Kapitel III

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	**Wiederholung**
1.	Ich kann zu einer Funktion, die aus einer ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion zusammengesetzt ist, eine Stammfunktion berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 101
2.	Ich kann mit zusammengesetzten Funktionen bei Anwendungen umgehen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 101
3.	Ich kann Grenzwerte bei zusammengesetzten Funktionen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 105
4.	Ich kann zusammengesetzte Funktionen auf Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 105
5.	Ich kann ganzrationale Funktionenscharen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 109
6.	Ich kann Funktionenscharen untersuchen und Ortskurven bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 113
7.	Ich kann Vorgänge mit begrenztem Wachstum berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 117
8.	Ich kann Vorgänge mit logistischem Wachstum berechnen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 121
9.	Ich kann Differenzialgleichungen bei Wachstum aufstellen und lösen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2 Seite 125

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Stammfunktion bei einer zusammengesetzten Funktion berechnen

Berechnen Sie für die Funktion f eine Stammfunktion.

a) $f(x) = -x \cdot e^x$ b) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$

2 Anwendung mit einer zusammengesetzten Funktion

Die Vertikalgeschwindigkeit eines aufsteigenden Ballons lässt sich durch die Funktion v mit $v(t) = 0{,}2t \cdot e^{-0{,}01t}$ modellieren (t in Sekunden, $t \geq 0$, $v(t)$ in Meter pro Sekunde). Der Ballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Meereshöhe 150 m.

a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Geschwindigkeit am größten ist. Wie groß ist sie dann?

b) Berechnen Sie die Meereshöhe, die der Ballon nach einer Minute erreicht.

3 Grenzwerte bei zusammengesetzten Funktionen

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ c) $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x}$ d) $f(x) = x + x \cdot e^x$

4 Zusammengesetzte Funktionen auf Null-, Extrem- und Wendestellen untersuchen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (2 - x) \cdot 3e^{-\frac{1}{2}x}$.

a) Berechnen Sie die Null-, Extrem- und Wendestellen von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f. Markieren Sie in der Skizze die Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen einschließt. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche.

Autor: Dieter Brandt

5 Ganzrationale Funktionenscharen untersuchen

Gegeben ist für $t > 0$ die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = x - t \cdot x^2$.

a) Skizzieren Sie die Graphen für $t = 1, 2, 3$.

b) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.

c) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und die Extrempunkte in Abhängigkeit von t.

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_t mit der x-Achse einschließt.

☐ **6 Funktionenscharen untersuchen und Ortskurven bestimmen**

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = (x + t) \cdot e^{-x}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f_0 und f_1.

b) Bestimmen Sie, für welchen Parameter t der Punkt $P(2|1)$ auf dem Graphen von f_t liegt.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der die Extrempunkte des Graphen von f_t liegen.

☐ **7 Vorgänge mit begrenztem Wachstum**

Ein Bestand wächst nach den Gesetzen des begrenzten Wachstums gegen die Schranke $S = 20$. Der Anfangsbestand beträgt 5, nach fünf Tagen beträgt er 10.

a) Bestimmen Sie eine Funktion f, die das Wachstum des Bestandes beschreibt. Bearbeiten Sie mit Ihrer Modellfunktion die folgenden Fragen.

b) Berechnen Sie den Bestand nach 2 Tagen.

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Bestand 15 beträgt.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit 0,1 Einheiten pro Tag beträgt.

☐ **8 Vorgänge mit logistischem Wachstum**

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{50}{1 + 9e^{-0,5x}}$ beschreibt das Wachstum einer Pilzkultur (x in Tage, f(x) in cm^2) .

a) Bestimmen Sie den Anfangswert und die Schranke. Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit beträgt die Fläche der Pilzkultur $25\,cm^2$?

c) Um wie viel cm^2 pro Tag (momentane Zunahmerate) wächst der Pilz nach zwei Tagen?

☐ **9 Differenzialgleichungen bei Wachstum**

a) Beschreiben Sie an einem selbst gewählten Beispiel, was man unter einer Differenzialgleichung versteht.

b) Bei einem Bestand f(x) (x in Sekunden) beträgt die momentane Änderungsrate zu jedem Zeitpunkt 20 % des momentanen Bestandes pro Sekunde. Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die diesen Zusammenhang beschreibt. Geben Sie eine Lösung an, welche die Anfangsbedingung $f(0) = 5$ erfüllt.
Nennen Sie eine Anwendung, bei der die Differenzialgleichung das Wachstum beschreibt.

Autor: Dieter Brandt

Kapitel III

1 Die Stammfunktionen werden mit der Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmt.

a) $f(x) = -x \cdot e^x$; $F(x) = (1 - x) \cdot e^x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} = x^2 \cdot e^{-2x}$; $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-2x}$

2 a) Maximale Geschwindigkeit nach 100 Sekunden ist etwa 7,36 Meter pro Sekunde.

b) Meereshöhe nach 60 Sekunden: $150 + \int_0^{60} v(t)\,dt = 393{,}8\,\text{m}$.

3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = 0$; $x \cdot e^{-x} \to -\infty$ für $x \to -\infty$

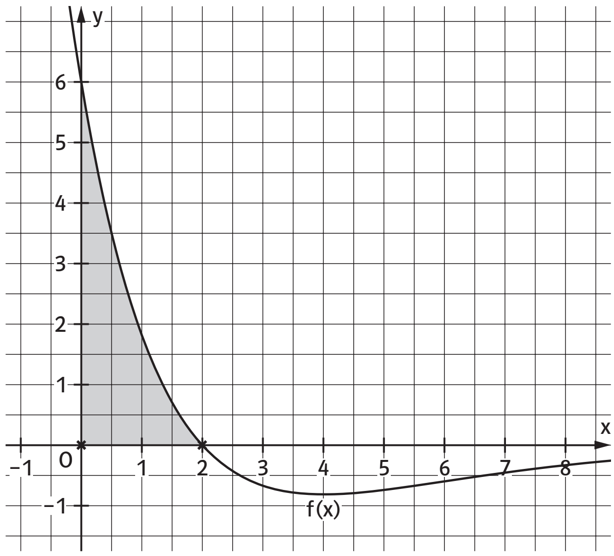
b) $x^2 \cdot e^x \to \infty$ für $x \to \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1$; $1 - \frac{1}{e^x} \to -\infty$ für $x \to -\infty$

d) $x + x \cdot e^x \to \infty$ für $x \to \infty$; $x + x \cdot e^x \to -\infty$ für $x \to -\infty$

4 a) Nullstelle: $x = 2$; Extremstelle: $x = 4$ (Minimalstelle); Wendestelle: $x = 6$.

b) Flächeninhalt: $\frac{12}{e} \approx 4{,}41$.



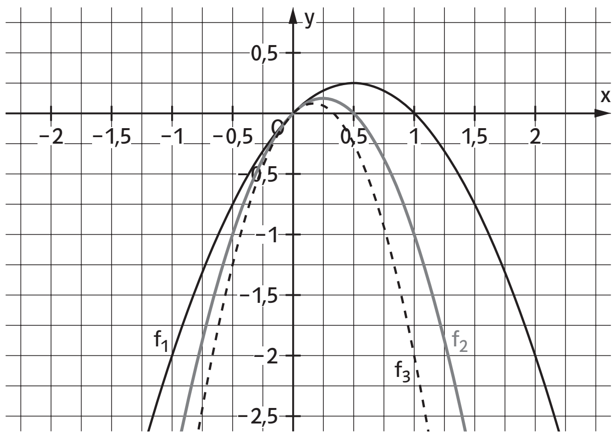
5 a) Grafik rechts

b) Gemeinsamkeiten: Die Graphen sind alle nach unten geöffnete Parabeln, welche die x-Achse in zwei Punkten schneiden, von denen der linke der Ursprung ist; Unterschiede: Mit wachsendem t werden die Parabeln schmaler, der rechte Schnittpunkt mit der x-Achse wandert nach links.

c) Achsenschnittpunkte: $(0\,|\,0)$ und $\left(\frac{1}{t}\,\middle|\,0\right)$;

Extrempunkte: $\left(\frac{1}{2t}\,\middle|\,\frac{1}{4t}\right)$.

d) $\int_0^{\frac{1}{t}} f_t(x)\,dx = \frac{1}{6t^2}$

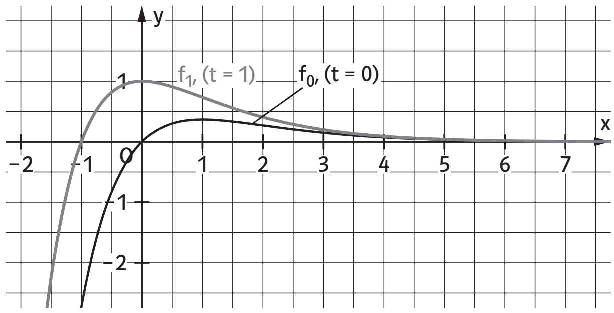


Autor: Dieter Brandt

6 a) Grafik rechts

b) $(2 + t) \cdot e^{-2} = 1$ hat die Lösung $e^2 - 2$.

c) Hochpunkte: $\left(1 - t \,|\, e^{-(1-t)}\right)$; Ortskurve: $y = e^{-x}$.



7 a) $f(x) = 20 - 5e^{-\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{5}x} \approx 20 - 5e^{-0{,}081x}$

b) $f(2) \approx 7{,}25$

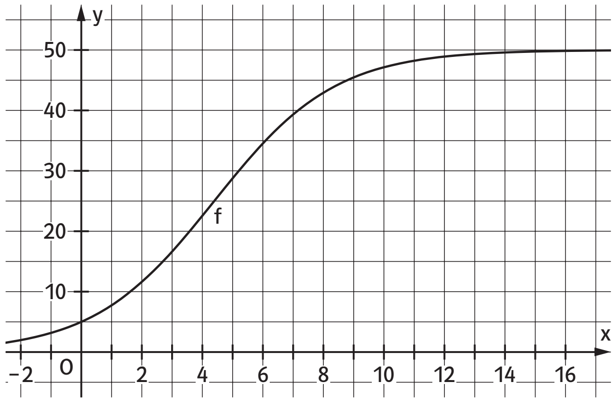
c) $f(x) = 15$ bei $x \approx 13{,}5$

d) $f'(x) = 0{,}1$ bei $x \approx 30{,}8$

8 a) Anfangswert: 5; Schranke: 50;

b) $f(x) = 25$ bei $x \approx 4{,}4$. Nach etwa 4,4 Tagen beträgt die Fläche der Pilzkultur 25 cm².

c) $f'(2) \approx 4{,}5$. Der Pilz hat nach zwei Tagen eine Wachstumsgeschwindigkeit von etwa 4,5 cm² pro Tag.



9 a) Beispiel: $f'(x) = 1 - 0{,}5f(x)$. Wesentlich: Es wird eine Beziehung zwischen einer Ableitung von f und der Funktion f beschrieben.

b) $f'(x) = 0{,}2f(x)$: Lösung: $f(x) = 5e^{0{,}2x}$. Diese Differenzialgleichung beschreibt z. B. das Wachstum eines Bakterienstammes, bei dem die Wachstumsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt 20 % des aktuellen Bakterienbestandes beträgt.

Autor: Dieter Brandt