

Beispiel

Wird Geld länger als ein Jahr angelegt, dann werden auch die Zinsen verzinst. Die zusätzlich entstandenen Zinsen bezeichnet man als **Zinseszinsen**.
$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit dem Startkapitel K_0, dem Wachstumsfaktor q und der Anzahl von Jahren n.

a) Ein Vermögen von 1000 € wird für 4 Jahre zu 2,2 % angelegt. Wie groß ist es nach 4 Jahren?

Zeit (Jahre)	Kapital (€)	Kapital neu (€)
0	1000	= 1000
1	$1000 \cdot 1{,}022$	= 1022
2	$1022 \cdot 1{,}022$	= 1044,48
3	$1044{,}48 \cdot 1{,}022$	= 1067,46
4	$1067{,}46 \cdot 1{,}022$	= 1090,95

Nach vier Jahren beträgt das Vermögen 1090,95 €.

b) Eine Bakterienkultur hat eine Generationszeit von 2 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung sind 250 Bakterien vorhanden. Wie viele Bakterien sind es nach 8 Stunden?

Zeit (h)	Rechnung	Bakterienzahl
0	$250 \cdot 2^0$	250
2	$250 \cdot 2^1$	500
4	$250 \cdot 2^2$	1000
6	$250 \cdot 2^3$	2000
8	$250 \cdot 2^4$	4000

Nach acht Stunden sind es 4000 Bakterien.

Quellen: Fotosearch Stock Photography (Digital Vision), Waukesha, WI; aus 3-12-742711-0 S.301

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Ein Anfangskapital beträgt 2000 €.
Bestimmen Sie jeweils den jährlichen Wachstumsfaktor und berechnen Sie den Endwert.

	jährliche Wachstumsrate	Zahl der Jahre
a)	2,2 %	4
b)	2,16 %	8
c)	1,12 %	12
d)	1,17 %	21

◒ **2** Ein Kapital von 7200 € wird zu 2,3 % für 10 Jahre festgelegt.
a) Bestimmen Sie die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor und berechnen Sie das Endkapital.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Kapitalentwicklung für die gesamte Laufzeit.
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital etwa verdoppelt?
d) Nach einer Näherungsformel gilt, dass sich ein Kapital, das man zu p % verzinst, nach $\frac{72}{p}$ Jahren verdoppelt. Prüfen Sie dies mit 3 %; 8 %; 7 % und 10 % nach.

◒ **3** Eine Algenkultur wächst pro Tag um 30 %. Zu Beginn der Beobachtung waren 200 g Algen vorhanden.
a) Bestimmen Sie die Algenmasse für die nächsten fünf Tage.
b) Bestimmen Sie die Algenmasse für die vier Tage, bevor 200 g erreicht wurden.
c) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.
d) In der Versuchsanordnung ist nur für 1200 g Algen Platz. Nach wie vielen Tagen ist das exponentielle Wachstum beendet?

◒ **4** Gegeben sind folgende Funktionen:
$y_1 = 2x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = 2^x$.
a) Stellen Sie zu jeder Funktion eine Wertetabelle für das Intervall [−5; 5] auf.
b) Zeichnen Sie die drei zugehörigen Graphen für diesen Bereich in ein Koordinatensystem.
c) Naomi vergleicht die drei Graphen miteinander. Sie fragt sich: „In welchem Intervall ist der Graph der Funktion y_1 steiler als die beiden anderen Graphen? Wo ist y_2 am steilsten, wo y_3?“ Was meinen Sie?

◒ **5** Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung (DSW) veröffentlichte Ende 2014 folgende Daten zur Entwicklung der Weltbevölkerung.

Gebiet	Bevölkerung (2014 in Mio.)	jährlicher Zuwachs in %
Welt	7238	1,2
Afrika	1136	2,5
Asien	4351	1,1
Ozeanien	39	1,1
Südamerika	410	1,1
Nordamerika	353	0,4

a) Berechnen Sie nach dieser Tabelle die Bevölkerungszahlen für das Jahr 2050.
b) Wie können Sie die Bevölkerung von Europa im Jahr 2014 und im Jahr 2015 berechnen?
c) Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der einzelnen Gebiete an der Weltbevölkerung für 2014 und 2050. Zeichnen Sie dazu ein Kreisdiagramm.

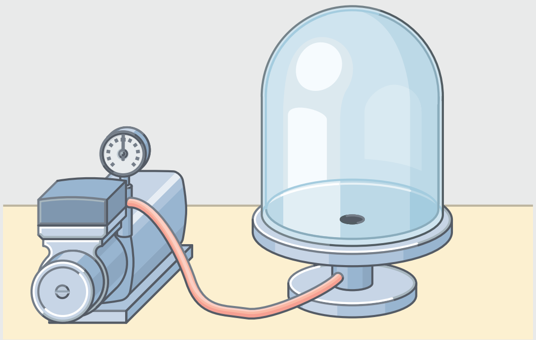
● **6** Der Wald von Herrn Huber hat einen Holzbestand von 45 000 m^2. Ohne störende Umwelteinflüsse wie z. B. Schädlingsbefall nimmt der Holzbestand pro Jahr um 3,7% annähernd exponentiell zu.
a) Auf wie viel m^3 wächst der Holzbestand nach vier Jahren (nach 8; 12; 16; 20 Jahren)?
b) Durch einen Schädlingsbefall sinkt das Wachstum auf 2,8 % jährlich. Auf wie viel m^3 wächst der Holzbestand nun nach vier Jahren (nach 8; 12; 16; 20 Jahren)?
c) Nach 8 Jahren hat sich der Wald vom Schädlingsbefall weitgehend erholt. Wie viel m^3 Holzbestand hat der Wald nach weiteren vier (nach 8; 12) Jahren?

?! 1–4, 6   💬 4   ⊿ 2–5   ⚙

Quellen: Fotolia.com (Grigory Bruev), New York; aus 3-12-742711-0 S.302

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

2 Exponentielle Abnahme



Aus einem Behälter werden mit einer Vakuumpumpe pro Sekunde 5 % der vorhandenen Luft abgepumpt.

→ Wie viel Prozent Luft sind nach einer Sekunde noch im Behälter enthalten?

→ Wie viel Prozent Luft sind es nach 2; 3; 4 oder 10 Sekunden?

→ Warum hat man nach 20 Sekunden immer noch kein Vakuum im Behälter erreicht?

Zahlreiche Vorgänge wie z. B. radioaktiver Zerfall verlaufen so, dass ein Anfangswert in gleichen Zeitabschnitten um einen gleich bleibenden Prozentsatz, die **Wachstumsrate**, abnimmt.

Merke

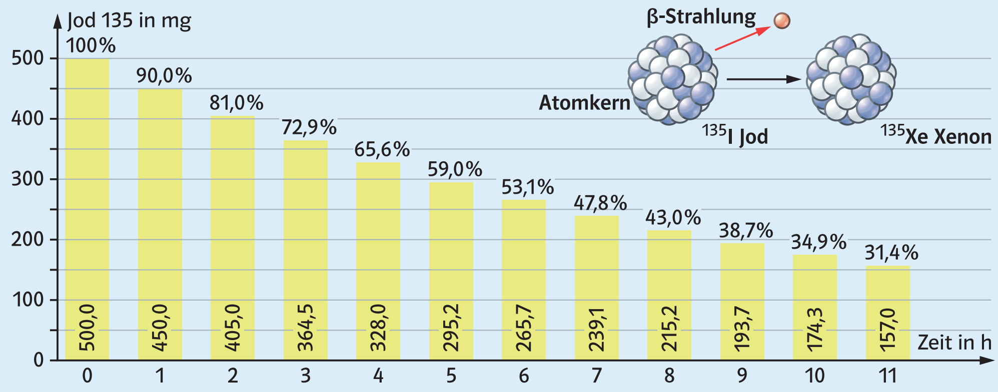
Wenn eine Größe in gleich großen Abschnitten um den gleichen Prozentsatz p % abnimmt, d. h. immer mit dem gleichen Faktor $(0 < q < 1)$ vervielfacht wird, liegt eine **exponentielle Abnahme** vor.
Die Größe nimmt dann in n Abschnitten auf das q^n-Fache des Anfangswerts G_0 ab.
Dabei ist q der **Wachstumsfaktor** mit $q = 1 - p\,\%$.

$$\mathbf{G_n = G_0 \cdot q^n = G_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n}$$

Die Zeit, in der sich bei exponentieller Abnahme die Ausgangsgröße halbiert, nennt man die **Halbwertzeit $T_{\frac{1}{2}}$**.
Der Wachstumsfaktor für diese Zeitspanne ist **$q = 1 - 50\,\% = 0{,}5$.**

Beispiel

Bei radioaktiven Stoffen zerfällt pro Zeiteinheit immer derselbe Prozentsatz der noch vorhandenen radioaktiven Kerne. So zerfallen bei radioaktivem Jod 135 zum Beispiel pro Stunde 10 % der noch vorhandenen radioaktiven Kerne und wandeln sich in Xenon 135 und β-Strahlung um. Zu Beginn sind 500 mg radioaktives Jod 135 vorhanden. Wie viel mg sind es nach 11 Stunden?



$G_{11} = 500 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{11} = 500 \cdot 0{,}9^{11} \approx 156{,}9$

Nach 11 Stunden sind noch ca. 157 mg radioaktives Jod 135 vorhanden.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Seit ein paar Jahren sterben mehr Menschen in Deutschland als Menschen geboren werden. Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung (DSW) hat dazu 2014 veröffentlicht: Die natürliche Wachstumsrate beträgt −0,2 % bei einer Bevölkerung von etwa 81 Mio. Menschen in Deutschland. Berechnen Sie die zu erwartenden Bevölkerungszahlen für die Jahre 2020, 2030 und 2050.

◒ **2** Bei radioaktivem Wismut 210 beträgt die Halbwertszeit fünf Tage. Es wandelt sich unter Abgabe radioaktiver Strahlung allmählich in Polonium 210 um.

a) Stellen Sie eine Wertetabelle für 5; 10; 15; 20; 25 und 30 Tage auf und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.

b) Wie viel Wismut ist von 10 g nach zwölf Tagen noch vorhanden?

◒ **3** Ein Labor soll nach einem Störfall mit einem Mittel desinfiziert werden, dessen Konzentration im Raum jede halbe Stunde um 10 % abnimmt.

a) Nach welcher Zeit ist nur noch die Hälfte der Anfangskonzentration vorhanden?

b) Fällt die Konzentration unter 0,1 % der Anfangskonzentration, darf das Labor gefahrlos betreten werden. Nach wie vielen Stunden ist das möglich?

◒ **4** Erfahrungswerte haben gezeigt, dass ein neues Auto beginnend mit dem Kaufdatum jedes Jahr ungefähr 25 % seines Werts verliert. Frau Huang hat ein Auto gekauft, das ein Jahr nach dem Kauf noch einen Restwert von 15 000 € hat.

a) Wie viel Euro hat Frau Huang für das Auto bezahlt?

b) Wie viel Euro ist das Auto zwei, vier und fünf Jahre nach dem Kauf noch Wert?

c) Berechnen Sie die Halbwertszeit.

d) Zeichnen Sie den Graphen für den Wert des Autos in Abhängigkeit der Jahre. Überprüfen Sie nun Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben a), b) und c) anhand des Graphen.

● **5** Die Lichtintensität nimmt in klarem Wasser um ca. 11 % pro Meter ab.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Abnahme der Lichtintensität im Wasser auf.

b) Auf wie viel Prozent des Ausgangswerts ist die Lichtintensität in 10 m Tiefe gesunken?

c) Zeichnen Sie den Graphen und lesen Sie ab, in welcher Tiefe nur noch die Hälfte (ein Viertel) der Lichtintensität vorhanden ist.

d) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität 80 %, 60 % oder 10 % des Ausgangswerts? Lesen Sie die Werte aus Ihrer Zeichnung ab.

● **6** Auf der Erdoberfläche lastet die gesamte Luftschicht und verursacht den atmosphärischen Druck. Er wird in Hektopascal (hPa) angegeben und beträgt in Meereshöhe etwa 1013 hPa. Je höher man steigt, desto „dünner" wird die Luft, da die darüber liegende Luftschicht geringer wird. Der Luftdruck nimmt um 1,23 % pro 100 m Höhenunterschied ab.

a) Auf wie viel Prozent ist der Luftdruck in 1000 m Höhe ungefähr gesunken?

b) Wie ändert sich der Luftdruck, wenn man aus einer Höhe von 500 m bei beständigem Wetter auf die Zugspitze (2962 m) steigt?

c) Berechnen Sie den Luftdruck auf dem Kilimandscharo (5895 m) und dem Mount Everest (8850 m) bezogen auf 1013 hPa.

d) Der Luftdruckmesser (Barometer) zeigt auf der Spitze eines Bergs, dass hier nur 78 % des Luftdrucks auf Meereshöhe vorhanden sind. Wie hoch ist der Berg etwa?

e) Zeichnen Sie einen Graphen für den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe.

?! 1–6 2, 4–6

Quellen: Stockphoto (Oversnap), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.304

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

3 Exponentialfunktion

In einem Labor wird die Entwicklung von Bakterien bei unterschiedlichen Temperaturen beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung haben alle Proben 320 Bakterien.
Probe A verdoppelt sich jede Stunde.
Probe B verdreifacht sich jede Stunde.
Probe C nimmt um die Hälfte pro Stunde zu.
Probe D halbiert sich jede Stunde.

→ Erstellen Sie für alle Proben eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen.
→ Erweitern Sie die Tabelle und die Graphen bis zu drei Stunden vor Beobachtungsbeginn (bei gleichen Bedingungen).
→ Beschreiben Sie die Eigenschaften der vier Graphen.

Wächst ein Ausgangswert G_0 in gleich großen Abschnitten immer um den gleichen Wachstumsfaktor q, so erhält man nach x Abschnitten den Endwert $y = G_0 \cdot q^x$.
Jedes prozentuale Wachstum lässt sich als Funktion mit der allgemeinen Form $y = c \cdot a^x$ mit $c \neq 0$ und $a > 0$ darstellen, zum Beispiel $y = 320 \cdot 2^x$.

Merke

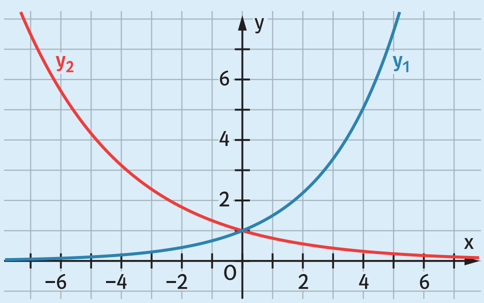
Die Funktion $\mathbf{y = a^x}$ mit gegebener Zahl $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Der Graph der Exponentialfunktion verläuft immer oberhalb der x-Achse.
Ist $a > 1$, so steigt der Graph.
Ist $0 < a < 1$, so fällt der Graph.
Wird die Exponentialfunktion mit einem Faktor $c \neq 0$ multipliziert, hat also die Funktionsgleichung die allgemeine Form $\mathbf{y = c \cdot a^x}$, so heißt sie **erweiterte Exponentialfunktion**. Dann ist c der Funktionswert an der Stelle $x = 0$.

Beispiel

a) $y_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ $\qquad y_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

x	−7	−5	−3	0	1	3	5	7
y_1	0,06	0,13	0,3	1	$\frac{3}{2}$ = 1,5	3,38	7,59	17,9

x	−7	−5	−3	0	1	3	5	7
y_2	7,49	4,21	2,37	1	$\frac{3}{4}$ = 0,75	0,42	0,24	0,13

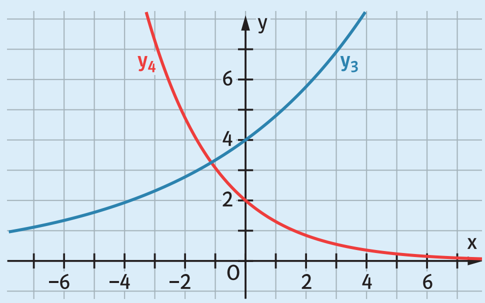


Ist der Faktor $c = 1$, so ist a der y-Wert zu $x = 1$. Dies lässt sich am Graphen ablesen.

b) $y_3 = 4 \cdot 1{,}2^x$ $\qquad y_4 = 2 \cdot 0{,}65^x$

x	−7	−5	−3	0	3	5	7
y_3	1,12	1,61	2,31	4	6,91	9,95	14,3

x	−7	−5	−3	0	3	5	7
y_4	40,8	17,2	7,28	2	0,55	0,23	0,10



Der Faktor c ist der y-Achsenabschnitt des Graphs.

Quellen: Fotolia.com (Angellodeco), New York; aus 3-12-742711-0 S.305
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Stellen Sie zu den Funktionen $y_1 = 3^x$ und $y_2 = 0{,}5^x$ jeweils eine Wertetabelle für das Intervall $[-5;\ 5]$ auf. Zeichnen Sie die Graphen in unterschiedlichen Farben in ein Koordinatensystem.

○ **2** Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y_1 = 1{,}5^x$ und $y_2 = 0{,}4^x$. Lesen Sie an den Graphen näherungsweise folgende Werte ab.
$1{,}5^{3,2}$; $1{,}5^{4,5}$; $1{,}5^{-1,7}$; $0{,}4^{-1,7}$; $0{,}4^{-0,3}$; $0{,}4^{1,5}$

◒ **3** Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

$y_1 = \left(\frac{8}{5}\right)^x$ und $y_2 = \left(\frac{5}{8}\right)^x$,

$y_3 = 4^x$ und $y_4 = 0{,}25^x$.

Was stellen Sie fest?
Können Sie mithilfe Ihrer Beobachtungen eine allgemeingültige Regel formulieren?

◒ **4** Welche Wertetabelle stellt ein lineares, welche ein exponentielles Wachstum dar? Geben Sie in diesen Fällen jeweils die Funktionsgleichungen an.

x	−1	0	1	2	3
y_1	−2	1	4	7	10

x	−1	0	1	2	3
y_2	0,1	1	10	100	1000

x	−1	0	1	2	3
y_3	3	2	1	0	−1

x	−1	0	1	2	3
y_4	0,4	1	2,5	6,25	15,625

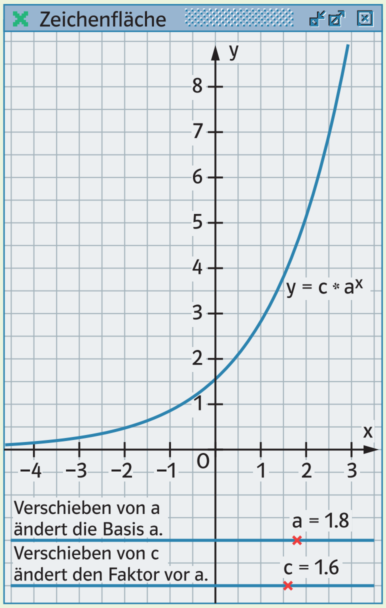
◒ **5** Gegeben sind $y_1 = 1{,}4^x$ und $y_2 = 0{,}75^x$.
a) Welcher der zugehörigen Graphen steigt, welcher fällt? Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Intervall $[-5;\ 5]$.
c) Lesen Sie die x-Werte zu $y_1 = 1{,}5$; $y_1 = 3{,}7$; $y_2 = 2{,}5$ und $y_2 = 3{,}8$ am Graphen ab.

Methode

Exponentialfunktion und dynamische Geometriesoftware (DGS)

Mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) können Sie ausprobieren, welche Auswirkung auf den Graphen der Funktion $y = c \cdot a^x$ eine Veränderung der Variablen a oder c hat. Sie können einen Gleiter erzeugen, mit dem Sie die Werte der Basis a kontinuierlich verändern. Mit einem zweiten Gleiter können Sie auch den Faktor c verändern.

- Setzen Sie c auf 1. Bewegen Sie a zwischen 0,5 und 2,5. Beschreiben Sie die Eigenschaften der Graphen und formulieren Sie einen Merksatz.
- Setzen Sie a auf 2. Bewegen Sie nun c zwischen 0,5 und 1,5. Welche Veränderung stellen Sie fest? Formulieren Sie eine allgemeingültige Regel.
- Lassen Sie von folgenden Funktionen die Graphen zeichnen: $y_1 = 2^x$; $y_2 = 2^x + 3$; $y_3 = 2^x - 3$.
- Was bewirken die Summanden 3 bzw. −3? Formulieren Sie eine allgemeingültige Regel.
- Lassen Sie von folgenden Funktionen die Graphen zeichnen: $y_1 = 0{,}8^x$; $y_2 = 0{,}8^{-x}$. Was stellen Sie fest?
- Was passiert mit dem Graphen $y = c \cdot a^x$, wenn $c < 0$ ist?

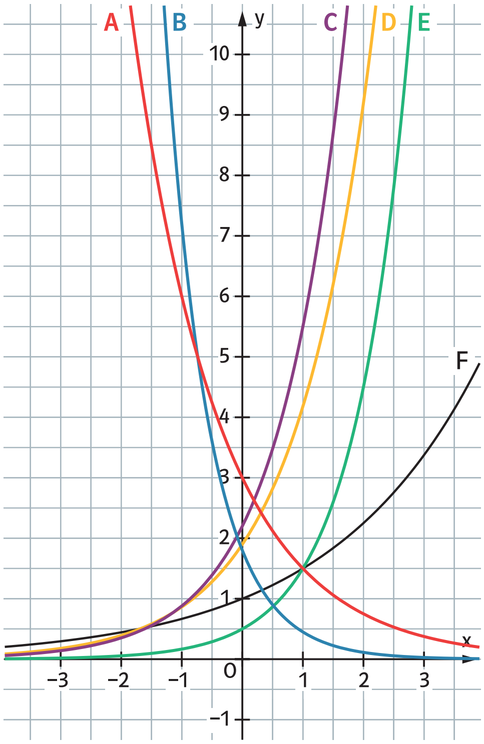


1–5   3, 5   1–3, 5

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Unten sehen Sie die Graphen von sechs Exponentialfunktionen der Form $y = c \cdot a^x$. Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Wahl.



$y_1 = 0{,}5 \cdot 3^x$ $\quad$ $y_2 = 3 \cdot 0{,}5^x$

$y_3 = 1{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $\quad$ $y_4 = 2{,}2 \cdot 2{,}5^x$

$y_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ $\quad$ $y_6 = 1{,}9 \cdot 2{,}2^x$

$y_7 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ $\quad$ $y_8 = 1{,}5^x$

Setzen Sie die Funktionswerte in die allgemeine Form $y = c \cdot a^x$ ein.

7 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft.

Beispiel: $P_1(0\,|\,1{,}5)$ und $P_2(1{,}5\,|\,7{,}5)$

P_1: $1{,}5 = c \cdot a^0$ also $c = 1{,}5$

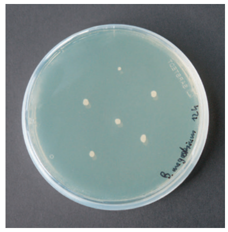
P_2: $7{,}5 = 1{,}5 \cdot a^{1{,}5}$ also $a \approx 2{,}92$

Die Funktionsgleichung lautet
$y = 1{,}5 \cdot 2{,}92^x$.

a) $P_1(0\,|\,4)$ und $P_2(1\,|\,5)$
b) $P_1(0\,|\,2)$ und $P_2(2\,|\,0{,}5)$
c) $P_1(1\,|\,18)$ und $P_2(4\,|\,31{,}104)$
d) $P_1(2\,|\,16)$ und $P_2(4\,|\,0{,}4096)$
e) Warum ist eine Exponentialfunktion durch zwei Punkte eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Behauptung.

8 In einer Petrischale befindet sich eine Bakterienkultur. Ihr Wachstum wird durch die Funktion $y = 2 \cdot 1{,}25^x$ (x: Dauer in Stunden, y: Fläche in cm^2) dargestellt.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
b) Wie groß war die Fläche der Kultur zu Beginn der Messung?
c) Welcher Zeitpunkt ist gemeint, wenn $x = -0{,}5$ ist?



9 Bei einem Laborversuch wird das Wachstum von zwei Pilzkulturen beobachtet und dokumentiert. Nach x Stunden ist die Fläche y in cm^2 bedeckt.

a) Wie lautet jeweils die Funktionsgleichung?

Pilzkultur A

x	−2	−1	0	0,5	1	2
y	0,16	0,40	1	1,58	2,5	6,25

Pilzkultur B

x	−2	−1	0	0,5	1	2
y	0,06	0,25	1	2	4	16

b) Erklären Sie jeweils die ersten beiden Tabellenspalten.

10 Bei radioaktiven Stoffen zerfällt pro Zeiteinheit immer derselbe Prozentsatz der noch vorhandenen radioaktiven Kerne. Bei Jod 123 zerfallen 5 % pro Stunde.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für den radioaktiven Zerfall von Jod 123 auf und zeichnen Sie den Graphen.
b) Wie müsste die Gleichung lauten, wenn 50 g Jod 123 zerfallen?

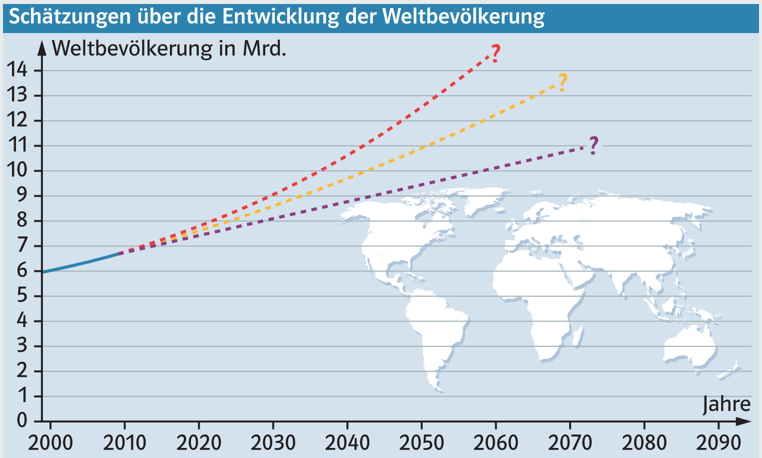
11 Stellen Sie eine Wertetabelle für die Funktionen $y_1 = 2^x$, $y_2 = 2^{x+1}$, $y_3 = 2^{x+2}$ und $y_4 = 2^{x-1}$ auf. Zeichnen Sie die vier Graphen in ein Koordinatensystem. Was fällt Ihnen auf?

?! 6–11 $\quad$ 6, 7, 9, 11 $\quad$ 8, 10, 11

Quellen: 1; 2 Klett-Archiv (Elke Peter), Stuttgart; aus 3-12-742711-0 S.307
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

4 Logarithmus und Exponentialgleichungen



Die Weltbevölkerung umfasste zu Beginn des Jahres 2009 rund 6,7 Milliarden Menschen. Die Wachstumsrate beträgt derzeit weltweit durchschnittlich 1,2 % jährlich.

→ Wann wurde die Marke von 7 Milliarden erreicht? Berechnen Sie zuerst die Schätzung aus dem Jahr 2009, recherchieren Sie dann den tatsächlichen Zeitpunkt.

→ Wann dürften 8 Milliarden erreicht sein? Schätzen Sie zuerst, prüfen Sie dann.

→ Wird noch in diesem Jahrhundert die Marke von 10 Milliarden erreicht, wenn die Wachstumsrate unverändert bleibt?

Bisher konnten solche Aufgaben nur durch Probieren oder grafisch gelöst werden. Mithilfe des Logarithmus ist eine schnelle und genaue Berechnung möglich. Dabei heißt der gesuchte Exponent x **Logarithmus zur Basis a**. Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 hat den Wert 3, denn $2^3 = 8$.

Merke

Der **Logarithmus von y zur Basis a** (mit $a > 0$; $a \neq 1$; $y > 0$), kurz $\log_a y$, ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um y zu erhalten.
Die Gleichung $x = \log_a y$ ist also gleichbedeutend mit $a^x = y$.

Beispiel

Bestimmung des Logarithmus durch Probieren:

a) In der Aufgabe $2^x = 16$ ist die Zahl gesucht, mit der man 2 potenzieren muss, um 16 zu erhalten.
$x = \log_2 16 = 4$
denn $2^4 = 16$

b) $10^x = 10\,000$
$x = \log_{10} 10\,000$
$x = 4$
denn $10^4 = 10\,000$

c) $2^x = 0{,}125$
$x = \log_2 0{,}125$
$x = -3$
denn $2^{-3} = 0{,}125$

Bemerkung

Auf den meisten Taschenrechnern findet sich eine Taste „**log**“. Damit lässt sich der Logarithmus zur Basis 10 berechnen. Der Logarithmus zur Basis 10 heißt auch **Zehnerlogarithmus** oder dekadischer Logarithmus und wird mit **lg** abgekürzt:
$\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$

○ **1** Bestimmen Sie den Logarithmus im Kopf.

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 \frac{1}{4}$ c) $\log_9 81$
d) $\log_3 1$ e) $\log_5 25$ f) $\log_7 7^5$
g) $\log_4 \frac{1}{64}$ h) $\lg 1000$ i) $\lg 0{,}0001$

○ **2** Bestimmen Sie den Logarithmus im Kopf.

a) $\log_4 128$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$
c) $\log_6 \frac{1}{6}$ d) $\log_4 16^3$
e) $\lg 10\,000\,000$ f) $\lg 0{,}01$

○ **3** Bestimmen Sie den Logarithmus mit dem Taschenrechner.

a) $\lg 157$ b) $\lg 25{,}7$
c) $\lg 0{,}038$ d) $\lg \frac{1}{2}$

◒ **4** Bestimmen Sie den Logarithmus.

a) $\log_3 3^x$ b) $\log_b \sqrt{b}$
c) $\log_5 \sqrt{5^k}$ d) $\log_a \sqrt[n]{a^m}$
e) $\log_c c^{x+y}$ f) $\log_a (a^x)^y$
g) $\lg 10^{x+3}$ h) $\lg 1000^2$

?! 1 – 4 3

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

5 Schreiben Sie als Potenzgleichung.
Beispiel: $\log_2 8 = 3$ ist gleichwertig mit $2^3 = 8$

a) $\log_5 625 = 4$ b) $\log_6 7776 = 5$
c) $\log_8 64 = 2$ d) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$
e) $\log_2 0{,}125 = -3$ f) $\log_{3,5} 12{,}25 = 2$

6 Bestimmen Sie die Zahl x, deren Logarithmus gegeben ist.

a) $\log_2 x = 7$ b) $\log_5 x = 3$
c) $\log_3 x = 3$ d) $\lg x = 4$
e) $\log_6 x = 0$ f) $\log_4 x = 0{,}5$
g) $\log_3 x = 2$ h) $\lg x = 10$
i) $\log_5 x = -3$ j) $\log_4 x = 4$

Ohne den Zahlenwert des Logarithmus zu kennen, kann man die Gleichungen
$10\,000 = 10^x$ als $10\,000 = 10^{\lg 10\,000}$
und $526 = 10^x$ als $526 = 10^{\lg 526}$ schreiben.
Allgemein gilt daher $z = 10^{\lg z}$ für $z > 0$.

Diese allgemeine Gleichung zeigt, dass jede beliebige positive Zahl z als Zehnerpotenz mit dem Exponenten lg z darstellbar ist. Dies wendet man auf die Gleichung $a^x = y$ an:

$$a^x = y \quad | \text{ a ersetzen durch } 10^{\lg a}\text{, y ersetzen durch } 10^{\lg y}$$
$$(10^{\lg a})^x = 10^{\lg y} \quad | \text{ Potenzgesetz anwenden}$$
$$10^{x \cdot \lg a} = 10^{\lg y} \quad | \text{ Die Gleichung ist erfüllt, wenn beide Exponenten gleich sind}$$
$$x \cdot \lg a = \lg y \quad | : \lg a$$
$$x = \frac{\lg y}{\lg a}$$
$$\log_a y = \frac{\lg y}{\lg a}$$

Merke
Der Logarithmus von y zu einer beliebigen Basis a kann mithilfe der Zehnerlogarithmen berechnet werden: $\log_a y = \frac{\lg y}{\lg a}$

Beispiel
a) Bestimmen Sie mithilfe des Zehnerlogarithmus.
$x = \log_{20} 3$
$x = \frac{\lg 3}{\lg 20}$
$x \approx 2{,}727$

b) Lösen Sie die Gleichung durch Umwandeln in einen Logarithmus.
$7^x = 2401$
$\log_7 2401 = \frac{\lg 2401}{\lg 7} = 4$
Probe: $7^4 = 2401$ ✔

7 Bestimmen Sie den Logarithmus mit dem Taschenrechner.
a) lg 3285; lg 0,0357; lg 625
b) $\log_3 95$; $\log_6 832$; $\log_4 0{,}085$; $\log_4 9$

8 Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und bestimmen Sie die Lösung.
a) $3^x = 729$ b) $8^x = 512$
c) $9^x = 6561$ d) $11^x = 1331$

9 Bestimmen Sie die Zehnerlogarithmen von 10; 100; 1000; 10000; 5,2; 0,1; 0,001; 0,00001; 0,6.

10 Von welchen Zahlen ist der Zehnerlogarithmus ganzzahlig?

11 Bestimmen Sie den Logarithmus.
a) $\log_5 5^7$ b) $\log_b (b^u)^v$
c) $\log_2 4^3$ d) $\log_3 \sqrt{81}$
e) $\log_7 50$ f) $\log_{11} 100$

12 Die Halbwertszeit von Calcium 49 beträgt ungefähr 8,7 Minuten. Um wie viel Prozent zerfällt Calcium 49 pro Minute?

?! 5–12 10 7 12

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die gesuchte Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz vorkommt.
Exponentialgleichungen kann man durch verschiedene Vorgehensweisen lösen.

Lösung durch Vergleich der Exponenten
Man formt die Gleichung mithilfe der Potenzgesetze so um, dass auf beiden Seiten genau eine Potenz mit der gleichen Basis steht.
Die beiden Seiten sind gleich, wenn die Exponenten der beiden Potenzen gleich sind.

Lösung mithilfe der Logarithmusregeln
Man formt die Gleichung so um, dass der Term mit der Potenz auf einer Seite alleine steht.
Danach löst man die Gleichung mithilfe der Logarithmusregeln.

Beispiel

a) $3^x \cdot 3^{(x+1)} = 3^5$ | Potenzgesetze anwenden
$3^{(x+x+1)} = 3^5$
$3^{(2 \cdot x+1)} = 3^5$
Vergleich der Exponenten
$2 \cdot x + 1 = 5$ | −1
$2 \cdot x = 4$ | : 2
$x = 2$

b) $4 \cdot 2^x = 20$ | : 4
$2^x = 5$ | in einen Logarithmus umformen
$x = \log_2 5$ | Zehnerlogarithmen benutzen
$x = \frac{\lg 5}{\lg 2}$
$x \approx 2{,}32$

13 Lösen Sie die Exponentialgleichungen.
a) $2^{x-1} \cdot 2^{x+2} = 2^7$
b) $5^{2x} - 5^{x+1} = 0$
c) $7^x \cdot 7^{x-3} = 7^5$
d) $3^x = 9$

14 Lösen Sie die Exponentialgleichungen mithilfe des Logarithmus.
a) $2 \cdot 3^x = 10$ b) $12 \cdot 10^x = 36$
c) $8 \cdot 4^{x+1} = 16$ d) $9^x = 1$

15 Geben Sie die Lösung folgender Gleichung an.
Beispiel: $5^{3x-2} = 9$
Lösung: $3x - 2 = \log_5 9$
$3x - 2 = \frac{\lg 9}{\lg 5}$
$3x = \frac{\lg 9}{\lg 5} + 2$
$x = \frac{1}{3}\left(\frac{\lg 9}{\lg 5} + 2\right) \approx 1{,}12174$
Probe: $5^{3 \cdot 1{,}12174 - 2} = 5^{1{,}36522} = 9$
a) $12^x = 18$ b) $28^{x-4} = 270$
c) $5 \cdot 6^{2x+1} = 70$ d) $3^{2x} = 3^{x-1}$
e) $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$ f) $3 \cdot 4^x = 6 \cdot 10^x$

16 Im Jahr 2013 nutzten 298 Mio Menschen im mittleren Osten und in Afrika das Internet. In welchem Jahr verdoppelt sich die Anzahl der Internetnutzer, wenn eine jährliche Wachstumsrate von 15,3 % erwartet wird.

17 In der Gleichung $a^x = y$ kann der Potenzwert $y = a^x$, die Basis $a = \sqrt[x]{y}$ oder der Exponent $x = \log_a y$ gesucht sein. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie entsprechend.

Potenzgleichung	Wurzelgleichung	Logarithmusgleichung
$3^6 = 729$	■	■
■	$\sqrt[8]{256} = 2$	■
■	■	$\log_4 1024 = 5$
■	■	$\lg 10\,000 = 4$
$2^{-4} = 0{,}0625$	■	■
■	$\sqrt[4]{1296} = 6$	■

18 Ein Kapital von 10 000 € wird zu 6 % fest angelegt.
Nach wie vielen Jahren ist es auf ca. 15 000 € angewachsen?

19 Ein Badesee wurde durch Chemikalien mit 200 ppm verseucht. Die Verunreinigung nimmt alle 5 Tage um 15 % ab.
Nach wie vielen Tagen hat die Verunreinigung den unbedenklichen Wert von 10 ppm?

?! 13 – 19 ⚙ 16, 18, 19

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

5 Logarithmusfunktion

Viviens Mutter hat für ihre Tochter 8000 € auf einem Konto mit 5 % Verzinsung angelegt. „Das Geld darfst du abheben, wenn das Guthaben auf 10 000 € angewachsen ist."

$8000 \cdot 1{,}05^x = 10\,000 \qquad | : 8000$

$1{,}05^x = 1{,}25$

Die gesuchte Variable steht im Exponenten der Basis 1,05. Die Funktionsgleichung ist $y = 1{,}05^x$.

→ Stellen Sie die Exponentialgleichung mithilfe des Logarithmus nach dem Exponenten x um.

→ Zeichnen Sie die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion in ein Koordinatensystem. Vergleichen Sie die beiden Graphen. Was fällt Ihnen auf?

Bei der Exponentialgleichung $1{,}05^x = 1{,}25$ ist die Zahl gesucht, die für x in den Term eingesetzt werden muss, damit sich der Wert 1,25 ergibt.
Wenn man das Diagramm an einer 45°-Achse spiegelt und dadurch die Achsen vertauscht, erhält man einen neuen Funktionsgraphen, den Logarithmus $y = \log_{1{,}05} x$ (sprich: Logarithmus von x zur Basis 1,05 x). Diese Funktion ist die Umkehrung zu $y = 1{,}05^x$. Der Graph der Logarithmusfunktion ist somit der an der Winkelhalbierenden gespiegelte Graph der Exponentialfunktion. Nun sucht man auf der Kapital-Achse z. B. den Betrag 2,5 und liest als Funktionswert die gesuchte Zeit ab: $y = \log_{1{,}05} 2{,}5 \approx 18{,}78$.

Merke

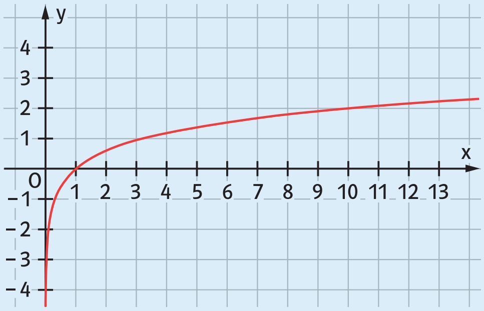
Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \log_a (x)$ heißt **Logarithmusfunktion** und ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Dabei ist a eine positive reelle Zahl außer der 1 und x eine positive reelle Zahl.
Der Graph jeder Logarithmusfunktion geht durch den Punkt P (1 | 0).

Beispiel

Gegeben ist die Gleichung der Logarithmusfunktion $y = 2 \cdot \log_{10} x$.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und lesen Sie die Punkte ab, um die Tabelle zu vervollständigen.

x	1	2,5	5	7,5	10
$2 \cdot \log_{10} x$	0	0,80	1,40	1,75	2

Je größer der x-Wert, desto langsamer steigt der Graph der Logarithmusfunktion an, erst wenn x den Wert 10 annimmt, erreicht y den Wert 2.



○ **1** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = \log_2 x$ im Intervall [0,25; 3] mit der Schrittweite 0,25. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle.

◒ **2** Zeichnen Sie die beiden Funktionen $y = 1{,}5^x$ und $y = \log_{1{,}5} x$ im Intervall [0,5; 5] in ein Koordinatensystem. Fertigen Sie zunächst für beide Funktionen eine Wertetabelle mit der Schrittweite 0,5 an. Vergleichen Sie die Graphen.

?! 2 1, 2

Quellen: PantherMedia GmbH (Liane), München; aus 3-12-742721-2 S.254
Grafik: Klett Archiv

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

3 Beim Reaktorunfall in Tschernobyl 1986 wurde eine Reihe unterschiedlicher radioaktiver Stoffe freigesetzt, unter anderem Cäsium 137 mit einer Halbwertszeit von 30,17 Jahren.

a) Nach wie viel Jahren ist die Cäsiumbelastung auf 25 % bzw. auf 12,5 % gesunken?

b) Zeichnen Sie einen geeigneten Graphen des radioaktiven Zerfalls von Cäsium und lesen Sie ab, nach welcher Zeit nur noch 20 %, 10 %, 5 % und 2 % der ursprünglichen Belastung vorhanden ist.
Geben Sie die Jahreszahlen an.

4 Das radioaktive Kohlenstoffisotop C14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.
Die Lasceaux-Höhle in Frankreich ist berühmt für ihre Höhlenmalereien. Die C14-Atome in der dort gefundenen Holzkohle hatten im Jahr 1950 noch eine Aktivität von ca. 13 %.

5 Im September 1991 entdeckten deutsche Bergwanderer in dem italienischen Teil der Ötztaler Alpen eine mumifizierte Leiche. Als diese nach ihrer Bergung genauer untersucht wurde, entpuppte sich der Fund als wissenschaftliche Sensation: Die Gletscherleiche, die nach dem Fundort Ötzi genannt wurde, war viel älter, als zunächst angenommen. In den Knochen wurde ein Gehalt von 53,35 % des radioaktiven Kohlenstoffisotops C14 festgestellt, welches eine Halbwertszeit von 5730 Jahren hat.

a) Schätzen Sie zunächst: In welchem Jahrtausend hat Ötzi gelebt?

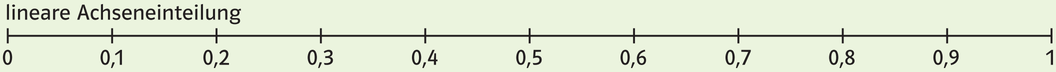
b) Berechnen Sie: Vor wie vielen Jahren etwa hat er wohl gelebt?

Information

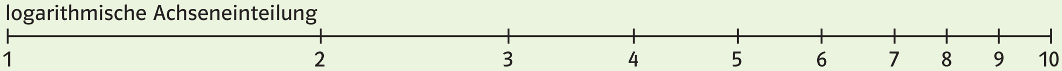
Logarithmische Achseneinteilung

In der Technik wird ein Zusammenhang häufig über einen sehr großen Bereich dargestellt. Um eine übersichtliche und aussagekräftige Darstellung zu erhalten, benutzt man z. B. bei einer der beiden Achsen statt einer linearen Achseneinteilung eine **logarithmische Achseneinteilung**. Diese beginnt nicht bei 0, sondern z. B. bei 1; 10; oder 100. Die Schritte werden in gleichen Abständen aufgetragen und mit Zehnerpotenzen beschriftet, also $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$ usw. Innerhalb eines solchen Schritts erfolgt die Zwischeneinteilung im logarithmischen Maßstab.

lineare Achseneinteilung



logarithmische Achseneinteilung



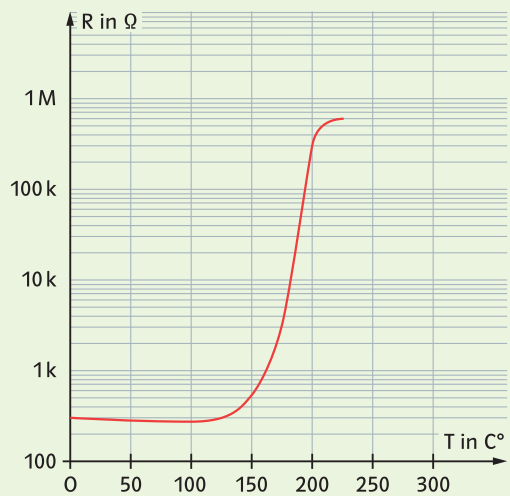
Kaltleiter (PTC) sind stromleitende Materialien, bei denen mit steigender Temperatur T auch ihr elektrischer Widerstand R steigt. Im Diagramm wird dieser Zusammenhang logarithmisch dargestellt.

a) Lesen Sie die Werte des Widerstands zur vorgegebenen Temperatur ab und vervollständigen Sie die Tabelle.

T in °C	0	50	100	150	200
R in Ω	300	■	■	■	■

b) Zeichnen Sie mithilfe der Tabelle den Graphen in ein Koordinatensystem mit linearer Achseneinteilung.

c) Was stellen Sie fest?

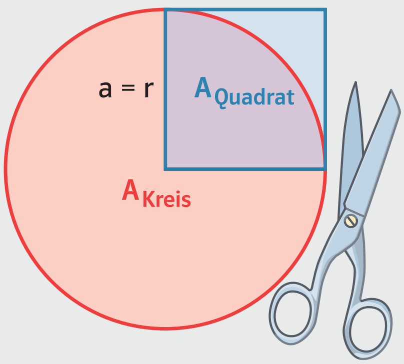


?! 4, 5   5   3   4

Quellen: Grafik: Klett Archiv

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Kreisflächen und Kreisteile

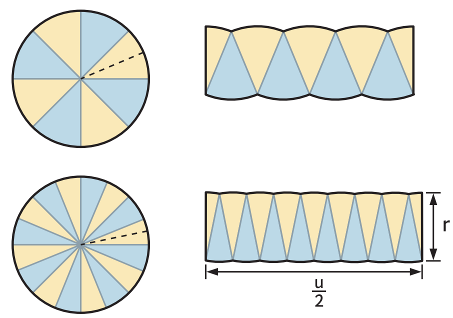


a = r	10 cm	15 cm	20 cm
$m_{Quadrat}$	5 g		
$m_{Viertelkreis}$	4 g		
m_{Kreis}	16 g		
$\frac{m_{Kreis}}{m_{Quadrat}}$	3,2		

→ Schneiden Sie aus gleich dickem Karton Quadrate und Viertelkreise mit a = r aus.
→ Bestimmen Sie mit einer Waage das Gewicht der ausgeschnittenen Teile und bilden Sie jeweils das Verhältnis von Kreis und Quadratgewicht. Füllen Sie die Tabelle aus.
→ Was stellen Sie fest? Der Karton aller ausgeschnittenen Teile war gleich dick. Was heißt das für die Flächeninhalte?

$$\frac{A_{Kreis\,1}}{A_{Quadrat\,1}} = \frac{A_{Kreis\,2}}{A_{Quadrat\,2}} = \frac{A_{Kreis\,3}}{A_{Quadrat\,3}}$$

Betrachtet man Kreise mit dem Radius r und Quadrate mit der Seitenlänge a = r, so ist das Verhältnis ihrer Flächeninhalte stets gleich groß. Es ist zu vermuten, dass der konstante Wert des Verhältnisses gleich der Kreiszahl π ist.
Wenn ein Kreis in gleiche Ausschnitte geteilt und einer von ihnen zusätzlich halbiert wird, lassen sich diese Ausschnitte näherungsweise wie eine Rechteckfläche anordnen. Je mehr Kreisteile gebildet werden, desto weniger weicht die Fläche von einem Rechteck ab.



Für den Flächeninhalt des Kreises ergibt sich also: $A = \frac{u}{2} \cdot r$.

Mit $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ erhält man: $A = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot r = \pi \cdot r^2$. Es gilt: $\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \pi \cdot \frac{r^2}{r^2} = \pi$.

Merke

Für den **Flächeninhalt A** eines Kreises mit dem Radius r gilt: $A = \pi r^2$.

Wegen $r = \frac{d}{2}$ gilt auch: $A = \frac{\pi d^2}{4}$.

Beispiel

a) Aus dem Durchmesser d = 5,0 m eines Kreises wird der Flächeninhalt berechnet.

$A = \frac{\pi d^2}{4}$

$A = \frac{\pi \cdot 5{,}0^2}{4}\,m^2$

$A = 19{,}6\,m^2$

b) Aus dem Flächeninhalt $A = 7{,}0\,dm^2$ eines Kreises wird der Radius berechnet.

$A = \pi r^2 \quad |:\pi$

$r^2 = \frac{A}{\pi} \quad |\sqrt{\ }$

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$r = \sqrt{\frac{7{,}0}{\pi}}\,dm$

$r = 1{,}5\,dm$

○ **1** Berechnen Sie aus Radius r bzw. Durchmesser d den Flächeninhalt A des Kreises.
a) r = 96 cm   b) r = 238 mm
c) d = 12,3 cm   d) d = 2,79 km

○ **2** Berechnen Sie Radius r und Durchmesser d des Kreises mit dem Flächeninhalt A.
a) $A = 50\,cm^2$ b) $A = 320\,m^2$
c) $A = 63{,}5\,dm^2$ d) $A = 1795\,mm^2$

1, 2

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

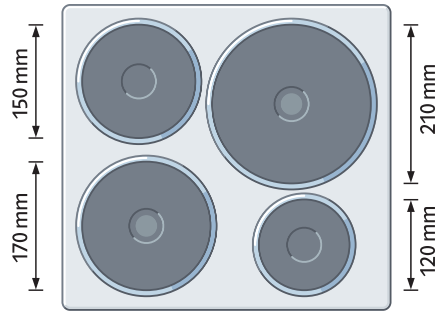
3 Berechnen Sie den Umfang bzw. Flächeninhalt des Kreises.

a) $A = 288\,cm^2$ b) $A = 0{,}73\,dm^2$
c) $u = 375{,}2\,cm$ d) $u = 0{,}09\,km$

4 Berechnen Sie die fehlenden Angaben.

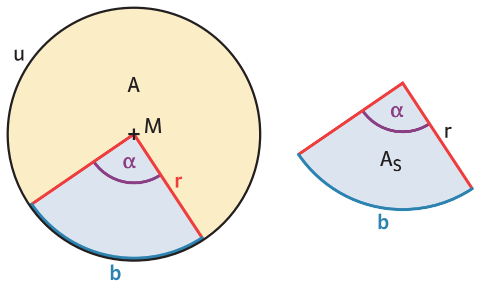
	r	d	A	u
a)	■	8,6 cm	■	■
b)	■	■	$26{,}3\,m^2$	■
c)	■	■	■	149 cm
d)	■	■	$0{,}8\,m^2$	■

5 Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Kochflächen eines Elektroherds.



Man nennt Kreisausschnitte auch Sektoren.

Zwei Radien teilen eine Kreisfläche in zwei **Kreisausschnitte**. Ein **Kreisbogen** ist der jeweils zugehörige Teil des Kreises.
Die Länge des Kreisbogens b eines Kreisausschnitts ist proportional zum zugehörigen Winkel am Kreismittelpunkt, dem **Mittelpunktswinkel α**.
Ebenso ist der Flächeninhalt des Kreisausschnitts A_S proportional zum Winkel α.



Für die Bogenlänge b ergibt sich:

$\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$

mit $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

$\frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360°}$

$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Für den Flächeninhalt A_S erhält man:

$\frac{A_S}{A} = \frac{\alpha}{360°}$

mit $A = \pi \cdot r^2$

$\frac{A_S}{\pi \cdot r^2} = \frac{\alpha}{360°}$

$A_S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Weiterhin gilt:

$\frac{A_S}{A} = \frac{b}{u}$

$\frac{A_S}{\pi \cdot r^2} = \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r}$

$A_S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{b \cdot r}{2}$

Merke

Für die **Länge eines Kreisbogens** mit dem Radius r und dem Mittelpunktswinkel α gilt:

$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Beispiel

a) Aus dem Radius $r = 6{,}0\,cm$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 45°$ wird die Länge des Kreisbogens berechnet.

$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

$b = \pi \cdot 6{,}0\,cm \cdot \frac{45°}{180°}$

$b = 4{,}7\,cm$

Die Länge vom Kreisbogen b beträgt 4,7 cm.

b) Aus der Länge des Kreisbogens $b = 25{,}0\,m$ und dem Radius $r = 5{,}0\,cm$ wird der Mittelpunktswinkel α berechnet.

$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180°}$ $| \cdot 180°$

$b \cdot 180° = \pi r \alpha$ $| : (\pi r)$

$\alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi r}$

$\alpha = \frac{25{,}0\,cm \cdot 180°}{\pi \cdot 5{,}0\,cm}$

$\alpha = 286{,}5\,°$

Der Mittelpunktswinkel α beträgt 286,5 °.

?! 3, 4   5

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

Bei dem **Vollwinkel** $\alpha = 360°$ ist $b = u$ und $A_S = A = \pi \cdot r^2$.

Für den **Flächeninhalt eines Kreisausschnitts** mit dem Radius r und dem Mittelpunktswinkel α gilt:

$A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $\qquad$ $A_S = \frac{b\,r}{2}$

Beispiel

a) Aus dem Radius $r = 20{,}0\,\text{cm}$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 120°$ wird der Flächeninhalt des Kreisausschnitts berechnet.

$A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

$A_S = \pi \cdot 20{,}0^2\,\text{cm}^2 \cdot \frac{120°}{360°}$

$A_S = 418{,}9\,\text{cm}^2$

Der Flächeninhalt vom Kreisausschnitt A_S ist $418{,}9\,\text{cm}^2$.

b) Aus dem Flächeninhalt $A_S = 300{,}0\,\text{cm}^2$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 100°$ wird der Radius r des Kreisbogens berechnet.

$A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $\quad | \cdot 360°$

$A_S \cdot 360° = \pi r^2 \alpha$ $\quad | : (\pi \alpha)$ $\quad$ | Seiten tauschen

$r^2 = \frac{A_S \cdot 360°}{\pi \alpha}$ $\quad | \sqrt{\ }$

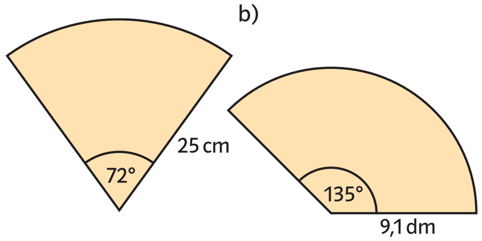
$r = \sqrt{\frac{A_S \cdot 360°}{\pi \alpha}}$ $\qquad r = \sqrt{\frac{300{,}0\,\text{cm}^2 \cdot 360°}{\pi \cdot 100°}}$

$r = 18{,}5\,\text{cm}$

Der Radius r beträgt 18,5 cm.

○ **6** Berechnen Sie die Bogenlänge b und den Flächeninhalt des Kreisausschnitts.

a) b)



○ **7** Berechnen Sie den Radius r des Kreisbogens.

a) $\alpha = 48°$
$b = 6{,}0\,\text{cm}$

b) $\alpha = 330°$
$b = 6{,}4\,\text{m}$

c) $\alpha = 57°$
$A = 199\,\text{cm}^2$

d) $\alpha = 108°$
$A = 76{,}8\,\text{m}^2$

○ **8** Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel α.

a) $b = 4{,}2\,\text{cm}$
$r = 3{,}0\,\text{cm}$

b) $d = 137\,\text{m}$
$b = 86\,\text{m}$

c) $r = 8{,}5\,\text{cm}$
$A = 91\,\text{cm}^2$

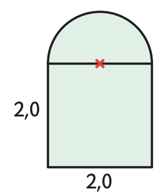
d) $r = 13\,\text{dm}$
$A = 0{,}86\,\text{m}^2$

◒ **9** Berechnen Sie die fehlenden Angaben.

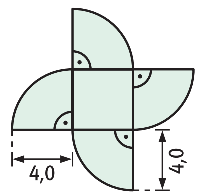
	r	α	b	A
a)	2,8 cm	112°	■	■
b)	■	48°	96,4 m	■
c)	4,4 dm	■	■	$31{,}0\,\text{dm}^2$
d)	■	211°	■	$84{,}9\,\text{cm}^2$
e)	1,74 m	■	9,99 m	■
f)	■	■	33,1 cm	$198{,}5\,\text{cm}^2$
g)	■	85°	95 mm	■

◒ **10** Berechnen Sie den Umfang u und den Flächeninhalt A der Figur. (Alle Maße in cm.)

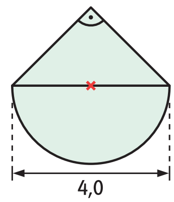
a)



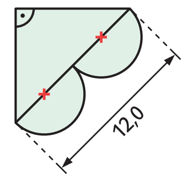
b)



c)

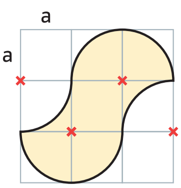


d)

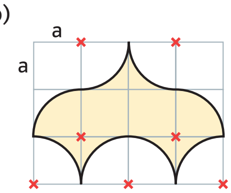


● **11** Berechnen Sie den Umfang u und den Flächeninhalt A jeweils für $a = 1\,\text{cm}$, $a = 3\,\text{cm}$ und für $a = 10\,\text{m}$. Was stellen Sie fest?

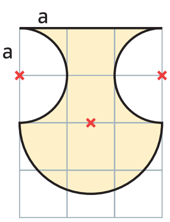
a)



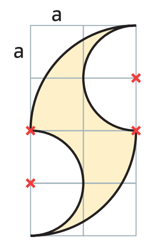
b)



c)



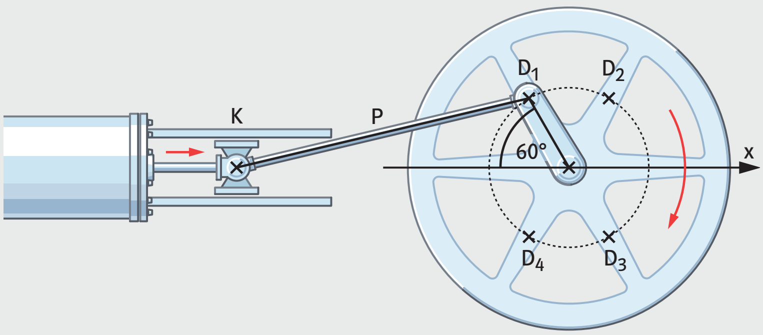
d)



?! 6–11

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

7 Sinus und Kosinus am Einheitskreis



Die Kolbenbewegung der Dampfmaschine wird über den Kreuzkopf K, die Pleuelstange P und den Drehzapfen D in die Drehbewegung des Schwungrads umgesetzt. Die Lage von D ist durch den Drehwinkel bestimmt, den die Kurbel mit der positiven x-Achse einschließt.

→ Welche Winkel gehören zu den Lagen D_1, D_2, D_3 und D_4? Wo befindet sich K, wenn der Drehzapfen in der Lage D_4 ist?

Der Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 heißt **Einheitskreis**. Zu jedem Punkt P auf dem Einheitskreis gehört ein Winkel ∢ AOP im Einheitskreis, in der Zeichnung als α bezeichnet. Die Hypotenuse $\overline{OP}$ der Dreiecke OAP und OBP hat jeweils die Länge 1.

Die Anwendung vom Satz des Pythagoras im Dreieck OAP ergibt $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Es gilt $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \sin\alpha$.

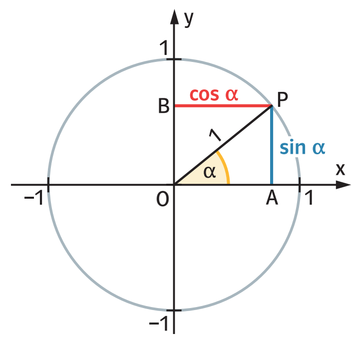
Da $\overline{OP} = 1$ ist,

ergibt sich $\overline{AP} = \sin\alpha$.

Es gilt ebenso $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \cos\alpha$.

Da $\overline{OP} = 1$ ist, ergibt sich $\overline{OA} = \cos\alpha$.

Der Punkt P hat also die Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$.



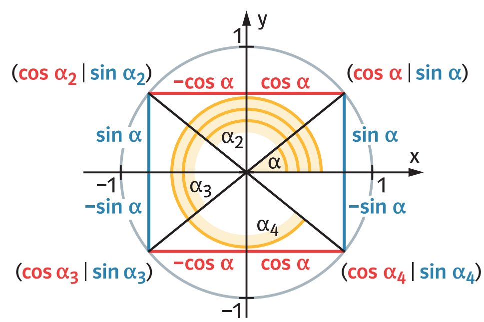
Diese Darstellung gilt zunächst nur im 1. Quadranten des Kooordinatensystems. Sie soll aber auch in den anderen drei Quadranten gelten. Deshalb werden Sinus und Kosinus für die Winkel 90° bis 360° als Koordinaten der Punkte auf dem Einheitskreis festgelegt.

Dafür benutzt man folgende Formeln:

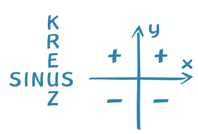
2. Quadrant: $\sin\alpha_2 = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos\alpha_2 = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

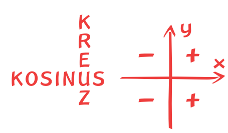
3. Quadrant: $\sin\alpha_3 = \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos\alpha_3 = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

4. Quadrant: $\sin\alpha_4 = \sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos\alpha_4 = \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$



Um sich besser merken zu können, wann Sinus und Kosinus positive und wann negative Werte annehmen, gibt es dieses Kurzschema zu den Vorzeichen der Sinuswerte und Kosinuswerte für die vier Quadranten als Merkhilfe.





Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

Jeder Punkt P auf dem **Einheitskreis** hat die Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$. Die Werte von Sinus und Kosinus für Winkel zwischen 90° und 360° ergeben sich aus den Werten für die Winkel zwischen 0° und 90°. Zu jedem Sinuswert außer 0, 1 und −1 gehören zwei Winkel auf dem Einheitskreis und zu jedem Kosinuswert außer −1 gehören zwei Winkel auf dem Einheitskreis.

Beispiel

a) $\sin 215° = \sin(180° + 35°)$
$= -\sin 35° = -0{,}573\,...$

b) $\cos 167° = \cos(180° - 13°)$
$= -\cos 13° = -0{,}974\,...$

c) Der zweite Winkel α mit $\sin\alpha = \sin 40°$ ist $\alpha = 140°$, denn
$\sin 140° = \sin(180° - 40°)$
$= \sin 40°$

d) Der zweite Winkel α mit $\cos\alpha = \cos 25°$ ist $\alpha = 335°$, denn
$\cos 335° = \cos(360° - 25°)$
$= \cos 25°$

○ **1** Bestimmen Sie zeichnerisch am Einheitskreis (r = 10 cm) für die Winkel $\alpha = 130°$ (170°, 230°, 305°, 340°) den Sinus und Kosinus auf zwei Stellen nach dem Komma.

○ **2** Bestimmen Sie zeichnerisch am Einheitskreis (r = 10 cm) die Winkelgrößen aus dem Bereich $0° < \alpha < 360°$, für die gilt:
a) $\sin\alpha = 0{,}27$ b) $\sin\alpha = 0{,}32$
c) $\sin\alpha = -0{,}58$ d) $\sin\alpha = -0{,}44$
e) $\cos\alpha = 0{,}95$ f) $\cos\alpha = 0{,}17$
g) $\cos\alpha = -0{,}59$ h) $\cos\alpha = -0{,}6$

○ **3** Bestimmen Sie den zweiten Winkel α, wie in Beispiel c) und d).
a) $\sin\alpha = \sin 50°$ b) $\cos\alpha = \cos 40°$
c) $\sin\alpha = \sin 5°$ d) $\cos\alpha = \cos 82°$
e) $\sin\alpha = -\sin 23°$ f) $\cos\alpha = -\cos 38°$

○ **4** Geben Sie den Quadranten und jeweils zwei Winkel an, für die gilt:
a) $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha > 0$,
b) $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha < 0$,
c) $\sin\alpha < 0$ und $\cos\alpha > 0$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

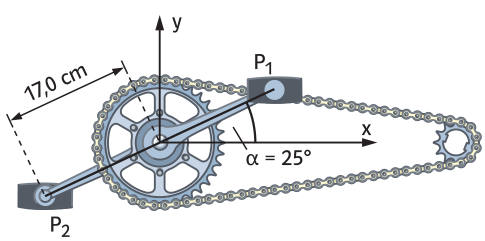
○ **5** Sinus und Kosinus haben besondere Werte für die Winkel 0°; 30°; 45°; 60°; 90°. Solche Werte ergeben sich auch für die um 90°; 180° und 270° größeren Winkel. Legen Sie eine Tabelle, die **Tabelle der besonderen Werte**, von 0° bis 360° an.

◒ **6** Finden Sie, wenn möglich, einen passenden Winkel α mit $0° \leqq \alpha \leqq 90°$.
a) $\sin\alpha = \sin 165°$ b) $\cos\alpha = \cos 300°$
c) $\sin\alpha = \sin 222°$ d) $\sin\alpha = \sin 295°$

◒ **7** Ohne Taschenrechner!
a) Berechnen Sie
$\sin 50° + \sin 140° + \sin 230° + \sin 320°$.
b) Begründen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a).
c) Geben Sie α_2, α_3 und α_4 so an, dass
$\sin 37° + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 = 0$ ist.

● **8** Welche der folgenden Formeln gelten für **alle** Winkel α von 0° bis 90°, welche sind falsch? Begründen Sie am Einheitskreis.
1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
2) $\sin\alpha = \sin(90° + \alpha)$
3) $\cos\alpha = -\cos(360° - \alpha)$
4) $\sin(180° + \alpha) = \sin(180° - \alpha)$
5) $\cos\alpha = -\cos(180° + \alpha)$
6) $\sin\alpha = -\sin(270° + \alpha)$
7) $\sin\alpha = \cos(270° + \alpha)$
8) $\cos\alpha = -\sin(270° - \alpha)$

● **9** Ein Punkt P auf einem Kreis mit dem Radius r hat die Koordinaten $(r \cdot \cos\alpha \mid r \cdot \sin\alpha)$. Berechnen Sie die Koordinaten der Fahrradpedale P_1 und P_2
a) in der gezeichneten Lage.
b) eine Vierteldrehung weiter.

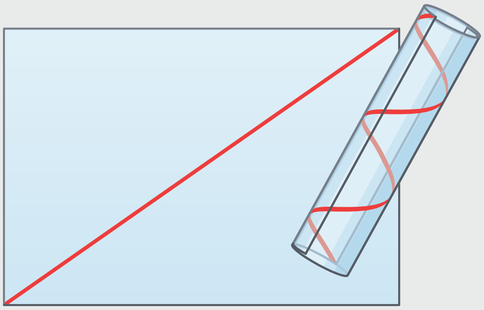


?! 1–7 7, 8 1, 2, 9 9

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

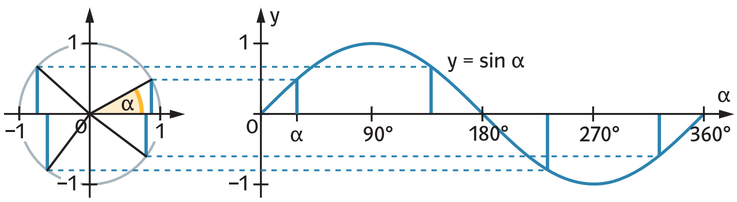
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

8 Sinusfunktion und Kosinusfunktion

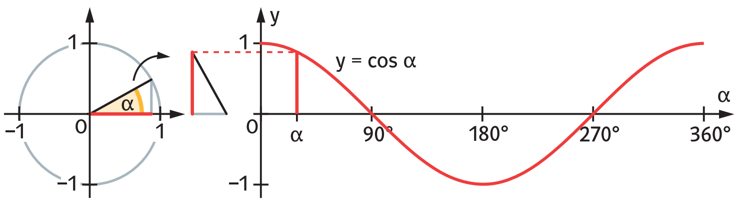


Auf eine Folie wird eine Diagonale gezeichnet. Anschließend wird die Folie zu einem Zylinder gerollt und die entstandene Raumkurve an die Wand projiziert.

→ Beschreiben Sie das Bild. Welcher Eindruck entsteht, wenn der Zylinder um seine Achse gedreht wird?



Zu jedem Wert des Winkels α von 0° bis 360° gehört ein Wert von **sin α**. Wird dieser Zusammenhang grafisch dargestellt, so entsteht der Graph der **Sinusfunktion**.



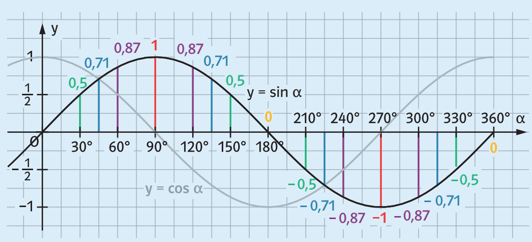
Entsprechend entsteht auch der Graph der **Kosinusfunktion**. Die am Einheitskreis waagerecht liegende Strecke mit der Länge **cos α** wird im Koordinatensystem als y-Wert abgetragen.

Merke Die **Sinusfunktion** und die **Kosinusfunktion** heißen **Winkelfunktionen**. Sie sind für alle Winkel von 0° bis 360° definiert. Ihre y-Werte reichen von −1 bis +1.

Bemerkung Für Zeichnungen von Sinusfunktion und Kosinusfunktion im Koordinatensystem wählt man die Einheiten auf den Koordinatenachsen so, dass das Intervall [0°; 60°] auf der α-Achse ebenso lang ist wie die Einheit auf der y-Achse.

Beispiel **a)** Die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion werden mit der Einheit 2 cm auf der y-Achse gezeichnet. Das Intervall [0°; 360°] wird mit der Einheit 12 cm auf der α-Achse gezeichnet. Eine gute Zeichnung entsteht mithilfe der Werte von Sinus und Kosinus für 0°; 30°; 45°; 60°; 90°; usw.

Dabei werden die Näherungen $\sin 45° \approx 0{,}71$ und $\sin 60° \approx 0{,}87$ usw. benutzt.



Am Graph ist zu erkennen, dass im Intervall [0°; 360°] zu jedem Sinuswert genau zwei Winkel α gehören.

Die entsprechende Gleichung $\sin\alpha = b$ hat also zwei Lösungen.

Dasselbe gilt für die Kosinusfunktion.

Ausnahme: $\sin\alpha = 0$ hat im Intervall [0°; 360°] drei Lösungen 0°; 180° und 360°,

$\sin\alpha = 1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 90° als Lösung,

$\sin\alpha = -1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 270° als Lösung,

$\cos\alpha = -1$ hat im Intervall [0°; 360°] nur 180° als Lösung.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Beispiel

b) $\sin\alpha = 0{,}8$

Wie groß ist der Winkel α?

Der Taschenrechner liefert die erste Lösung $\alpha_1 \approx 53{,}1°$.

Aus $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

ergibt sich die 2. Lösung $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 126{,}9°$

c) $\cos\alpha = 0{,}8$

Wie groß ist der Winkel α?

Der Taschenrechner liefert die erste Lösung $\alpha_1 \approx 36{,}9°$.

Aus $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

ergibt sich die 2. Lösung $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 \approx 323{,}1°$

1 Zeichnen Sie die Sinuskurve und die Kosinuskurve in ein Koordinatensystem mit der Einheit

a) 3 cm,
b) 1 cm.

2 Zeichnen Sie das Kurvenstück mit der angegebenen Einheit. Berechnen Sie dazu die y-Werte in Schritten von 15°.

a) $y = \sin\alpha$; $0° \leqq \alpha \leqq 90°$; Einheit 5 cm
b) $y = \sin\alpha$; $0° \leqq \alpha \leqq 120°$; Einheit 10 cm

3 Zwei Kurven, ein Koordinatensystem

a) Zeichnen Sie die Sinuskurve und die Kosinuskurve im selben Koordinatensystem mit der Einheit 2 cm.
b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, für welche Winkel $\sin\alpha = \cos\alpha$ und für welche Winkel $\sin\alpha = -\cos\alpha$ gilt.

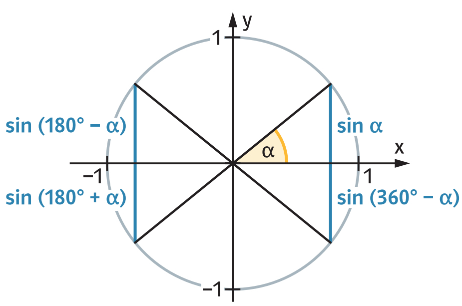
4 Zeichnen Sie zwei Sinuskurven in ein Koordinatensystem mit denselben Koordinatenachsen

- die Sinuskurve mit der Einheit 1 cm.
- die linke Hälfte der Sinuskurve mit der Einheit 2 cm.

Beschreiben Sie ihre Beobachtungen.

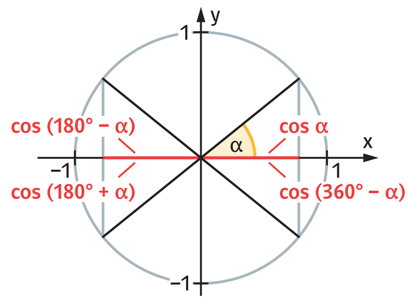
Berechnet man aus $\sin\alpha = 0{,}5$ den Wert von α mit dem Taschenrechner, muss man erst den Taschenrechner auf Grad einstellen.
$\alpha = \sin^{-1}(0{,}5) = 30°$.
$\sin^{-1}$ ist die Umkehrung von sin. Verschiedene Taschenrechner nutzen unterschiedliche Tastenkombinationen.

5 Geben Sie den zweiten Winkel α_2 an.



a) $\sin\alpha_2 = \sin 50°$
b) $\sin\alpha_2 = \sin 77°$
c) $\sin\alpha_2 = \sin 150°$
d) $\sin\alpha_2 = \sin 200°$
e) $\sin\alpha_2 = \sin 300°$
f) $\sin\alpha_2 = \sin 275°$
g) $\sin\alpha_2 = \sin 111°$
h) $\sin\alpha_2 = \sin 1°$

6 Geben Sie den zweiten Winkel α_2 an.



a) $\cos\alpha_2 = \cos 35°$
b) $\cos\alpha_2 = \cos 62°$
c) $\cos\alpha_2 = \cos 140°$
d) $\cos\alpha_2 = \cos 179°$
e) $\cos\alpha_2 = \cos 300°$
f) $\cos\alpha_2 = \cos 350°$

7 Je zwei der angegebenen Winkel haben denselben Wert der Sinusfunktion. Nennen Sie die zusammengehörigen Winkel. (Wer viel Zeit hat, benutzt hier den Taschenrechner.) Was fällt Ihnen auf?

50°	160°	250°	100°	20°	310°	190°
200°	230°	130°	340°	80°	350°	290°

8 Lösen Sie die Aufgabe mithilfe des Taschenrechners; geben Sie auch die zweite Lösung an.

a) $\sin\alpha = 0{,}2$
b) $\cos\alpha = 0{,}3$
c) $\sin\alpha = 0{,}9$
d) $\cos\alpha = 0{,}7$
e) $\cos\alpha = -0{,}8$
f) $\cos\alpha = -0{,}25$

9 Ermitteln Sie aus den Graphen im Beispiel auf Seite 298 die Intervalle für α, in denen

a) die Sinuskurve fällt.
b) die Kosinuskurve steigt.
c) die Sinus- und auch die Kosinuskurve steigen.
d) die Sinuskurve fällt und die Kosinuskurve steigt.

?! 1 – 9 1 – 4, 9

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

10 Je zwei dieser Winkel haben denselben Wert der Kosinusfunktion. Nennen Sie zusammengehörige Winkel. Was fällt Ihnen auf?

220° 200° 60° 250° 10° 140° 160°
350° 190° 300° 210° 110° 150° 170°

Man kann sich die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion auch von einer dynamischen Geometriesoftware zeichnen lassen. Schauen Sie sich dazu auch den Methodenkasten an.

11 Zeichnen Sie die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion jeweils in ein Koordinatensystem. Ermitteln Sie aus dem entsprechenden Graphen die Intervalle, in denen die
a) Sinusfunktion positiv ist und steigt.
b) Sinusfunktion negativ ist und steigt.
c) Kosinusfunktion positiv ist und fällt.
d) Kosinusfunktion negativ ist und steigt.

12 Zeichnen Sie die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion in ein Koordinatensystem. Geben Sie ein Intervall im Bereich [0°; 360°] an
a) in dem die Sinuskurve unterhalb der α-Achse liegt und steigt,
b) in dem die Kosinuskurve oberhalb der Sinuskurve liegt,
c) in dem beide Bedingungen aus den Teilaufgaben a) und b) zugleich erfüllt sind.

zu Aufgabe 13: Nutzen Sie eine Zeichnung als Hilfe

13 Für welche Winkel haben die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion
a) denselben Wert?
b) den gleichen Wert, verschiedene Vorzeichen?
c) In welchen Bereichen sind die Werte der Sinusfunktion größer als die der Kosinusfunktion?
d) Wo sind die Werte der Sinusfunktion kleiner als die der Kosinusfunktion?

14 Bestimmen Sie jeweils die Winkel α_1 und α_2. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

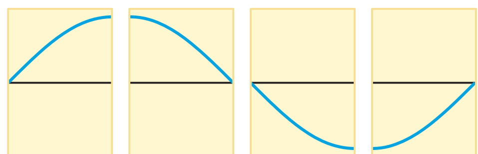
a)

$\sin\alpha$	α_1	α_2
– 0,1	■	■
– 0,86	■	■
– 0,66	■	■
– 0,19	■	■
– 0,95	■	■

b)

$\cos\alpha$	α_1	α_2
– 0,33	■	■
– 0,88	■	■
– 0,45	■	■
– 0,72	■	■
– 0,06	■	■

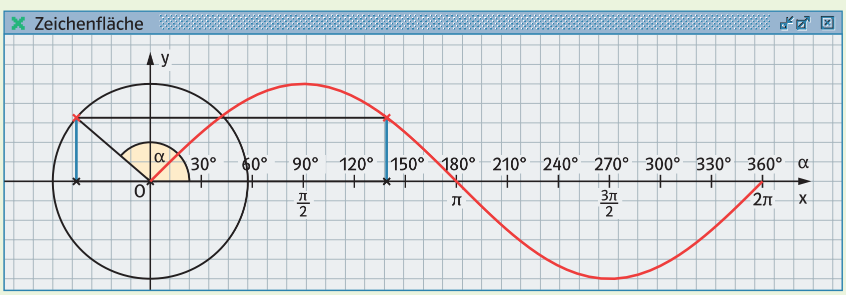
15 Zeichnen Sie die Sinuskurve mit der Einheit 2 cm auf einen 12 cm langen und 6 cm hohen Papierstreifen. Zerschneiden Sie die Kurve in gleich hohe Rechtecke und setzen Sie aus den Kurvestücken neue Kurven zusammen (Drehung um 180° erlaubt). Wie viele Kurven ohne Knick finden Sie? Wie viele, wenn Knicke erlaubt sind?



Methode

Dynamische Geometriesoftware (DGS) und Sinusfunktion

Untersuchen Sie mit einer DGS, wie sich die Koordinaten des Punkts P auf dem Einheitskreis mit dem Winkel ändern. Wie verhält sich der Graph der Funktion an dieser Stelle?



10 – 15   10   11 – 15

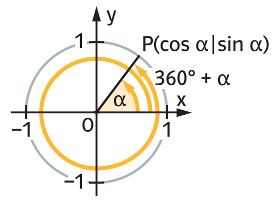
Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

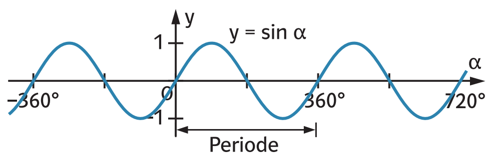
9 Eigenschaften der Sinusfunktion

Das London Eye ist mit 135,36 m Höhe das höchste Riesenrad Europas. Es hat 32 fast vollständig aus Glas geformte Kapseln und dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 0,936 km/h. Für eine komplette Umdrehung benötigt das London Eye 30 Minuten.

→ Welcher Drehwinkel gehört zu folgenden Zeiten:
7,5 min; 15 min; 20 min; 45 min; 1,5 h?

Zur Beschreibung von Drehungen sind oft auch Winkel nötig, die über 360° hinausgehen. Drehbewegungen im negativen Drehsinn werden durch negative Winkel angegeben.
Nach Drehungen um + 360° bzw. − 360° wiederholen sich die Koordinaten des auf dem Einheitskreis umlaufenden Punkts P (cos α | sin α).
Entsprechend werden die Kosinus- und die Sinuskurve durch Verschiebung um Vielfache von 360° nach links und rechts beliebig weit fortgesetzt.
Dabei entstehen **periodische Kurven**. Für alle Winkel α und alle natürlichen Zahlen n gilt dann:





$\cos(\alpha \pm n \cdot 360°) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm n \cdot 360°) = \sin\alpha$

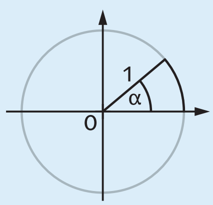
Merke

Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion sind auch für Winkel über 360° und negative Winkel definiert. Ihre Werte wiederholen sich jeweils nach 360°. Sie heißen daher **periodische Funktionen**. Die **Periode** beträgt 360°.

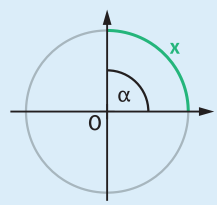
Bemerkung

Bogenmaß

$u = 2\pi r$
für $r = 1$ gilt $u = 2\pi$
Statt dem Winkel α kann man auch die Bogenlänge als Anteil von 2π angeben.
$b = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$



für $\alpha = 90°$ gilt
$x = 2\pi \cdot \frac{90°}{360°}$
$x = \frac{\pi}{2}$
Beim Taschenrechner muss die Anzeige auf RAD (für „Radius“) umgestellt werden!



Beispiel

a) $\sin(-60°) = \sin(-60° + 360°) = \sin 300° \approx -0{,}87$

b) Berechnen Sie das Bogenmaß zu $\alpha = 60°$.
$x = 2\pi \cdot \frac{60°}{360°} = \frac{\pi}{3}$

○ **1** Zeichnen Sie die Sinuskurve von − 180° bis 540° mit der Einheit 1 cm.

○ **2** Geben Sie zwei Winkel im Intervall [0°; 360°] an, für die die Sinusfunktion denselben Wert hat wie
a) sin 450°
b) sin (− 321°).

○ **3** Vervollständigen Sie die Tabelle zur Berechnung des Bogenmaßes x zum Winkel α.

α	30°	45°	75°	150°	180°
x	■	■	■	■	■

?! 2, 3   1

Quellen: iStockphoto (mkos83), Calgary, Alberta; aus 3-12-742721-2 S.259
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Merke

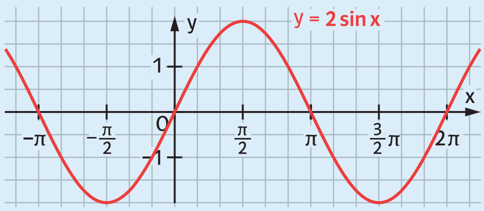
Hier wird das Bogenmaß benutzt!

Der Graph der Funktion $y = a \cdot \sin(x)$ ist eine in y-Richtung gestreckte oder gestauchte Sinuskurve.
Der Faktor a gibt diese Änderung an. Den maximalen Abstand der Kurve zur x-Achse nennt man **Amplitude**. Je größer a ist, desto größer ist die Amplitude. Je kleiner a ist, desto kleiner ist die Amplitude.
Die Periode (2π) bleibt erhalten.

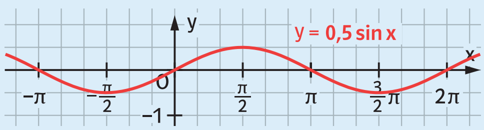
Der Graph der Funktion $y = \sin(b \cdot x)$ ist eine in x-Richtung gestreckte oder gestauchte Sinuskurve.
Der Faktor b gibt diese Änderung der **Periodenlänge** an. Je größer b ist, desto kleiner ist die Periodenlänge. Je kleiner b ist, desto größer ist die Periodenlänge.
Die Amplitude ($-1 \leqq y \leqq 1$) bleibt erhalten.

Beispiel

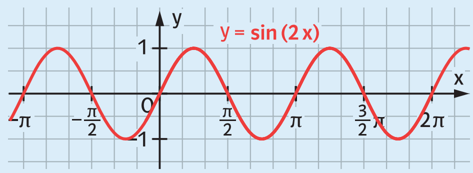
a) Für $a = 2$ erhält man $y = 2 \cdot \sin(x)$.



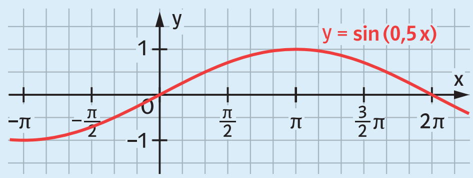
Für $a = 0{,}5$ erhält man $y = 0{,}5 \cdot \sin(x)$.



b) Für $b = 2$ erhält man $y = \sin(2x)$.



Für $b = 0{,}5$ erhält man $y = \sin(0{,}5x)$.



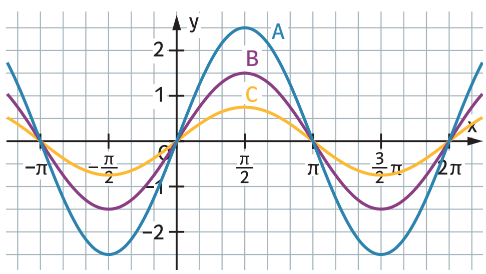
Bemerkung

Wird bei einer Sinuskurve die Amplitude und die Periodenlänge geändert, so erhält man die Funktion der Gleichung $y = a \cdot \sin(bx)$.

4 Änderung der Amplitude

a) Geben Sie die Amplitude für $a = 1{,}5$ an.

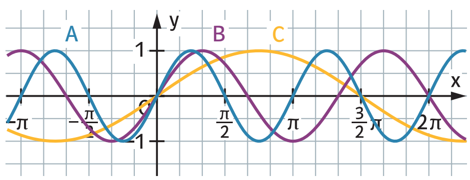
b) Geben Sie die Funktionsgleichungen an.



5 Änderung der Periodenlänge

a) Geben Sie die Periodenlänge für $b = 1{,}5$ an.

b) Geben Sie die Funktionsgleichungen an.

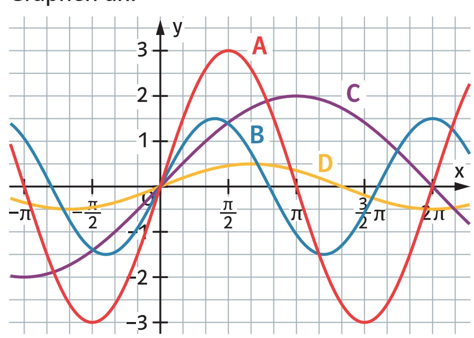


6 Änderung von Amplitude und Periodenlänge.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für $a = 2$ und $b = 0{,}8$ im Vergleich zum Graphen der Funktion $y = \sin(x)$.

b) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für $a = 0{,}2$ und $b = 1{,}5$ im Vergleich zum Graphen der Funktion $y = \sin(x)$.

c) Geben Sie die Funktionsgleichungen für die Graphen an.



?! 4, 5 6

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

1 Daten erfassen

Der Schülerrat möchte ein Sportturnier durchführen. Zunächst soll durch eine Umfrage ermittelt werden, ob daran bei den Mitschülerinnen und Mitschülern überhaupt Interesse besteht und welche Sportart gegebenenfalls in Frage kommt.

→ Entwerfen Sie einen geeigneten Fragebogen. Achten Sie darauf, dass die gewünschten Informationen damit erfragt werden können und, dass er leicht ausgewertet werden kann.

Statistische Erhebungen helfen Fragen zu klären. Um die dazu notwendigen Daten zu erhalten, müssen sinnvolle Umfragen, Experimente oder Recherchen durchgeführt werden.
Möchte man z. B. über das Freizeitverhalten Jugendlicher Auskunft bekommen, so führt man eine Umfrage oder eine Recherche mit Fragen zum Thema Freizeitverhalten durch. Möchte man die Qualität eines Geräts überprüfen, so macht man ein Experiment.

Merke

Die **Daten** einer **statistischen Erhebung** können durch Umfragen, Experimente oder Recherchen ermittelt werden. Dazu sind geeignete Fragebögen, Nachschlagewerke, Datenbanken oder Messmethoden notwendig.

Beispiel

a) Umfrage zur Haustierhaltung
Mögliche Fragen zu:
- Art der Tiere
- Anzahl der Tiere
- monatliche Kosten
- zeitlicher Pflegeaufwand

Die Daten werden durch Umfragen mit einem Fragebogen ermittelt.

b) Überprüfung der Reifenqualität
Mögliche Fragen zu:
- Bremsweg bei trockener Fahrbahn
- Bremsweg bei nasser Fahrbahn
- Haftung bei Schnee
- Lebensdauer

Die Daten werden durch Experimente und Messungen ermittelt.

○ **1** Informieren Sie sich über die Entwicklung der Schülerzahlen an Ihrer Schule. Was sind geeignete Fragen? Wie können Sie die benötigten Daten ermitteln?

○ **2** Die Qualität von Handy-Akkus soll überprüft werden. Überlegen Sie sich mögliche Fragen sowie geeignete Experimente und Messungen, um die Daten zu ermitteln.

◒ **3** Finden Sie heraus, welche zehn Orte oder Stadtteile Ihrer Schule am nächsten liegen. Überlegen Sie sich geeignete Hilfsmittel für Ihre Recherche.
Die Entfernung soll gemessen werden
a) per Luftlinie,
b) durch die Länge der Straßenverbindung.

?!   1 – 3   1, 3   1 – 3

Quellen: iStockphoto (Steve Debenport), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.122

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

4 In zwei Klassen wurde dieselbe Umfrage mit zwei verschiedenen Fragebögen durchgeführt.

Fragebogen 1
Das Rechnen mit dem Handy im Unterricht sollte erlaubt sein?
ja ☐ nein ☐

Fragebogen 2
Das Rechnen mit dem Handy im Unterricht sollte nicht verboten sein.
ja ☐ nein ☐

Die Umfrage mit Fragebogen 1 ergab in einer Klasse: 23 ja, 5 nein. In einer anderen Klasse ergab Fragebogen 2 das Ergebnis: 15 ja, 13 nein. Finden und notieren Sie mögliche Gründe für die unterschiedlichen Ergebnisse.

5 Eine Schule plant einen Kiosk einzurichten. Mit einem Fragebogen soll erfasst werden, was die Schülerinnen und Schüler davon halten.

1. Es kann schon mal sein, dass ich das Haus ohne Frühstück verlasse. ja ☐ nein ☐
2. Manchmal würde ich mir gerne etwas zum Frühstück kaufen. ja ☐ nein ☐
3. An der Schule sollte es einen Kiosk geben. ja ☐ nein ☐
4. In diesem Kiosk sollte es auch Vollwertkost zu günstigen Preisen geben. ja ☐ nein ☐

a) Begründen Sie, weshalb die Fragen eine positive Beantwortung aufdrängen. Nennen Sie weitere Beispielfragen, denen man leicht zustimmen kann.
b) Erstellen Sie einen Fragebogen, der zu einem negativen Ergebnis führen könnte.

6 Recherchieren Sie, welche Fußballvereine in der Bundesliga in den letzten fünf Jahren besonders erfolgreich waren.
a) Bewerten Sie den ersten Platz mit fünf Punkten, den zweiten Platz mit drei Punkten und die Plätze drei bis sechs mit je einem Punkt. Erstellen Sie eine Rangliste.
b) Ändern Sie die Bewertung: Platz eins bekommt sechs Punkte, Platz zwei bringt fünf Punkte, usw.
c) Stellen Sie dar, wie sich die Bestenliste durch die verschiedenen Punktzahlen ändert.

7 Beim Bogenschießen wird auf eine Scheibe mit 1,20 m Durchmesser aus einer Entfernung von 75 m geschossen. Eine Bogenschützin erreichte folgende Ergebnisse:

Jan.	512	Febr.	498	März	501
Apr.	520	Mai	531	Juni	524
Juli	513	Aug.	508	Sept.	521
Okt.	496	Nov.	515	Dez.	517

a) In welchem Monat hatte die Bogenschützin den geringsten bzw. den größten Erfolg? Wie groß ist der Unterschied zwischen diesen beiden Werten?
b) Sortieren Sie die Liste neu von der kleinsten bis zur größten Punktezahl. Prüfen Sie, ob die Bogenschützin im Laufe des Jahres besser wird. Erläutern Sie Ihre Beobachtung.

8 Für verschiedene Lebensmittelmärkte wird die Kundenzufriedenheit ermittelt. Bei einer Umfrage werden Preise, Warenangebot und Service abgefragt und daraus eine Gesamtnote erstellt und veröffentlicht.
a) Überlegen Sie, ob weitere Aspekte sinnvoll wären.
b) Wie kann die Gesamtnote ermittelt werden?
c) Welche Einflüsse können beim Ergebnis eine Rolle spielen?

6, 7 4, 5, 7, 8 6 5, 6

Quellen: dreamstime.com (Alain Lauga), Brentwood, TN; aus 3-12-742711-0 S.123

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

2 Absolute und relative Häufigkeit

Ein Computerhersteller liefert Tablets an verschiedene Einzelhändler. Die Service-Abteilung hält fest, wie viele Geräte ausgeliefert und wie viele davon später reklamiert wurden:

Einzelhändler A: 100 Geräte, davon 4 mit Mängeln
Einzelhändler B: 40 Geräte, davon 3 mit Mängeln
Einzelhändler C: 20 Geräte, davon 1 mit Mängeln

Eine Service-Mitarbeiterin behauptet, dass Einzelhändler A schlecht verarbeitete Tablets erhalten habe, da dieser die meisten Geräte reklamiert hat.
→ Was meinen Sie?

Die Schülerinnen und Schüler der Berufsfachschulklassen können sich für eine zusätzliche Prüfung für ein Fremdsprachenzertifikat anmelden. Die Anmeldezahlen sind in der Tabelle erfasst.

	Klasse 1	Klasse 2	
Anzahl der Schülerinnen und Schüler	30	25	Gesamtzahl
Anzahl derer, die sich für die Prüfung angemeldet haben	12	11	absolute Häufigkeit
Anteile der angemeldeten Schülerinnen und Schüler	$\frac{12}{30} = 0{,}40 = 40\,\%$	$\frac{11}{25} = 0{,}44 = 44\,\%$	relative Häufigkeit

Merke

Die **absolute Häufigkeit** gibt die Anzahl an, wie oft eine Antwort oder ein Ergebnis vorkommt.
Die **relative Häufigkeit** eignet sich gut zum Vergleich statistischer Erhebungen.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Beispiel

Die Verteilung der Blutgruppen wird ermittelt.
Die Summe der absoluten Häufigkeiten ergibt die Gesamtzahl der untersuchten Personen.
Es wurden insgesamt 600 Personen untersucht.

Blutgruppe	A	B	AB	0
absolute Häufigkeit	240	90	30	240
relative Häufigkeit	40 %	15 %	5 %	40 %

Rechnung zu Blutgruppe A: $\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{240}{600} = \frac{40}{100} = 40\,\%$

Genauso lassen sich die relativen Häufigkeiten zu den anderen Blutgruppen berechnen.

○ **1** 400 Schülerinnen und Schüler wurden befragt, ob sie sich eine Schulcafeteria wünschen. Die Umfrage ergibt:

sehr dafür	12%
eigentlich dafür	36%
unentschieden	18%
eigentlich dagegen	24%
auf keinen Fall	10%

Berechnen Sie die absoluten Häufigkeiten.

○ **2** Geben Sie die relative Häufigkeit jeweils als Bruch, als Dezimalzahl und in Prozent an.

a) 12 von 24
b) 400 von 1000
c) 16 von 30
d) 26 von 1800
e) 25 von 25

?! 1, 2

Quellen: iStockphoto (Zoranm), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.124
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **3** 500 g Mischbrot enthält 200 g Weizenmehl, 100 g Roggenmehl, 100 g Wasser und 100 g sonstige Bestandteile (Sauerteig, Hefe, Salz).

a) Erstellen Sie eine geeignete Tabelle. Tragen Sie die absolute Häufigkeit der Bestandteile ein.

b) Berechnen Sie die zugehörigen, relativen Häufigkeiten. Tragen Sie sie in die Tabelle ein.

◒ **4** Mehrere Klassen einer Schule planen eine Abschlussfahrt. Dabei sollen klassenübergreifend drei verschiedene Ziele angeboten werden. Die Ergebnisse der Abstimmung sind in der Tabelle dargestellt.

	London	Barcelona	Paris	Rom
absolute Häufigkeit	40	125	55	30

a) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie um die relativen Häufigkeiten.

b) Führen Sie eine Probewahl in Ihrer Klasse durch. Erstellen Sie wieder eine Tabelle mit den absoluten und den relativen Häufigkeiten. Vergleichen Sie die beiden Tabellen.

c) Die Fahrt nach Rom findet nicht statt. Alle die dieses Ziel bei der Probewahl gewählt haben, müssen neu wählen. Entscheiden Sie, wohin die Schülerinnen oder Schüler wechseln und prüfen Sie, wie sich dadurch die relativen Anteile bei den anderen Zielen verändert haben.

◒ **5** Die Zeugnisnoten in Mathematik einer Berufsfachschule verteilen sich wie folgt:

	1	2	3	4	5	6
Klasse a	1	5	10	8	4	0
Klasse b	0	3	9	10	5	1
Klasse c	0	4	11	11	4	0
Klasse d	2	3	8	10	2	1

a) In welcher Klasse ist der prozentuale Anteil der Note „ausreichend“ am größten?

b) Wie viel Prozent haben in den einzelnen Klassen „gut“ oder „befriedigend“?

c) Welche Klasse ist besonders leistungsstark?

◒ **6** Ein Fitnesscenter hat 160 Mitglieder. Für die dort angebotenen Kurse liegen folgende Anmeldezahlen vor:

	Workout	Step	Bauch-Beine-Po	Yoga
relative Häufigkeit	20 %	5 %	15 %	10 %

a) Warum beträgt die Summe der relativen Häufigkeiten nicht 100 %?

b) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie um die absoluten Häufigkeiten.

c) Warum ergibt die Summe der absoluten Häufigkeiten nicht 160?

● **7** In Deutschland gibt es etwa 42,2 Millionen Pkw. Davon wurden 15,0 Millionen neu gekauft, 25,1 Millionen gebraucht gekauft und 2,2 Millionen geleast.

a) Die Summe der absoluten Häufigkeiten ist nicht 42,2 Millionen. Woran liegt das?

b) Geben Sie die zugehörigen relativen Häufigkeiten an.

● **8** In Waldhausen besuchen 2439 Schülerinnen und Schüler die Sekundarstufe I. Die Gemeinde veröffentlicht eine Statistik.

Aus den Gemeinden…

Gemeinde Waldhausen	
Katholiken	48,7 %
Protestanten	22,5 %
Moslems	10,7 %
Andersgläubige und Konfessionslose	18 %

Konfessionen der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I.

a) Die Summe der relativen Häufigkeiten ergibt nicht 100 %. Woran kann das liegen?

b) Wie viele Schülerinnen und Schüler haben die einzelnen Konfessionen?

c) Die Summe der absoluten Häufigkeiten ist nicht 2439. Woran liegt das? Für welche Konfession ist es sinnvoll, die absolute Häufigkeit so zu ändern, dass die Probe stimmt?

?! 3–8 4–8

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

3 Klassenbildung

Berufliche Schulen haben oft einen sehr großen Einzugsbereich. Deshalb haben viele Schülerinnen und Schüler einen langen Anfahrtsweg.
→ Ermitteln Sie die Zeit, die die Schülerinnen und Schüler Ihrer Klasse für die Fahrt zur Schule benötigen.
→ Wie können Sie die Ergebnisse möglichst übersichtlich aufschreiben?

Sind bei einer Datenerhebung viele, verschiedene Antworten möglich, wird die Darstellung unübersichtlich. Dann sortiert man die Daten und fasst nah beieinanderliegende Daten in Klassen zusammen.

Merke Werden die Daten einer Erhebung in verschiedene Bereiche (Klassen) eingeteilt, nennt man dies **Klassenbildung**. Die Bereiche müssen so gewählt werden, dass man jeden Wert genau in einen Bereich einsortieren kann. Die genaue Information über den Wert geht dabei verloren.

Beispiel Monatsverdienst (in Euro) von einigen Mitarbeitern einer Firma: 480; 2354; 3290; 2355; 354; 2473; 1890; 1660; 2754; 480; 3409; 345; 1280; 956; 1132; 2354; 3890; 320; 456; 780; 534; 1800; 1970; 3106; 2345; 2467; 1480; 567; 2589; 1290; 410; 2145; 3290; 2879; 1869; 2907; 2709; 3208; 2145; 2740

Alle Werte liegen zwischen 0 und 4000. Übersichtlichere Darstellung mithilfe von Klassenbildung:

Monatsverdienst (in €)	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
0 bis unter 800	10	$\frac{10}{40}$ = 5,0 %
800 bis unter 1600	4	$\frac{4}{40}$ = 10,0 %
1600 bis unter 2400	12	$\frac{12}{40}$ = 30,0 %
2400 bis unter 3200	9	$\frac{9}{40}$ = 22,5 %
3200 bis unter 4000	5	$\frac{5}{40}$ = 12,5 %
Insgesamt	40	100,0 %

Bemerkung Um die Daten untersuchen zu können, werden sie der Größe nach geordnet, man spricht von einer **Rangliste**. Die verschiedenen Klassen werden möglichst gleich groß gewählt.

○ **1** Die Geschwindigkeitskontrolle in einer Ortschaft ergab folgende Messungen (in km/h):
38; 56; 45; 33; 42; 35; 50; 61; 72; 37; 38; 55; 47; 43; 59; 43; 36; 68; 53; 51; 61; 45; 38; 36; 52; 55; 45; 52; 42; 49; 67; 44; 47; 57; 35; 36; 40; 48; 43; 53; 61; 40; 40; 38; 48; 57; 68; 35; 33; 46; 48; 47; 49; 50; 40; 38; 65; 50; 41; 35; 46; 61; 71; 50; 43; 39; 35; 49; 48; 40

a) Sortieren Sie die gemessenen Werte in die folgenden Bereiche (in km/h) ein: unter 41, 41 bis 50, 51 bis 60, über 60. Wie viele Messungen wurden insgesamt durchgeführt?
b) Geben Sie die absoluten Häufigkeiten und die relativen Häufigkeiten in einer Tabelle an.

○ **2** Eier werden in verschiedenen Gewichtsklassen angeboten.
Recherchieren Sie, was die Gewichtsklassen S, M, L und XL genau bedeuten.

◒ **3** Bei einer Erhebung wird das Körpergewicht (in kg) von 20 Personen ermittelt.
67; 65; 54; 78; 90; 75; 71; 55; 61; 60; 57; 67; 80; 85; 96; 58; 64; 67; 73; 61
Wählen Sie gleich große, geeignete Klassen und berechnen Sie die absolute und die relative Häufigkeit.

?! 1, 3   2   2

Quellen: Fotolia.com (Monkey Business), New York; aus 3-12-742711-0 S126
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

4 Ein Marketingunternehmen ermittelt, wie viel Euro Jugendliche monatlich für Kleidung ausgeben. Dazu werden 100 Jugendliche befragt:

Monatliche Ausgaben	Anzahl
0 Euro bis unter 25 Euro	2
25 Euro bis unter 50 Euro	5
50 Euro bis unter 75 Euro	45
75 Euro bis unter 100 Euro	25
100 Euro bis unter 125 Euro	10
125 Euro bis unter 150 Euro	8
150 Euro und mehr	5

a) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten.
b) Wie ändern sich die Werte, wenn man die Klassen doppelt so breit wählt?

5 Körpergrößen
a) Ermitteln Sie in Ihrer Klasse die Körpergröße aller Schülerinnen und Schüler. Wählen Sie geeignete Klassen und bestimmen Sie die absolute und die relative Häufigkeit.
b) Ein Schüler schlägt für die ermittelten Körpergrößen folgende Klasseneinteilung vor:

- 140 cm bis 150 cm
- 150 cm bis 180 cm
- 180 cm bis 200 cm

Beurteilen Sie seinen Vorschlag.

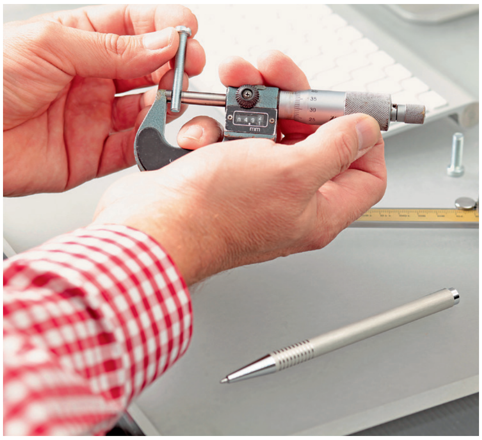
6 Die Tabelle zeigt die Anzahl der Geburten in einer Klinik in einem Jahr und das Alter der Mütter.

Alter der Mütter	Zahl der Geburten	
	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
15 bis unter 20	100	■
20 bis unter 25	■	■
25 bis unter 30	■	32,5 %
30 bis unter 35	700	■
35 bis unter 40	■	10,0 %
40 bis unter 45	■	2,5 %
insgesamt	2000	■

a) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und vervollständigen Sie sie.
b) Wie ändern sich jeweils die absolute und die relative Häufigkeit, wenn man die Klassen doppelt so breit wählt?

7 Ein Jugendverband veröffentlicht verschiedene Videos im Internet und zählt, wie oft die Videos jeweils angeklickt werden:
306; 15; 34; 47; 287; 154; 32; 158; 23; 65; 30; 367; 257; 143; 265; 398; 69; 15; 236; 60; 47; 176; 132; 390; 210; 46; 12; 183; 167; 234; 216; 58; 12; 354; 18; 212; 308; 181; 96; 21; 165; 351; 18
a) Stellen Sie die Werte mithilfe von gleich großen Klassen übersichtlich dar. Ergänzen Sie die relativen Häufigkeiten.
b) Recherchieren Sie im Internet, wie häufig Videos von verschiedenen, bekannten Darstellern angeklickt werden. Notieren Sie jeweils die Anzahl. Stellen Sie die Ergebnisse mit geeigneten Klassen in einer Tabelle dar.

8 Bei einer Qualitätskontrolle wird der Durchmesser von 40 Schrauben überprüft.
Dabei erhält man das folgende Ergebnis (in mm):
5,08; 4,98; 4,97; 4,98; 5,02; 5,04; 5,12; 5,02; 4,89; 4,95; 5,23; 5,00; 5,15; 4,78; 4,99; 5,09; 4,87; 4,98; 5,01; 5,07; 5,14; 5,21; 4,89; 4,76; 5,32; 5,07; 4,98; 4,81; 5,00; 5,24; 4,94; 5,02; 4,99; 4,86; 4,99; 5,23; 5,10; 5,02; 4,99; 4,86
a) Stellen sie das Ergebnis mithilfe von Klassen übersichtlich dar.
b) Machen Sie Aussagen über die Qualität der Schrauben.



?! 4–8   4–6, 8   5, 7

Quellen: Fotolia.com (Thomas Siepmann), New York; aus 3-12-742711-0 S127

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

4 Stichprobe

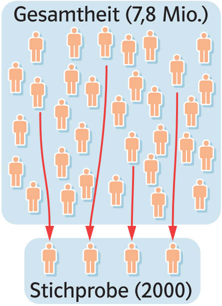
Ein Obsthändler erhält eine Lieferung von 7500 kernlosen Mandarinen. Er möchte ungefähr wissen, wie viele davon doch Kerne enthalten. Dazu greift er 50 Mandarinen heraus und schneidet sie auf. Er findet drei Mandarinen mit Kernen.

→ Warum überprüft der Händler nicht alle Mandarinen?

→ Wie viele kernhaltige Mandarinen werden ungefähr in der Lieferung sein?

Oft ist es nicht möglich, die Gesamtheit zu erfassen. In manchen Fällen wird der zu untersuchende Gegenstand bei der Untersuchung zerstört, in anderen Fällen ist die Gesamtheit zu groß.

Im Norddeutschen Rundfunk wird vormittags die Sendung „Hallo Niedersachsen" ausgestrahlt. Um die Einschaltquote zu ermitteln, werden 2000 Personen befragt. Von Ihnen schauen 86 Personen regelmäßig diese Sendung. Daraus ergibt sich eine Einschaltquote von $\frac{86}{2000} = 0{,}043 = 4{,}3\,\%$.
In Niedersachsen schauen diese Sendung schätzungsweise 4,3 % von 7,8 Mio. Einwohnern, das sind 335 400 Personen.



Merke

Wird bei einer statistischen Erhebung zu einer bestimmten Fragestellung nur ein Teil der Gesamtheit befragt, so spricht man von einer **Stichprobe**. Das Ergebnis einer gut gewählten Stichprobe erlaubt Aussagen über die Gesamtheit.

Beispiel

An einem Urlaubsort werden 1200 Gäste befragt, wie sie angereist sind.

Verkehrsmittel	Auto	Bahn	Bus	Flugzeug
absolute Häufigkeit	756	198	168	78
relative Häufigkeit	0,63	0,165	0,14	0,065

Nach einer Werbekampagne erwartet der Ort für das kommende Jahr 21 000 Gäste.
Berechnen Sie, wie viele Gäste im kommenden Jahr mit der Bahn anreisen werden.
Antwort: Da $21\,000 \cdot 0{,}165 = 3465$ ergibt, rechnet die Bahn mit etwa 3500 Fahrgästen.

○ **1** Ein Automobilwerk kauft 200 000 Scheinwerferlampen.
a) Bei einer Stichprobe sind von 1000 Lampen sechs Lampen defekt. Wie viele Lampen sind wohl insgesamt defekt?
b) Warum reicht eine Stichprobe von 100 Lampen nicht aus?

○ **2** Um festzustellen, ob ein Kuchen, der im Ofen gebacken wird, gar ist, sticht man mit einem Holzstäbchen einmal in den Teig.
a) Ist dieses Verfahren eine „Stichprobe"?
b) Wie kann man vorgehen, damit die Stichprobe eine relativ sichere Auskunft darüber gibt, ob der Kuchen gar ist?

?! 1 1, 2

Quellen: Thinkstock (iStock / SerAlexVi), München; aus 3-12-742711-0 S128
Grafik: media office gmbh, Kornwestheim
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

3 Die Stadt Hannover möchte zur Planung des Wohnungsbaus ermitteln, wie viele der 252 686 Haushalte der Stadt Ein-, Zwei-, Drei- und mehr Personenhaushalte sind. Dazu wird eine Umfrage bei 1000 Haushalten gemacht. Das Ergebnis dieser Stichprobe wird in einer Tabelle festgehalten.

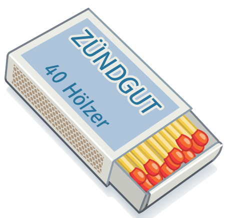
Anzahl der Personen	1	2	3	4	mehr
Anzahl der Haushalte	386	346	141	87	40

a) Bestimmen Sie, wie viele Ein-, Zwei-, Drei- und mehr Personenhaushalte es ungefähr in Hannover gibt.

b) In Düsseldorf sind 7 % der Wohnungen Einzimmerwohnungen; $\frac{1}{5}$ Zweizimmerwohnungen; 31 % Dreizimmerwohnungen und $\frac{42}{100}$ haben 4 Zimmer oder mehr. Vergleichen Sie die Städte Hannover und Düsseldorf.

4 Eine Streichholzfirma stellt täglich 3 Mio. Schachteln Streichhölzer her. Auf der Streichholzschachtel steht: 40 Hölzer. Eine Stichprobe von 5000 Schachteln ergab die in der Tabelle dargestellte Verteilung der tatsächlichen Inhalte.

Inhalt	Anzahl
36	12
37	28
38	226
39	765
40	2517
41	936
42	354
43	162



a) Schätzen Sie, wie viele Schachteln mit der entsprechenden Anzahl Steichhölzer täglich zu erwarten sind.

b) Ein Kunde kauft 20 Schachteln. Wie viele Streichhölzer hat er wohl tatsächlich gekauft?

c) Schätzen Sie, wie viel Prozent der Schachteln mindestens 39 Streichhölzer enthalten.

d) Wie viel Prozent der Schachteln enthalten mehr als 38 und weniger als 43 Streichhölzer?

e) Bei weniger als 38 Streichhölzern kann der Kunde reklamieren. Bei wie viel Prozent der Schachteln ist dies möglich?

5 Bei einer Stichprobe muss man sorgfältig die Bedingungen auswählen, unter denen sie durchgeführt wird. Das Ergebnis soll schließlich auf eine Gesamtheit übertragbar sein. Überprüfen Sie daraufhin die folgenden Stichproben und machen Sie Verbesserungsvorschläge für eine bessere Stichprobe.

a) Ein Hausbesitzer möchte wissen, ob sein Dach noch in Ordnung ist. Dazu überprüft er 30 Dachpfannen, die sich gut erreichbar direkt am Dachfenster befinden.

b) Das Jugendamt möchte wissen, wie viele Familien in einem Bezirk mehr als drei Kinder haben. Es bittet eine Schule der Gemeinde, eine Erhebung durchzuführen.

c) Der Deutsche Mieterbund möchte ermitteln, wie viel Quadratmeter Wohnfläche pro Person zur Verfügung stehen. In zehn Großstädten werden dazu je 100 Haushalte im Stadtzentrum befragt.

d) Zur Planung des öffentlichen Nahverkehrs wird in den Sommerferien täglich zu unterschiedlichen Zeiten eine Fahrgastbefragung durchgeführt.

e) In einer Buchhandlung wird jeder 50. Kunde gefragt, wie viele Bücher er jährlich kauft.

f) Am Flughafen werden Menschen nach ihrem liebsten Urlaubsland befragt.

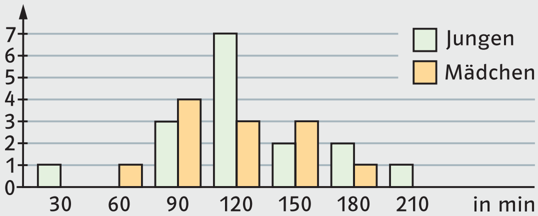
g) Eine Automobilzeitschrift möchte ermitteln, ob sich die hohen Benzinpreise auf das Fahrverhalten der Pkw-Fahrer auswirken. An einigen Tankstellen werden deshalb die Kundinnen und Kunden befragt, die für einen Betrag von mehr als 50 Euro tanken.

3, 4   4, 5   5

Quellen: iStockphoto (Meinzahn), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.129
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

5 Daten darstellen

Dauer in Minuten	30	60	90	120	150	180	210
Jungen	1	0	3	7	2	2	1
Mädchen	0	1	4	3	3	1	0



- → Eine Gruppe Jugendlicher wird befragt, wie lange sie täglich Filme oder Serien im Fernsehen oder im Internet ansehen.
- → Eignet sich das Diagramm für die Darstellung der Antworten?
- → Was lässt sich aus dem Diagramm leichter ablesen als aus der Tabelle?
- → Wie unterscheiden sich die Antworten der Mädchen von denen der Jungen?

Statistische Erhebungen werden grafisch oft mithilfe von **Diagrammen** veranschaulicht.

Merke

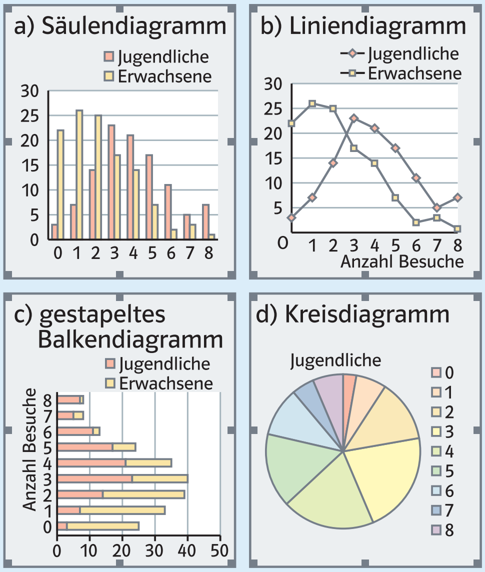
Säulen- und **Balkendiagramme** zeigen deutlich die Größenunterschiede der Daten.
Liniendiagramme machen die Veränderungen von einem Schritt zum nächsten erkennbar. Dafür müssen die Daten in einer sinnvollen Reihenfolge stehen, z. B. im zeitlichen Verlauf.
Kreisdiagramme machen die Anteile von der Gesamtheit besonders leicht erkennbar. Kreisdiagramme können nur eine Messreihe darstellen. In anderen Diagrammen können mehrere Messreihen gemeinsam dargestellt werden.

Beispiel

Wie häufig sind Jugendliche und Erwachsene im letzten Jahr ins Kino gegangen? Stellen Sie die Daten in einem Diagramm dar und erläutern Sie das Diagramm.

Häufigkeit Kinobesuche	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Jugendliche	3	7	14	23	21	17	11	5	7
Erwachsene	22	26	25	17	14	7	2	3	1

a) Die Daten für Jugendliche und Erwachsene sind als Säulen in einem Diagramm zusammen dargestellt.
b) Die Daten sind als Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen und durch eine Linie verbunden worden. Es ist deutlich zu erkennen, welche Besuchszahlen für die Jugendlichen häufiger sind.
c) Die Besuchszahlen für Jugendliche und Erwachsene werden addiert und als gemeinsame Balken dargestellt. Dadurch wird die Gesamtzahl der Besucher/innen deutlich.
d) Nur die Besuchszahlen der Jugendlichen sind dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass mehr als die Hälfte 1-, 2-, 3- oder 4-mal ins Kino gehen. Fasst man die Antworten 3-, 4- oder 5-mal zusammen, so ergibt das mehr als die Hälfte. Fasst man jedoch die Kombination 4-, 5- oder 6-mal zusammen, so ist dies weniger als die Hälfte.



Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Erstellen Sie eine Tabelle mit Ihren Schuhgrößen getrennt für die Schülerinnen und für die Schüler Ihrer Klasse.

a) Stellen Sie die Daten in Säulendiagrammen dar.

b) Wählen Sie ein anderes Diagramm und stellen Sie die Daten erneut dar. Vergleichen Sie die Diagramme.

○ **2** Höchste Tagestemperatur und tiefste Nachttemperaturen einer Juniwoche:

Datum	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.
Tag	21 °C	28 °C	22 °C	19 °C	21 °C	21 °C	21 °C
Nacht	12 °C	10 °C	11 °C	15 °C	14 °C	14 °C	13 °C

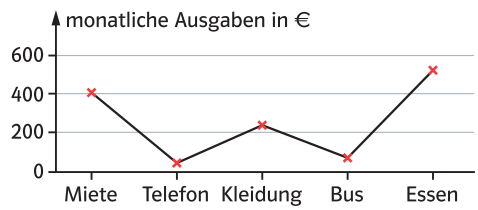
a) Stellen Sie die Tabellenwerte in einem geeigneten Diagramm dar.

b) Recherchieren Sie die aktuellen Temperaturwerte der letzten sieben Tage und tragen Sie sie in dasselbe Diagramm ein.

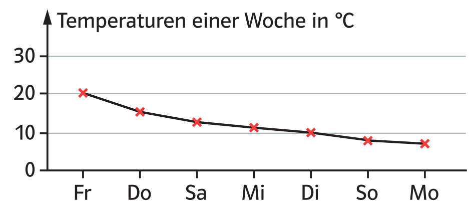
c) Vergleichen Sie die Temperaturverläufe.

○ **3** Für das Diagramm wurde eine ungeschickte Darstellung gewählt. Zeichnen Sie es in einer angemessenen Form neu.

a)



b)



◒ **4** Erläutern Sie, welche Diagrammarten für die beschriebenen Daten gut geeignet sind.

a) Sammelerträge einer Spendenaktion

b) Stimmenanzahl für die beliebtesten Hits

c) Besucherzahlen im Schwimmbad

d) Preisentwicklung im Einzelhandel

e) Verbraucherumfrage zum Kauf von Bioprodukten

◒ **5** In einem Dorf hat sich die Anzahl der Einwohner in den letzten Jahren wie folgt geändert:

Jahr	Frauen	Männer
2008	1080	1122
2009	1056	1114
2010	1062	1110
2011	1058	1114
2012	1050	1116
2013	1045	1112
2014	1048	1108
2015	1046	1104

a) Stellen Sie die Anzahlen der Einwohnerzahlen (Frauen und Männer) in einem gemeinsamen Säulendiagramm dar.

b) Zeichnen Sie mit den gleichen Werten ein Liniendiagramm.

c) Berechnen Sie jedes Jahr die Anzahl der Männer minus die Anzahl der Frauen und geben Sie die Differenzen in eine weitere Zeile der Tabelle ein. Stellen Sie sie als Diagramm dar.

d) Vergleichen Sie die drei Diagramme. Erläutern Sie Vorteile und Nachteile.

◒ **6** Bei einer Umfrage wurden 160 Schülerinnen und Schüler befragt, wie oft sie im Monat in ihrer Freizeit Sport betreiben.

Tage	Anz.	Tage	Anz.	Tage	Anz.	Tage	Anz.
0	6	8	11	16	3	24	0
1	2	9	7	17	2	25	2
2	8	10	10	18	0	26	1
3	8	11	8	19	8	27	5
4	10	12	5	20	11	28	0
5	5	13	9	21	9	29	0
6	6	14	8	22	5	30	1
7	4	15	6	23	0	31	0

a) Es ist sehr aufwendig, ein Diagramm mit 32 Säulen zu zeichnen. Fassen Sie in einer neuen Tabelle jeweils zwei Tage zusammen:

Tage	Anzahl
0 bis 1	8
2 bis 3	16
…	…

Zeichnen Sie dafür ein Säulendiagramm.

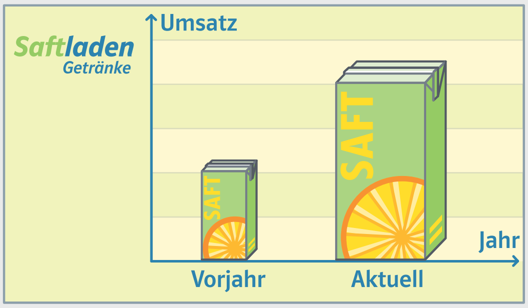
b) Fassen Sie in einer weiteren Tabelle jeweils vier Tage zusammen und zeichnen Sie ein Diagramm. Vergleichen Sie die Diagramme.

?! 1 – 3, 5, 6   1, 2, 4 – 6   2, 5, 6   1, 2, 4

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Daten vergleichen und interpretieren



Der Leiter einer Getränkefirma will die Verdopplung der Saftproduktion in einem Schaubild darstellen.

→ Wie stellt er die Produktionsmenge dar?
→ Welchen Eindruck erweckt das Schaubild?
→ Erstellen Sie selbst ein Schaubild.

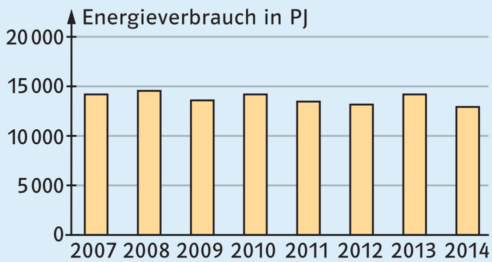
Da Diagramme oft anschaulicher als Tabellen sind, werden sie häufig für Berichte, Präsentationen, auf Plakaten oder in den Medien verwendet. Allerdings kann durch veränderte Diagramme schnell ein falscher Eindruck entstehen. Damit kann man Meinungen beeinflussen.

Merke

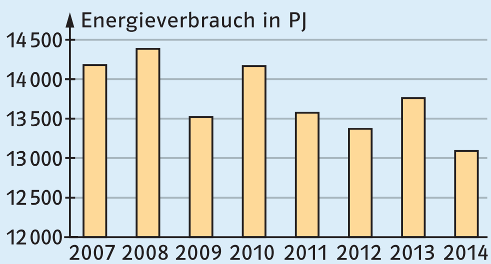
Verschiedene **Diagramme** mit den gleichen Daten können sehr unterschiedlich wirken. Dies geschieht zum Beispiel durch eine unpassend gewählte Skala (Einteilung) an den Achsen oder die Koordinatenachsen schneiden sich nicht im Punkt (0 | 0). Bei Diagrammen mit Symbolen, sogenannten Piktogrammen, kann auch durch die Veränderungen der Größenverhältnisse die Wirkung beeinflusst werden. Körper werden korrekt über ihr Volumen skaliert, Flächen über ihren Flächeninhalt.

Beispiel

a) Veränderung des Maßstabs und des Koordinatenursprungs:

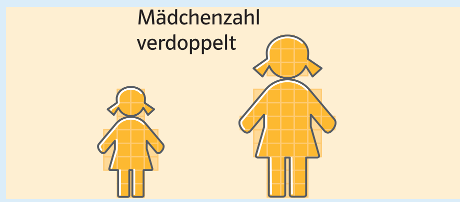


Die y-Achse beginnt im Nullpunkt. Der Energieverbrauch hat sich nur geringfügig geändert.

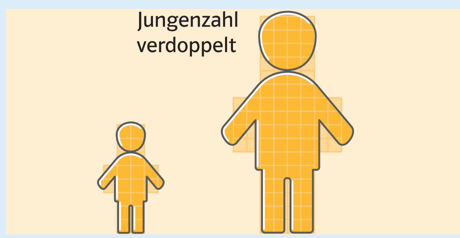


Durch die geänderte Skala und den geänderten Schnittpunkt der Koordinatenachsen scheint sich der Energieverbrauch stark verändert zu haben.

b) Veränderung der Größenverhältnisse:



Die Figur verdoppelt ihre Fläche.
Die Veränderung wird richtig dargestellt.



Die Figur verdoppelt ihre Höhe und ihre Breite. Dadurch vervierfacht sich die Fläche. Es entsteht ein falscher Eindruck.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Eine Firma hat ihren Jahresgewinn verdoppelt. Welches Schaubild gibt den Sachverhalt richtig wieder? Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

Schaubild 1

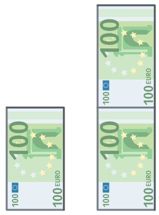
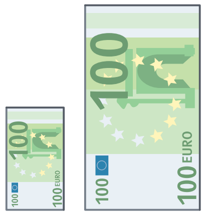
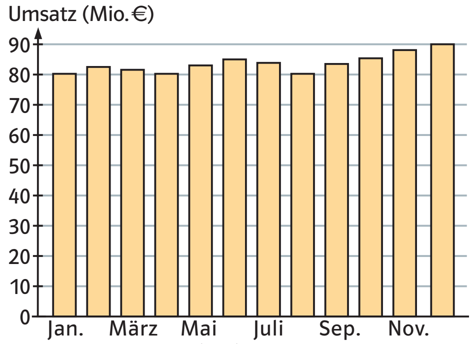


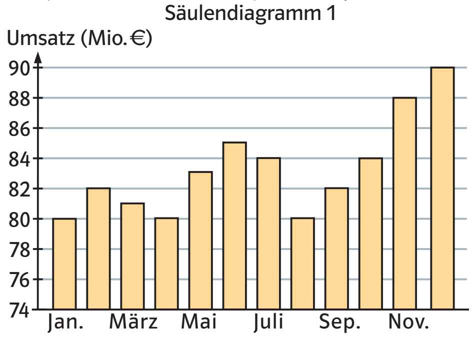
Schaubild 2



○ **2** Ein Hersteller will seinen Jahresumsatz in einem Säulendiagramm veranschaulichen. Zwei Diagramme stehen zur Auswahl.



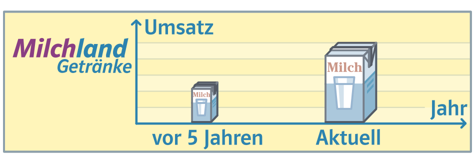
Säulendiagramm 1



Säulendiagramm 2

Vergleichen Sie die beiden Diagramme. Welche Wirkung wird jeweils erzielt?

◒ **3** Ein Milchhof hat seinen Umsatz in fünf Jahren verdoppelt. Gibt das Schaubild den richtigen Sachverhalt wieder?

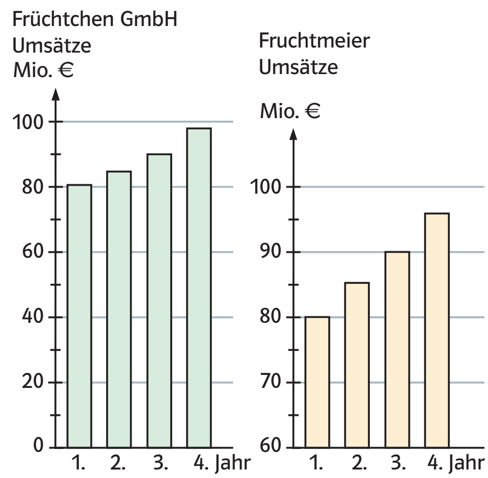


◒ **4** Mitgliederzahlen und ihre Darstellung.

Jahr	2011	2012	2013	2014	2015
Mitglieder im Sportverein	975	890	876	860	795

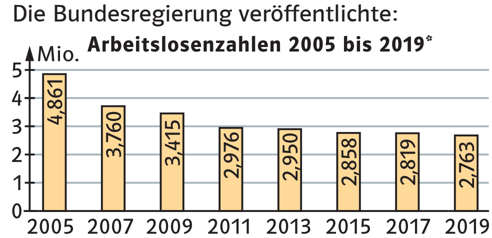
a) Erstellen Sie zu den Daten ein geeignetes Säulendiagramm, das den Eindruck vermittelt, dass die Mitgliederzahl in den letzten Jahren ungefähr gleich geblieben sind.
b) Wie hat sich die Mitgliederzahl tatsächlich entwickelt? Warum wird dies im Diagramm aus Teilaufgabe a) nicht deutlich? Begründen Sie.

● **5** Zwei Fruchtsafthersteller stellen ihre Umsätze der letzten vier Jahre in Diagrammen dar.



Welche Firma hat die größere Umsatzsteigerung? Begründen Sie Ihre Antwort.

● **6** Die Bundesregierung veröffentlichte:



*Ab 2015 Eckwerteprognose der Bundesregierung
Quelle: Finanzbericht 2015

a) Überlegen Sie, welcher Eindruck damit vermittelt wird und welche Aussagen darüber gemacht werden können.
b) Ändern Sie das Diagramm (mit den gleichen Daten) so, dass ein anderer Eindruck entsteht und andere Aussagen gemacht werden können.

?! 3, 4 1–6 6 6

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach; Klett Archiv

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

7 Kenngrößen

Klasse A
Einnahmen Schulfest

Stand	€
Kuchen	246,00
Brötchen	85,50
Säfte	124,50
Torwand	99,00
Rallye	26,00
Karaoke	45,50

Klasse B
Einnahmen Schulfest

Stand	€
Würstchen	122,50
Tee	68,00
Waffeln	212,00
Quiz	43,50
Lose	85,00
Versteigerung	32,00

Schülerinnen und Schüler von zwei Klassen haben auf einem Schulfest viele Spiel- und Verkaufsstände organisiert.

→ Welcher Stand hat am meisten Geld eingenommen, welcher am wenigsten?
→ Wie viel Euro mehr hat der Stand mit den meisten Einnahmen im Vergleich zu dem mit den wenigsten Einnahmen?
→ Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen den beiden Klassen.

Um sich nach einer Datenerhebung einen Überblick zu verschaffen, verwendet man **Kenngrößen**. Damit können statistische Erhebungen gut interpretiert und miteinander verglichen werden. Man unterscheidet dabei Lagemaße und Streuungsmaße.

Lagemaße beschreiben einen Mittelwert.

Merke

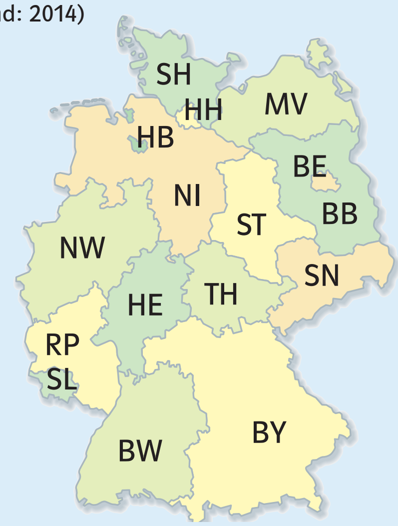
Die am häufigsten verwendeten **Lagemaße** sind die folgenden:
Die Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl der Werte heißt **arithmetisches Mittel**. Der Wert, der am häufigsten vorkommt, heißt **Modalwert (Modus)**. Einen Modalwert gibt es nicht in jeder Datenerhebung. Der **Zentralwert (Median)** ist der Wert in der Mitte, wenn man die Daten nach der Reihenfolge in der sogenannten Rangliste ordnet.

Bemerkung

Bei einer geraden Anzahl von Einträgen ist der Zentralwert das arithmetische Mittel der beiden mittleren Einträge.

Beispiel

Einwohnerzahlen der 16 Bundesländer in Millionen (Stand: 2014)



Land	Einwohner (in Mio.)
Bremen	0,7
Saarland	1,0
Mecklenburg-Vorpommern	1,6
Hamburg	1,7
Thüringen	2,1
Sachsen-Anhalt	2,2
Brandenburg	2,4
Schleswig-Holstein	2,8
Berlin	3,4
Rheinland-Pfalz	4,0
Sachsen	4,0
Hessen	6,0
Niedersachsen	7,8
Baden-Württemberg	10,6
Bayern	12,6
Nordrhein-Westfalen	17,6

Das **arithmetische Mittel** berechnet sich aus der Summe aller Einwohnerzahlen geteilt durch 16, es beträgt 5,0 Millionen. Der **Zentralwert** (Median) ist das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte der Rangliste. Er liegt zwischen Schleswig-Holstein mit 2,8 Millionen und Berlin mit 3,4 Millionen und beträgt 3,1 Millionen. Der **Modalwert** (Modus) beträgt 4,0 Millionen, da dieser Wert als einziger zweimal vorkommt.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Bestimmen Sie für jede der Ranglisten das arithmetische Mittel und den Median. Vergleichen Sie die Werte miteinander. Was stellen Sie fest?

a) 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15
3; 5; 7; 9; 11; 13; 29
3; 5; 7; 9; 11; 29; 41

b) 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50
6; 25; 30; 35; 40; 45; 50
6; 11; 30; 35; 40; 45; 50

c) 15; 18; 21; 25; 28; 31
15; 18; 23; 23; 28; 31
15; 23; 23; 23; 23; 31
15; 21; 21; 25; 25; 31

○ **2** Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und wenn möglich den Modalwert.

a) 8; 12; 15; 17; 19; 23; 25; 26; 29
b) 0; 1; 10; 11; 12; 14; 15; 15; 17; 18; 20
c) 3; 5; 12; 15; 15; 16; 18; 19; 51; 65
d) 2; 2; 25; 28; 31; 39; 41; 42; 69; 88
e) 4; 4; 17; 19; 21; 23; 25; 38; 38

○ **3** Elf verschiedene Smartphones werden nach einem Punktsystem von −5 (sehr schlecht) bis +5 (sehr gut) beurteilt:
+3; +2; +5; −1; 0; +2; −2; +3; −4; +4; −1
Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median. Begründen Sie, welcher Wert aussagekräftiger ist.

Streuungsmaße geben die Abweichung vom Mittelwert an.

Merke

Die am häufigsten verwendeten **Streuungsmaße** sind:
Der kleinste Wert heißt **Minimum**. Der größte Wert heißt **Maximum**.
Die Differenz aus Maximum und Minimum heißt **Spannweite**.
Der Zentralwert teilt die Rangliste in zwei Hälften.
Den Zentralwert der unteren Hälfte nennt man **unteres Quartil** q_u, den Zentralwert der oberen Hälfte nennt man **oberes Quartil** q_o.
Der Unterschied zwischen q_u und q_o heißt **Quartilabstand q**.

Beispiel

In einer Klasse werden die monatlichen Ausgaben für Handy-Gebühren (in €) ermittelt.
| 7 10 14 | 18 20 23 | 23 25 28 | 30 31 38 |
Das Minimum beträgt 7 €. Das Maximum beträgt 38 €.
Die Spannweite ergibt sich aus der Differenz von Maximum und Minimum und beträgt
38 € − 7 € = 31 €.
Das untere Quartil q_u liegt zwischen 14 € und 18 € und beträgt $\frac{14 + 18}{2}$ € = 16 €.
Das obere Quartil q_o liegt zwischen 28 € und 30 € und beträgt $\frac{28 + 30}{2}$ € = 29 €.

Bemerkung

Das untere Quartil q_u markiert den ersten Abschnitt. Mindestens 25 % aller Daten sind kleiner oder gleich q_u. Das obere Quartil q_o markiert den vierten Abschnitt. Mindestens 25 % aller Daten sind größer oder gleich q_o. Im Bereich von q_u bis q_o befinden sich mindestens 50 % aller Daten.

○ **4** Bestimmen Sie für die folgende, geordnete Liste das Minimum, das Maximum, die Spannweite, unteres Quartil, oberes Quartil und den Quartilabstand.

0; 2; 5; 5; 6; 7; 8; 8; 10; 12; 13; 13; 15; 17;
20; 22; 25; 26; 28; 31; 33; 35; 35; 57; 85

○ **5** Nicht immer werden alle Daten einzeln aufgeschrieben, sondern in einer Tabelle dargestellt, wie z. B. die Ergebnisse einer Klassenarbeit.

Note	1	2	3	4	5	6
Schüler / -in	2	7	9	6	3	1

Bestimmen Sie alle Kenngrößen. Welche gibt den Notendurchschnitt der Klasse an?

?! 1 – 5   1, 3 – 5

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Bestimmen Sie alle Kenngrößen. Welche Bedeutung haben sie?

Tage	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Länge in km	24	48	33	52	26	41	39

7 Schnelligkeits- und Konzentrationstest: Aus einem gut gemischten Skatspiel zieht der Spielleiter fünf Karten zufällig heraus. Der Spieler schaut sich die restlichen Karten an. Die Stoppuhr läuft, bis er drei der fünf fehlenden Karten richtig benannt hat. Jede falsche Nennung gibt fünf Strafsekunden. Nach 45 Sekunden ist Schluss.

a) Führen Sie in Gruppen einen Wettbewerb mit jeweils mindestens fünf Spielern durch. Analysieren Sie die Ergebnisse mithilfe der Kenngrößen.

b) Lohnt es sich, das Spiel zu trainieren? Spielen Sie mit einigen Freiwilligen jeweils zehnmal nacheinander. Werden die Zeiten kürzer? Ist die Tendenz bei allen gleich?

8 Betrachten Sie die beiden geordneten Listen.

0; 0; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 11; 12

0; 2; 2; 2; 3; 8; 12; 12; 12; 12; 12

a) Beschreiben Sie ohne Rechnung, was die beiden Datenlisten gemeinsam haben und worin sie sich unterscheiden.

b) Bestimmen Sie für die beiden Listen das arithmetische Mittel, die Spannweite und den Zentralwert. Was stellen Sie fest?

c) Bestimmen Sie für beide Listen das obere und das untere Quartil sowie den Quartilabstand. Welche Aussage können Sie jetzt machen?

9 Übertragen Sie die Tabellen in Ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

	a)	b)	c)	d)
Minimum	0	■	13	■
unteres Quartil	5	9	24	7,0
oberes Quartil	19	■	■	9,5
Maximum	34	31	41	12,0
Quartilabstand	■	8	12	■
Spannweite	■	27	■	8,5

10 Bestimmen Sie für die in den Listen zusammengefasssten Ergebnisse von Befragungen das untere und das obere Quartil, den Zentralwert und den Quartilabstand.

a) Anzahl guter Freundinnen und Freunde

Anzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Häufigkeit	4	5	4	7	9	8	3	5	6	2	1

b) Ausgaben für Süßigkeiten pro Monat

Ausg. in €	2	5	6	8	10	12	15	16	20
Häufigkeit	3	8	4	2	12	5	6	1	2

c) Anzahl der Haarschnitte im Halbjahr

Anzahl	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	128	109	42	21	11	0	2

11 Wie viele Kurznachrichten senden oder erhalten Schülerinnen und Schüler pro Woche? Erfassen Sie für Ihre Klasse die Daten und bestimmen Sie das Minimum, das Maximum, das arithmetische Mittel, das untere und das obere Quartil, den Zentralwert und den Quartilabstand.

12 In zwei Klassen wird die durchschnittliche Nutzung des Internets pro Woche in Stunden erhoben. Nach der Auswertung ergaben sich die folgenden Kenngrößen.

Kenngröße	Klasse 1	Klasse 2
Minimum	0	1
unteres Quartil	1	2
Zentralwert	3	4
oberes Quartil	5	7
Maximum	19	26
Arithmetisches Mittel	3,12	5,2

a) Machen Sie Aussagen über Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Klassen.

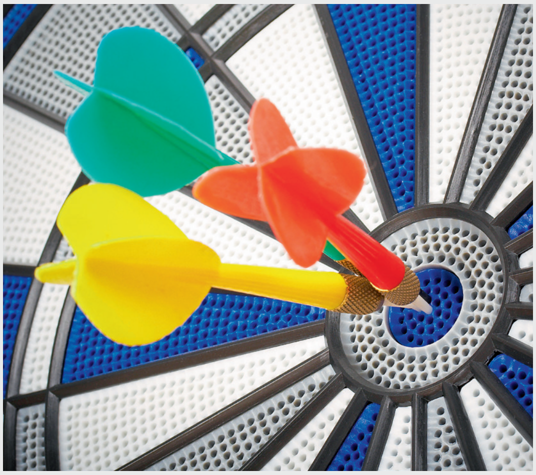
b) Überprüfen Sie folgende Aussagen:
- Etwa 50 % der Jugendlichen in Klasse 1 nutzen das Internet 1 bis 5 Stunden in der Woche.
- Mindestens 25 % der Jugendlichen in Klasse 2 nutzen das Internet mehr als 7 Stunden in der Woche.

c) Notieren Sie weitere Aussagen mithilfe der Kenngrößen. Lassen Sie diese von Ihrer Nachbarin oder Ihrem Nachbarn überprüfen.

?! 6, 8 – 12   6 – 8, 12   7   11

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

8 Boxplot



Beim Dart wirft jeder Spieler zehnmal auf eine Scheibe. Die Anzahl der Treffer wird notiert.
Anzahl der Treffer:

Mannschaft A

3; 4; 4; 6;
5; 1; 5; 5;
3; 3; 8; 5;
2; 7; 5; 4;
7; 10; 1; 4;
3; 8; 3; 5

Mannschaft B

6; 6; 4; 4;
4; 5; 1; 7;
5; 5; 4; 8;
3; 4; 6; 2;
5; 0; 7; 10;
1; 4; 4; 6;
5; 3; 5

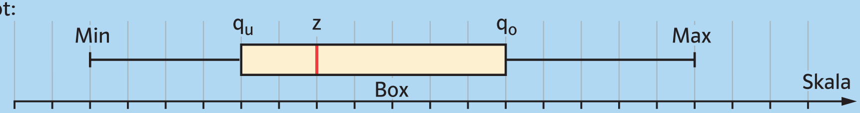
→ Mannschaft A oder B, wer wirft besser? Begründen Sie Ihre Entscheidung mithilfe der Kenngrößen.

Kenngrößen werden in einem Kenngrößendiagramm, dem **Boxplot**, übersichtlich dargestellt.

Merke

Zum Zeichnen eines **Boxplots** werden über einer Skala, die alle Werte der Erhebung umfasst, die Kenngrößen Minimum (Min), Maximum (Max), Zentralwert (z), unteres und oberes Quartil (q_u und q_o) eingetragen. Der Bereich zwischen dem unteren und oberen Quartil wird als Box gezeichnet. Die Quartile werden mit dem Minimum bzw. dem Maximum verbunden.

Boxplot:



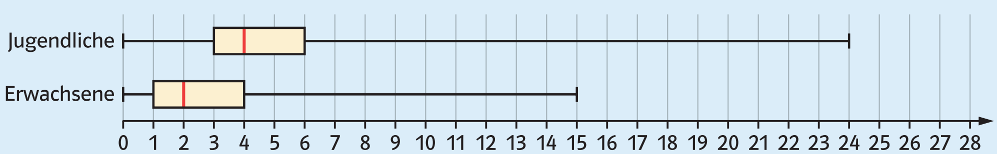
Beispiel

Wie häufig sind Jugendliche und Erwachsene im letzten Jahr ins Kino gegangen?

Häufigkeit der Besuche	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	17	19	24
Anzahl der Jugendlichen (gesamt 117)	3	7	14	23	21	17	11	5	7	3	1	2	1	1	1
Anzahl der Erwachsenen (gesamt 121)	22	26	25	17	14	7	2	3	1	0	3	1	0	0	0

Zum Zeichnen der beiden Boxplots ist es hilfreich, die Kenngrößen in einer Tabelle zu erfassen.

	Jugendliche		Erwachsene	
	Rangplatz	Wert	Rangplatz	Wert
Minimum	1	0	1	0
unteres Quartil	30	3	31	1
Zentralwert	59	4	61	2
oberes Quartil	88	6	91	4
Maximum	117	24	121	15



?!

Quellen: iStockphoto (mbbirdy), Calgary, Alberta; aus 3-12-742711-0 S.137
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

Beispiel

Aus den Boxplots der vorigen Seite kann Folgendes abgelesen werden:
- Von den Erwachsenen gehen mindestens 25 % nicht mehr als einmal pro Jahr ins Kino, mindestens 25 % gehen aber auch viermal und häufiger ins Kino.
- Mindestens 50 % der Jugendlichen gehen drei- bis sechsmal im Jahr ins Kino.
- Mindestens 50 % der Erwachsenen gehen nur ein- bis viermal im Jahr ins Kino.
- Während von den Jugendlichen mindestens 75 % mehr als zweimal im Jahr ins Kino gehen, sind es bei den Erwachsenen weniger als 50 %.
- Bei den Jugendlichen setzen sich einige Ausreißer deutlicher nach oben ab als bei den Erwachsenen, das zeigen die Längen der Verbindungslinien zwischen Quartil und Minimum bzw. Maximum.
- Vergleicht man die Boxen für die Jugendlichen und die Erwachsenen, so erkennt man, sie sind gleich groß, jedoch gegeneinander versetzt.

In beiden Gruppen zeigt also die Mehrheit ein ähnliches Kinoverhalten, die Jugendlichen gehen aber insgesamt häufiger ins Kino.

○ **1** Zeichnen Sie den Boxplot.

	Minimum	unteres Quartil	Zentralwert	oberes Quartil	Maximum
a)	0	12	15	21	27
b)	17	23	31	42	59
c)	50	120	175	210	250

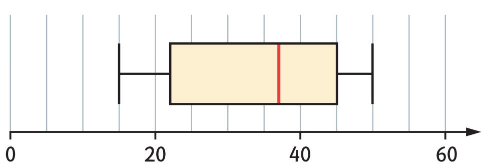
○ **2** Zeichnen Sie zur geordneten Liste einen Boxplot.

a) 5; 8; 8; 12; 14; 15; 15; 17; 19; 19; 19; 24; 25; 27; 27; 28; 32; 36

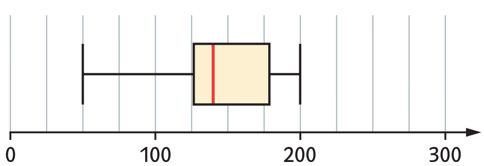
b) 0; 2; 18; 26; 30; 32; 32; 33; 35; 38; 39; 40; 40; 42; 51

○ **3** Lesen Sie die Kenngrößen aus dem Boxplot ab.

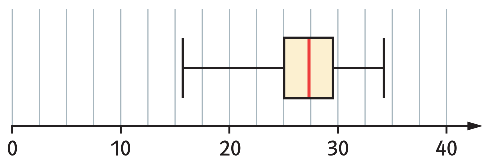
a)



b)



◒ **4** Welche der Datenlisten passen zum Boxplot? Begründen Sie Ihre Antwort.



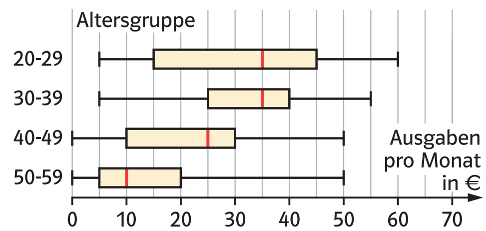
a) 16; 24; 25; 26; 27; 27; 27; 30; 31; 34

b) 16; 24; 25; 26; 27; 27; 27; 30; 31; 40

c) 16; 25; 26; 27; 29; 30; 34

d) 16; 17; 18; 19; 27; 29; 30; 31; 34

◒ **5** Die vier Boxplots stellen das Ergebnis einer Umfrage nach den durchschnittlichen Handy-Kosten pro Monat dar, abhängig von der Altersgruppe.



a) Fassen Sie in einer Tabelle alle Kenngrößen, die Sie ablesen können, zusammen.

b) Interpretieren Sie jeden einzelnen Boxplot.

c) Vergleichen Sie die Boxplots miteinander. Welche Aussagen können Sie machen?

?! 1–5 4, 5 1, 2

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Zeichnen Sie für die beiden geordneten Listen die Boxplots. Was stellen Sie fest?

0; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 15; 15; 15

0; 0; 0; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 15

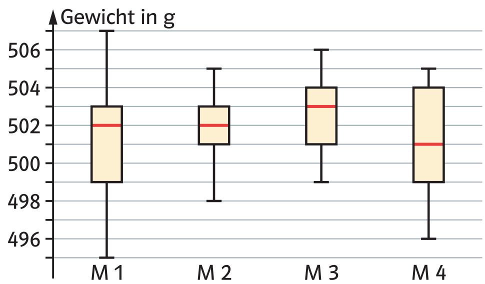
7 Bei einer Umfrage wurden 69 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler befragt, wie viele Beiträge sie durchschnittlich im Jahr in Fachzeitschriften veröffentlichen.

Veröffentlichungen	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Nennungen	2	8	10	8	4	3	8

Veröffentlichungen	10	11	12	13	14	15	16
Anzahl der Nennungen	15	3	4	0	1	2	1

a) Erstellen Sie ein Säulendiagramm.
b) Bestimmen Sie die notwendigen Kenngrößen und zeichnen Sie einen Boxplot.

8 In einer Mehlfabrik werden 500-g-Tüten abgepackt. Um die Qualität der vier Abfüllmaschinen zu prüfen, wird von jeder Maschine eine Stichprobe genommen. Die Ergebnisse sind in den Boxplots wiedergegeben.

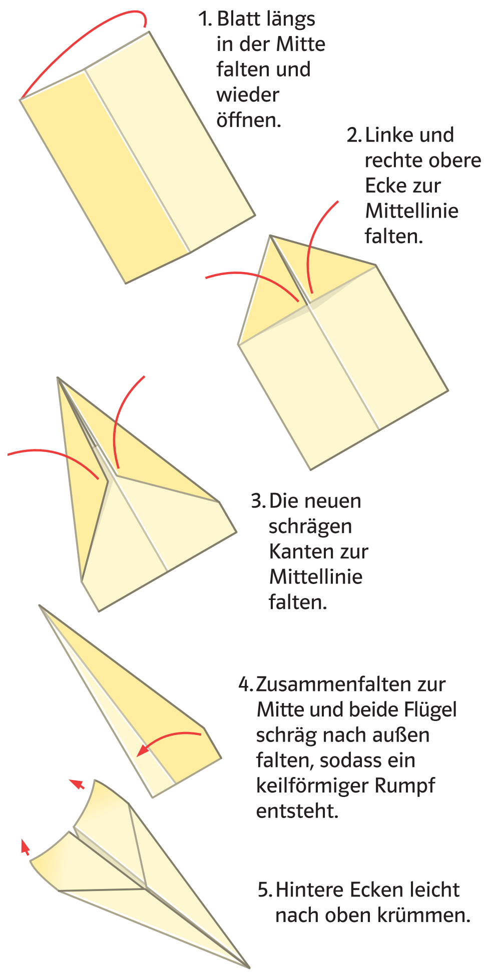


Beurteilen Sie die Qualität der Maschineneinstellung. Welche Maschinen sollten nachjustiert werden? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

9 Zeichnen Sie mithilfe der folgenden Aussagen einen einzigen Boxplot.

- Der Zentralwert beträgt 12.
- Das Minimum liegt bei 2.
- Das untere Quartil ist um 3 kleiner als der Zentralwert.
- Das Maximum ist doppelt so groß wie der Zentralwert.
- Das obere Quartil ist 20.

10 Fertigen Sie aus einem A4-Blatt einen Papierflieger gemäß der Faltanleitung an.



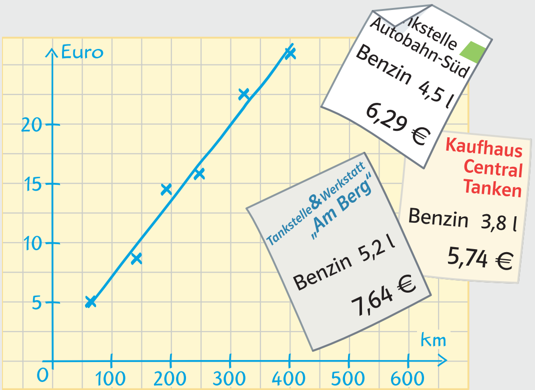
a) Messen Sie für 25 Flüge die Flugweite, um die Flugeigenschaften zu testen. Erstellen Sie für die Messreihe einen Boxplot. Mit einer Büroklammer am Bug des Flugzeugs können Sie den Flieger trimmen.
b) Prüfen Sie die Flugeigenschaften des getrimmten Fliegers. Zunächst mit einer, dann mit zwei und schließlich mit drei Büroklammern. Erstellen Sie für die Messergebnisse die Boxplots und vergleichen Sie sie mit dem ersten Boxplot. Machen Sie Aussagen darüber, ob das Trimmen wirklich die Flugeigenschaften verbessert.
c) Mit wie vielen Büroklammern wird die beste Flugeigenschaft erzielt?

?! 6–7   6, 8–10   7, 9, 10

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

9 Datenpaare und Streudiagramme



Jacqueline ist stolz auf ihren neuen Roller. In einem Notizbuch trägt sie bei jedem Tanken den Kilometerstand und den Gesamtbetrag ein, den sie bis jetzt für Treibstoff ausgegeben hat. Aus ihrer Liste erstellt sie ein Diagramm.

→ Wie kommt es, dass die Datenpunkte unregelmäßig verteilt sind?

→ Ahnen Sie, weshalb Jacqueline zusätzlich die gerade Linie eingetragen hat?

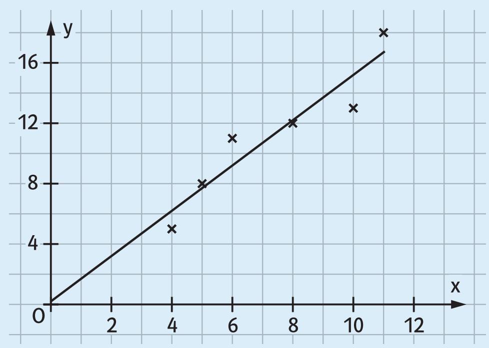
Treten Daten in **geordneten Zahlenpaaren** auf – z. B. Fahrtstrecke und Treibstoffkosten; Zeitdauer und Entfernung oder Menge und Preis – kann man diese Datenpaare in ein Koordinatensystem eintragen. Häufig veranschaulicht eine Gerade den Zusammenhang zwischen den Größen näherungsweise. Bei Daten aus Messungen oder Beobachtungen weichen die Werte mehr oder weniger stark von den theoretischen Werten ab. Eine Ausgleichsgerade kann den proportionalen Zusammenhang verdeutlichen. Erhöht (oder vermindert) man für einen Teil des Datenpaares den eingesetzten Wert in regelmäßigen Schritten, erhöht (oder vermindert) sich auch der Wert für den anderen Teil des Datenpaares in regelmäßigen Schritten.

Merke

Daten aus geordneten Zahlenpaaren lassen sich in Koordinatensystemen grafisch darstellen. Man nennt diese Darstellung **Streudiagramm**. Wenn ein fast proportionaler Zusammenhang besteht, liegen die Datenpaare annähernd auf einer **Ausgleichsgeraden**. Diese Gerade gleicht Messfehler aus und ermöglicht das Ablesen von Schätzwerten zwischen den Messpunkten.

Beispiel

Tragen Sie die Punkte A (4 | 5), B (5 | 8), C (6 | 11), D (8 | 12), E (10 | 13) und F (11 | 18) in ein Koordinatensystem ein. Legen Sie ein Lineal so an, dass gleich viele Punkte oberhalb wie unterhalb der Zeichenkante liegen und zeichnen Sie die Ausgleichsgerade.



○ **1** Zeichnen Sie ein Streudiagramm und tragen Sie eine Ausgleichsgerade für die Datenpaare der Messreihen ein.

a) Messreihe 1: (1,5 | 8,7); (2,9 | 7,1); (3,5 | 6,5); (5,1 | 4,8); (7,1 | 2,9).

b) Messreihe 2: (1 | 3,2); (2 | 3,5); (3 | 4); (4 | 5,5); (5 | 5).

c) Messreihe 3: (1,5 | 0); (2 | 1); (2,8 | 1,8); (3,5 | 2,5); (4,8 | 5).

○ **2** Bei einem Experiment wird Alkohol erhitzt.

Zeit (min)	0	1	1,5	2	2,5
Temp. (°C)	20	40	50	59	66

Zeit (min)	3	3,5	4	4,5	5
Temp. (°C)	70	73	76	78	78

Tragen Sie die Messpunkte in ein Koordinatensystem ein. Verbinden Sie die Punkte aus freier Hand zu einem Graphen. Beschreiben Sie das Schaubild.

?! 1, 2   2   2

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

3 Bei der Fußballweltmeisterschaft 2014 waren folgende Spieler besonders erfolgreich:

Spieler	Erzielte Tore	Anzahl Spiele
James Rodríguez	6	5
Thomas Müller	5	7
Robin van Persie	4	6
Lionel Messi	4	7
Neymar	4	5
Arjen Robben	3	7
Karim Benzema	3	5
André Schürrle	3	6
Xherdan Shaqiri	3	4
Enner Valencia	3	3

Erstellen Sie ein Streudiagramm und zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade ein.
Ein Journalist behauptet, dass Enner Valencia nach James Rodríguez der zweitbeste Spieler sei. Wie kommt er zu dieser Behauptung?

4 Lassen Sie aus einem Wasserhahn Wassertropfen in einen Messzylinder fallen.

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

Tropfen	50	100	150	200	250
Volumen in ml	■	■	■	■	■

b) Zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade. Lesen Sie das Volumen nach 175 Tropfen ab.

c) Schätzen Sie das Volumen eines Tropfens.

5 Marcel wertet die Daten der Messreihe $(1\,|\,2{,}7)$; $(3\,|\,4{,}3)$; $(4\,|\,4{,}7)$; $(5\,|\,8{,}1)$; $(6\,|\,6{,}0)$; $(7\,|\,6{,}9)$; $(8\,|\,7{,}8)$ aus. Er soll ein Diagramm mit Ausgleichsgerade erstellen. Nach dem Eintragen der Punkte ist er ratlos. Können Sie die Situation erklären? Wie sollte er die Ausgleichsgerade legen?

6 Nehmen Sie 10 gleichartige große Nägel und legen Sie der Reihe nach 1; 2; 3; …; 10 Nägel auf eine genaue Waage.

a) Notieren Sie die Datenpaare (Anzahl | Gewicht) in einer Tabelle. Stellen Sie die Werte grafisch dar.

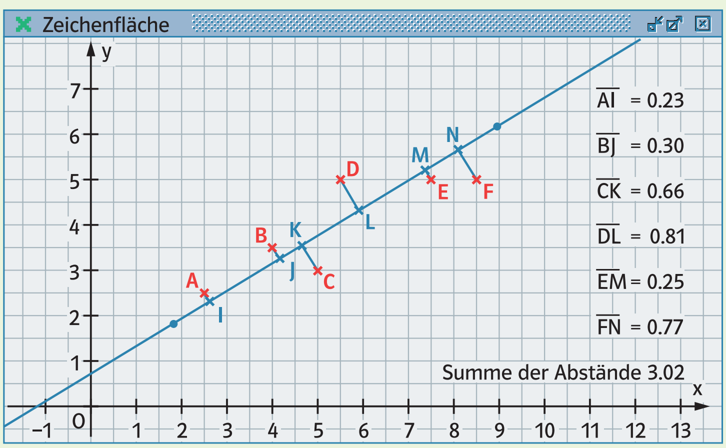
b) Liegen die Messpunkte auf einer Geraden? Erklären Sie die Abweichungen.

Methode

Dynamische Geometriesoftware (DGS): Ausgleichsgeraden bestimmen
Sie können mit einer **DGS** überprüfen, wie gut die Ausgleichsgerade zu den Datenpaaren passt.

a) Tragen Sie verschiedene Messpunkte ein.

b) Legen Sie eine Gerade durch die Punkte, sodass auf jeder Seite der Geraden einige Punkte liegen. Konstruieren Sie danach zu jedem der Punkte den Abstand zur Geraden. Dieser Abstand wird bei der dynamischen Geometriesoftware häufig Lot oder Lotstrecke genannt. Die Software gibt Ihnen die einzelnen Abstände und die Summe aller Abstände an. Verschieben Sie die Gerade so lange bis die Abstandssumme den kleinstmöglichen Wert erreicht.



3–6 3–5 4–6

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

10 Einstufige Zufallsversuche

Drei Jugendliche würfeln mit unterschiedlichen Würfeln.

→ Beschreiben Sie die Würfel. Achten Sie auf Flächenform und Anzahl der Flächen.
→ Oles Würfel wird als Tetraeder (Viererwürfel) bezeichnet. Wie würden Sie die anderen Würfel nennen?
→ Wer hat die größte Chance, wer hat die kleinste Chance, eine Sechs zu würfeln?
→ Wer hat die größte Chance, eine gerade Zahl zu würfeln?

Zahlen, die man würfelt, sind zufällig. Daher sagt man auch, dass man beim Würfeln einen Zufallsversuch durchführt. Wenn man einmal würfelt, nennt man den Zufallsversuch einstufig. Mithilfe der Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ergebnisse lassen sich die Chancen für eine bestimmte Zahl ausrechnen.

Merke

Ein Zufallsversuch, der einmal durchgeführt wird, wird **einstufiger Zufallsversuch** genannt. Die möglichen Ergebnisse lassen sich in einem Baumdiagramm veranschaulichen. Haben alle möglichen Ergebnisse die gleiche Chance, dann sagt man, dass jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist.

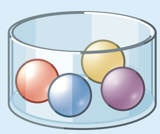
Es gilt für die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses**: $P(E) = \frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$.

P(E) bedeutet Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses E.

P kommt von dem englischen Wort Probability und bedeutet Wahrscheinlichkeit.

Beispiel

Aus dem Behälter mit vier Kugeln wird eine Kugel gezogen.



mögliche Ergebnisse
gelbe Kugel, rote Kugel, blaue Kugel, lila Kugel
Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich, da alle möglichen Ergebnisse die gleiche Chance haben.

Berechnen der Wahrscheinlichkeiten

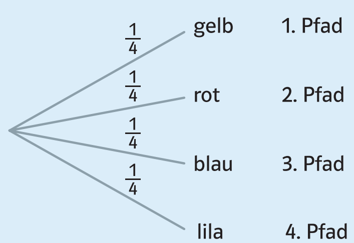
$P(\text{gelbe Kugel}) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$

$P(\text{rote Kugel}) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$

$P(\text{blaue Kugel}) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$

$P(\text{lila Kugel}) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$

Baumdiagramm
Die Wahrscheinlichkeit wird am Pfad als Bruch notiert.



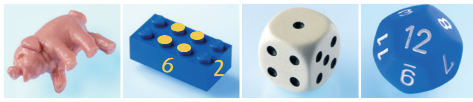
Bemerkung

- Mit Wahrscheinlichkeiten kann man Chancen bei Glücksspielen ausrechnen. Man kann mithilfe von Wahrscheinlichkeiten aber beispielsweise auch die Qualität von Produkten, den Umsatz von Firmen oder den Ausgang von Wahlen abschätzen.
- Zufallsversuche, bei denen alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, nennt man **Laplace-Versuche**. Die Wahrscheinlichkeit heißt dann **Laplace-Wahrscheinlichkeit**.

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

○ **1** Es wird mit folgenden Gegenständen gewürfelt. Bei welchem Versuch haben alle Ergebnisse die gleiche Chance?



○ **2** Es wird mit einem Sechserwürfel gewürfelt.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie P(6).

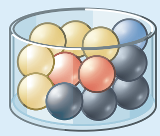
○ **3** In einem Beutel liegen nur noch die Spielsteine A, E, M, T und S.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie P(M).

Merke

Von allen möglichen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen können mehrere zu einem Ereignis gehören. Diese nennt man **günstige Ergebnisse**.
Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Beispiel

Aus dem Behälter mit zwölf Kugeln wird eine Kugel gezogen.



Berechnen der Wahrscheinlichkeiten

$P(\text{schwarze Kugel}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$= 0{,}333\ldots \approx 33{,}3\,\%$

$P(\text{gelbe Kugel}) = \frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots \approx 41{,}7\,\%$

$P(\text{rote Kugel}) = \frac{2}{12} = 0{,}166\ldots \approx 16{,}7\,\%$

$P(\text{blaue Kugel}) = \frac{1}{12} = 0{,}0833\ldots \approx 8{,}3\,\%$

$P(\text{eine Kugel}) = \frac{12}{12} = 1 = 100\,\%$

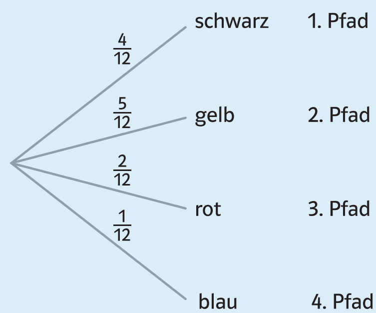
Es wird auf jeden Fall eine Kugel gezogen. Das Ereignis tritt sicher ein.

$P(\text{grüne Kugel}) = \frac{0}{12} = 0 = 0\,\%$

In dem Behälter gibt es keine grüne Kugel. Das Ereignis ist unmöglich.

Baumdiagramm

4 von 12 Kugeln sind schwarz. Deshalb ist beim ersten Pfad der Zähler 4 und der Nenner 12.



○ **4** In einem Eimer mit Losen sind 150 Nieten, 45 Kleingewinne und 5 Hauptgewinne. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit.
a) P(Hauptgewinn)
b) P(Niete)
c) P(Gewinn)

◒ **5** Bei einer Verlosung wird eine Kugel aus einem Eimer mit 45 schwarzen, 20 roten und 15 weißen Kugeln gezogen.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sina eine schwarze Kugel zieht.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Kevin eine rote Kugel?

◒ **6** Schwarzfahrer gesucht
In einer U-Bahn sitzen 120 Personen, sechs haben kein Ticket und vier haben eine falsche Fahrkarte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Person, die der Kontrolleur fragt, eine gültige Fahrkarte hat?

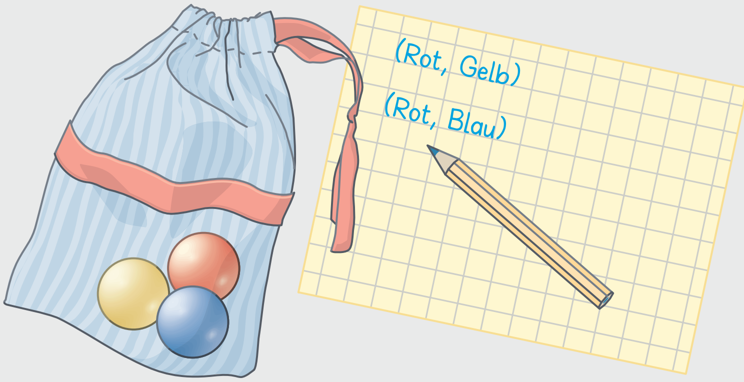
● **7** An einem Grenzübergang überqueren an einem Tag ungefähr 5000 Personen die Grenze. Davon werden 400 kontrolliert. 28 der kontrollieren Personen verstoßen gegen die geltenden Zollbestimmungen. Wie viele Personen verstoßen ungefähr täglich gegen die Zollbestimmungen?

?! 2–7 1, 5 2, 3, 5

Quellen: 1 Klett-Archiv (Blühdorn), Stuttgart; **2; 3; 4** Klett-Archiv (Koma Amok), Stuttgart aus 3-12-742711-0 S.145
Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

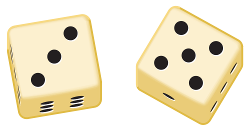
11 Zweistufige Zufallsversuche



Aus dem Säckchen wird zufällig eine Kugel gezogen. Ihre Farbe wird auf dem Zettel notiert. Anschließend wird die Kugel wieder zurückgelegt. Es wird erneut eine Kugel gezogen und deren Farbe notiert.

→ Notieren Sie alle möglichen Ergebnisse.
→ Lukas behauptet, die Wahrscheinlichkeit, zweimal die blaue Kugel zu ziehen, sei $\frac{1}{9}$.
→ Michelle meint, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, zweimal eine gleichfarbige Kugel zu ziehen, liegt bei $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$.

Würfelt man mit einem Sechserwürfel zweimal hintereinander, führt man einen Zufallsversuch aus, der aus zwei Teilversuchen besteht.



Die möglichen Ergebnisse sind (1;1), (1;2), …, (2;1), …, (6;6). Es gibt insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse der Teilversuche miteinander multipliziert. So ist beispielsweise $P(2;1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\,\%$.

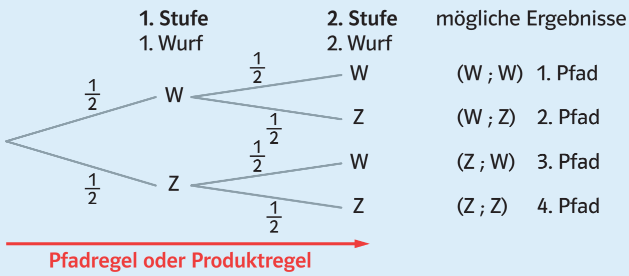
Merke

Ein Zufallsversuch, der aus zwei Teilversuchen besteht, wird **zweistufiger Zufallsversuch** genannt. Die möglichen Ergebnisse lassen sich in einem **Baumdiagramm** veranschaulichen. Jeder **Pfad** eines Baumdiagramms führt zu einem möglichen Ergebnis. Die **Wahrscheinlichkeit** eines Pfades berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert. Diese Rechenvorschrift nennt man **Pfadregel** oder **Produktregel**.

Beispiel

Eine Münze wird zweimal geworfen.

Baumdiagramm



Berechnen der Wahrscheinlichkeiten

$P(W;W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$ $P(W;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

$P(Z;W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$ $P(Z;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

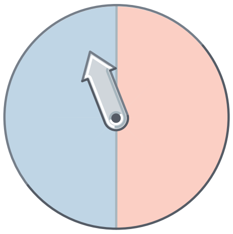
Tipp zu Aufgabe 3:

Nachdem man die ersten zwei Stufen des Baumdiagramms aufgezeichnet hat, wird jeder Pfad um zwei Äste ergänzt.

zu Aufgabe 4:

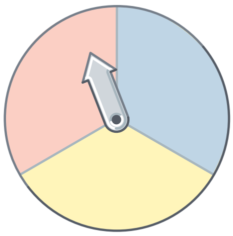
Auf Seite 144 wirft Ole einen Tetraeder.

○ **1** Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Zeichnen Sie das Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(rot ; rot) und P(blau ; blau).

○ **2** Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

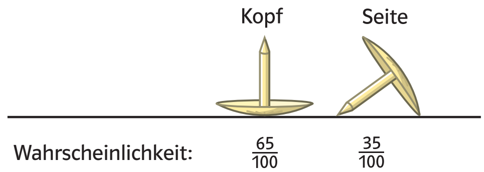


a) Zeichnen Sie das Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(blau ; blau) und P(gelb ; gelb).

◒ **3** Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Wappen fällt?

◒ **4** Torsten wirft zweimal mit einem Tetraeder.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(4 ; 4) mithilfe der Produktregel.
c) Berechnen Sie P(1 ; 1), P(1 ; 4) und P(3 ; 2).

◒ **5** Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Abbildung zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit Kopf bzw. Seite fällt.



a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für zweimal Seitenlage.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für zweimal Kopflage.

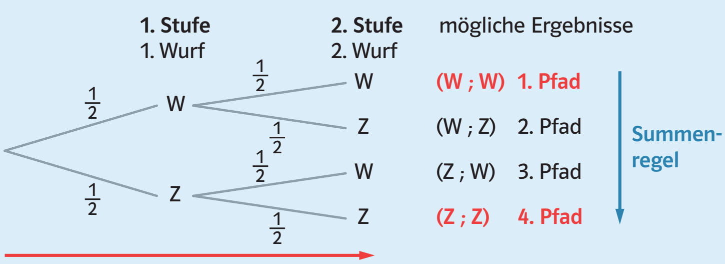
Merke

Gehören bei einem zweistufigen Zufallsversuch mehrere günstige Ergebnisse zu einem Ereignis, so addiert man die einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten. Diese Rechenvorschrift nennt man **Summenregel**.

Beispiel

Eine Münze wird zweimal geworfen.

Baumdiagramm



Berechnen der Wahrscheinlichkeit für zweimal Wappen oder zweimal Zahl

$P(W;W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$ $\qquad$ $P(Z;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

Das Ereignis setzt sich aus zweimal Wappen oder zweimal Zahl zusammen:
$P(\text{gleiche Münzseite}) = P(W;W) + P(Z;Z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

Bemerkung

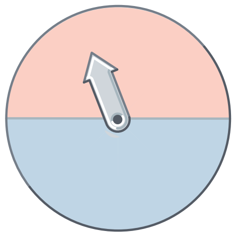
Die Pfadregel (Produktregel) und die Summenregel gelten auch für Zufallsversuche, die häufiger als zweimal durchgeführt werden.

?! 1–5 $\qquad$ 1–5

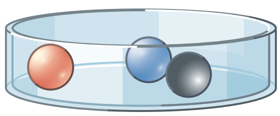
Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach

Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7

6 Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(gleiche Farbe).
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(unterschiedliche Farbe).



7 Aus dem Behälter wird eine Kugel gezogen und zurückgelegt. Dann wird wieder eine Kugel gezogen.

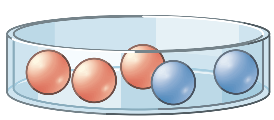


a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen?

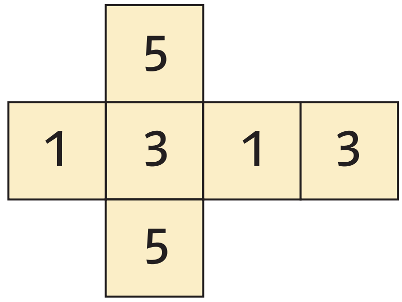
8 Eine Münze wird dreimal geworfen.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal Zahl zu werfen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zweimal Zahl zu werfen?

9 Karla wirft zweimal einen Tetraeder.
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwei gleiche Zahlen wirft.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Zahl kleiner als 3 und die zweite Zahl größer als 2 ist.

10 Aus der Schale wird eine Kugel gezogen und zurückgelegt. Dann wird erneut eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln der gleichen Farbe zu ziehen?

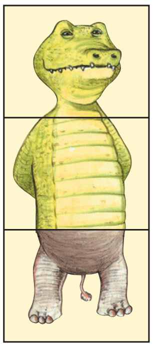


11 Mit dem Würfel, dessen Netz unten abgebildet ist, wird zweimal gewürfelt.



a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Zahlen zu würfeln.

zu Aufgabe 12:



12 Mögliche und unmögliche Ergebnisse
a) Die Abbildung eines Krokodils und eines Elefanten werden in drei waagerechte Streifen geschnitten. Die so erhaltenen Kopf-, Bauch- und Fußteile lassen sich nun zu Fantasietieren wie „Krokofant“, „Eledil“ usw. kombinieren. Wie viele möglichen Kombinationen gibt es? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen „Krokofant“ auszuwählen? Erstellen Sie zur Veranschaulichung ein Baumdiagramm.
b) Bei Zahlenschlössern müssen mit Ziffern versehene Räder in die richtige Einstellung gebracht werden. Auf jedem Rad gibt es die Zahlen 0, 1, 2, …, 9. Wie viele Einstellungen sind bei einem Zahlenschloss mit 3 (4, 5) Rädern möglich? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die richtige Kombination zufällig auszuwählen?
c) Ein Datumsstempel hat drei Drehräder. Mit dem 1. Rad (0, 1, 2, 3) und mit dem 2. Rad (0 bis 9) stellt man den Tag ein. Mit dem 3. Rad (Jan., Febr., usw.) stellt man den Monat ein. Wie viele Einstellungen sind möglich? Wie viele Einstellungen davon sind sinnvoll?
d) In einem Raum gibt es vier verschiedene Lampen. Jede kann getrennt ein- und ausgeschaltet werden. Wie viele unterschiedliche Arten der Beleuchtung sind möglich?
e) Eine Kellnerin muss an fünf Tagen in der Woche arbeiten. Sie möchte am Sonntag frei haben. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Arbeitstage?

?! 6–12 6–12 12

Quellen: Grafik: Uwe Alfer, Waldbreitenbach
Seite aus: Schnittpunkt
ISBN-10: 3-12-742741-7 ISBN-13: 978-3-12-742741-7