Kapitel IV

Auf diesen Seiten können Sie grundlegende Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion aus Eigenschaften des Graphen der Funktion bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1–3, Seite 140 und 141
2.	Ich kann mithilfe einer linearen Interpolation eine Nullstelle einer Funktion näherungsweise bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 145
3.	Ich kann einen Abschnitt zwischen zwei Graphen durch eine ganzrationale Funktion mit glattem Übergang interpolieren.	☐	☐	☐	Lehrtext, Seite 144 und 145
4.	Ich kann zu einer gegebenen Punktwolke eine Regressionsgerade berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1 und 2, Seite 149
5.	Ich kann zu einer gegebenen Punktwolke eine quadratische bzw. eine exponentielle Regression bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1 und 2, Seite 156
6.	Ich kann den Korrelationskoeffizienten einer Regression bestimmen und daraus auf die Passgenauigkeit der Regression zu der zugehörigen Punktwolke schließen.	☐	☐	☐	Beispiel 1 und 2, Seite 153 Lehrtext, Seite 152 und 153

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Funktionsterm bestimmen

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f möglichst kleinen Grades, deren Graph im Ursprung einen Tiefpunkt und in $(1|1)$ einen Wendepunkt hat.

2 Nullstelle mit linearer Interpolation bestimmen

Bestimmen Sie näherungsweise die Nullstelle x_1 von $f(x) = e^{2x} + e^x - 0{,}1$ im Intervall $[-3; -2]$ durch lineare Interpolation und berechnen Sie $f(x_1)$.

3 Zwischenraum mit ganzrationaler Funktion interpolieren

Die Graphen von g mit $g(x) = (x+1)^2$ im Intervall $[-1; 0]$ und h mit $h(x) = 2$ im Intervall $[2; 5]$ sollen durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f 5. Grades im Intervall $[0; 2]$ mit möglichst gutem Übergang interpoliert werden. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

4 Regressionsgerade berechnen

Gegeben sind die Punkte $(-2|-3)$, $(-1|-1)$, $(0|0)$, $(1|2)$, $(3|3)$.
Berechnen Sie eine Regressionsgerade so, dass
a) eine Proportionalität entsteht.
b) die Regressionsgerade durch den Mittelpunkt der Punktwolke geht.

5 Quadratische bzw. exponentielle Regression bestimmen

Misst man die Abstände benachbarter Bünde einer Gitarre, so erhält man folgende Wertetabelle.

Nummer des Bundes	0	5	8	12	19
Abstand zum nächsten Bund in mm	36	27	23	18	12

a) Nähern Sie die Funktion f, die jedem Bund den Abstand zum nächsten Bund zuordnet durch eine quadratische Regression an und bestimmen Sie daraus den Abstand des 3. Bundes zum 4. Bund.
b) Nähern Sie die Funktion f, die jedem Bund den Abstand zum nächsten Bund zuordnet durch eine exponentielle Regression an und bestimmen Sie daraus den Abstand des 3. Bundes zum 4. Bund.

Autor: Prof. Detlef Hoche

6 Korrelationskoeffizient bestimmen

a) Welche der in Aufgabe 4 a) bzw. b) berechneten Geraden korreliert besser mit der gegebenen Punktwolke?

b) Passt die Punktwolke von Aufgabe 5 besser zu einer quadratischen oder zu einer exponentiellen Regression?

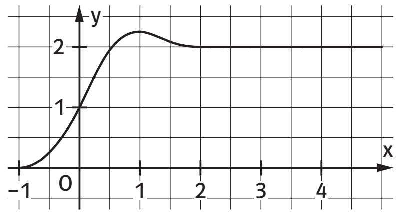
Autor: Prof. Detlef Hoche

Kapitel IV

1 1. Aufstellen des allgemeinen Funktionsterms und Angeben der Ableitungen der Funktion.
Vier Bedingungen, also hat f den Grad 3.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b$
2. Formulieren der gegebenen Bedingungen mit f, f′, f″ usw.
$f(0) = 0;\ f'(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f''(1) = 0.$
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems.
$f(0) = 0$: $d = 0$; $\quad f'(0) = 0$: $c = 0$; $\quad f(1) = 1$: $a + b = 1$; $\quad f''(1) = 0$: $6a + 2b = 0$
4. Lösen des linearen Gleichungssystems.
$a = -0{,}5;\ b = 1{,}5$
$f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2$
5. Gegebenenfalls überprüfen, ob alle angegebenen Bedingungen erfüllt sind.
Es ist $f''(0) = 3 > 0$, also liegt im Ursprung ein Tiefpunkt vor.
$f'''(1) = -3 \neq 0$, also ist $(1|1)$ Wendepunkt.
Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2$ erfüllt die genannten Bedingungen.

2 $f(-3) \approx -0{,}0477;\ f(-2) \approx 0{,}0537;\ y = 0{,}1014x + 0{,}2565 = 0;\ x_1 \approx -2{,}5296;\ f(x_1) \approx -0{,}0140$

3 Ansatz: $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

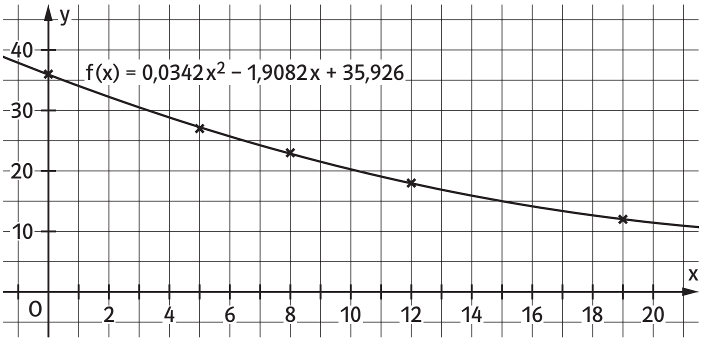


$f(0) = g(0) = 1;\ a_0 = 1$
$f'(0) = g'(0) = 2;\ a_1 = 2$
$f''(0) = g''(0) = 2;\ 2a_2 = 2$
$f(2) = h(2) = 2;\ 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + 4 + 4 + 1 = 2$
$f'(2) = h'(2) = 0;\ 80a_5 + 32a_4 + 12a_3 + 4 + 2 = 0$
$f''(2) = h''(2) = 0;\ 160a_5 + 48a_4 + 12a_3 + 2 = 0$
Eingabe in Taschenrechner ergibt:
$a_5 = -\frac{5}{16};\ a_4 = \frac{29}{16};\ a_3 = -\frac{13}{4}$
$f(x) = -\frac{5}{16}x^5 + \frac{29}{16}x^4 - \frac{13}{4}x^3 + x^2 + 2x + 1$

4 a) Ansatz $y = mx$
$f(m) = (+3 - 2m)^2 + (+1 - m)^2 + 0 + (-2 + m)^2 + (-3 + 3m)^2$
$\quad = 9 - 12m + 4m^2 + 1 - 2m + m^2 + 4 - 4m + m^2 + 9 - 18m + 9m^2$
$\quad = 15m^2 - 36m + 23$
$f'(m) = 30m - 36 = 0;\ m = 1{,}2$; Minimum wegen nach oben geöffneter Parabel.
Ergebnis: $y = 1{,}2x$
b) Mittelpunkt der Punktwolke $x_m = 0{,}2;\ y_m = 0{,}2$
Ansatz $y = m(x - 0{,}2) + 0{,}2$
$f(m) = (+3{,}2 - 2{,}2m)^2 + (+1{,}2 - 1{,}2m)^2 + (+0{,}2 - 0{,}2m)^2 + (-1{,}8 + 0{,}8m)^2 + (-2{,}8 + 2{,}8m)^2$
$\quad = 10{,}24 - 14{,}08m + 4{,}84m^2 + 1{,}44 - 2{,}88m + 1{,}44m^2 + 0{,}04 - 0{,}08m + 0{,}04m^2 + 3{,}24 - 2{,}88m + 0{,}64m^2$
$\quad\quad + 7{,}84 - 15{,}68m + 7{,}84m^2$
$\quad = 14{,}8m^2 - 35{,}6m + 22{,}8$
$f'(m) = 29{,}6m - 35{,}6 = 0;\ m \approx \frac{356}{296}$; Minimum wegen nach oben geöffneter Parabel.
Ergebnis: $y = \frac{356}{296}(x - 0{,}2) + 0{,}2 \approx 1{,}2027x - 0{,}0405$

Autor: Prof. Detlef Hoche

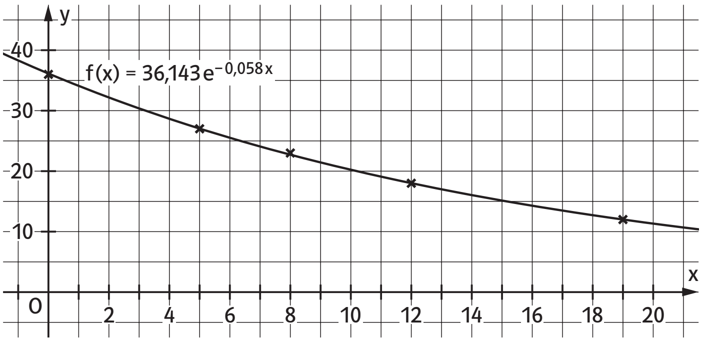
5 a) Quadratische Regression



$f(3) = 0{,}0342 \cdot 9 - 1{,}9082 \cdot 3 + 35{,}926 \approx 30{,}5$

Mit dieser Näherung ist der Abstand zwischen dem 3. und 4. Bund 30,5 mm.

b) Exponentielle Regression



$f(3) = 36{,}143\, e^{-0{,}058 \cdot 3} \approx 30{,}37$

Mit dieser Näherung ist der Abstand zwischen dem 3. und 4. Bund 30,37 mm.

6 Für beide Teilaufgaben ergeben sich nur geringfügige Unterschiede der Korrelationskoeffizienten. Man wird sich also nach anderen Kriterien entscheiden, welche Regression man verwendet. Trotzdem sind die Entscheidungen auf der Basis der Korrelationskoeffizienten aus physikalischer Sicht richtig.

a) Bei 4 a) ist $r = 0{,}9688$ und bei 4 b) ist $r = 0{,}9690$, also ist b besser.

b) Bei 5 a) ist $r = 0{,}99985$; bei 5 b) ist $r = 0{,}99990$. Also ist die exponentielle Regression besser.

Autor: Prof. Detlef Hoche