

Kapitel II

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

| | Checkliste | 😊 | 😐 | ☹️ | Wiederholung |
|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| | 1. Ich kann sagen, wie man Integrierbarkeit einer Funktion über einem Intervall $[a; b]$ definiert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Merkkasten, Seite 55 |
| | 2. Ich kann beschreiben, was eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion ist. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Merkkasten, Seite 58 |
| | 3. Ich kann den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung formulieren. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Merkkasten, Seite 58 |
| | 4. Ich kann entscheiden, ob eine Funktion Stammfunktion einer Funktion ist. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Lehrtextseite 63 |
| | 5. Ich kann entscheiden, ob eine Funktion Stammfunktion einer Funktion ist. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel 2, Seite 59 |
| | 6. Ich kann zu einer Funktion eine Stammfunktion angeben. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel 2, Seite 59 |
| | 7. Ich kenne die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Aufgaben 6 und 9, Seite 64 |
| | 8. Ich kann Integrale mithilfe des Hauptsatzes berechnen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel 1, Seite 59 |
| | 9. Ich kann den Flächeninhalt zwischen zwei Graphen bestimmen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel 2, Seite 71 |
| <input type="checkbox"/> | 10. Ich kann das Volumen von Rotationskörpern durch Integration bestimmen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel, Seite 75 |
| <input type="checkbox"/> | 11. Ich kann den Inhalt von Flächen berechnen, die ins Unendliche reichen | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel 2, Seite 78 |
| <input type="checkbox"/> | 12. Ich kann die Länge von Kurvenstücken bestimmen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Beispiel, Seite 82 |

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Integrierbarkeit

Eine Funktion f heißt integrierbar im Intervall $[a; b]$, wenn die Annäherungen durch Rechtecksummen von

unten und von oben _____ . Diesen Grenzwert nennt man _____

_____ und schreibt dafür _____ .

2 Stammfunktion

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von einer Funktion f im Intervall I , wenn _____

_____ .

3 Hauptsatz formulieren

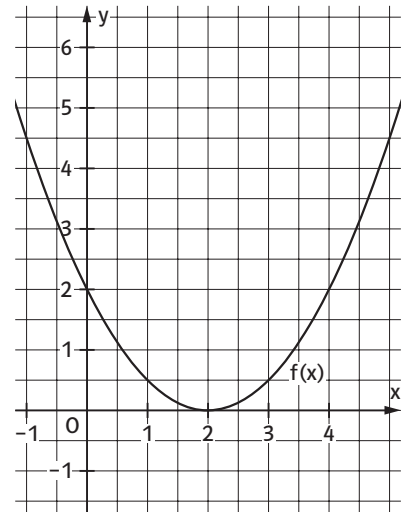
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet: Ist die Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar

und ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a; b]$, so gilt: _____ .

4 Stammfunktion skizzieren

Gezeigt ist der Graph der Funktion f. Skizzieren Sie dazu einen Graphen

- a) der Ableitungsfunktion f',
- b) einer Stammfunktion von f,
- c) der Integralfunktion zur unteren Grenze -1.



5 Entscheiden Sie, ob die Funktion F Stammfunktion der Funktion f ist

- a) $f(x) = x + 5; F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$
- b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2; F(x) = 2x^4 + 5x^3$
- c) $f(x) = e^{2x}; F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$
- d) $f(x) = x - 2e^x; F(x) = x^2 - 2e^x$
- e) $f(x) = \sin(x) - \cos(x); F(x) = 1 - \cos(x) - \sin(x)$
- f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}; F(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

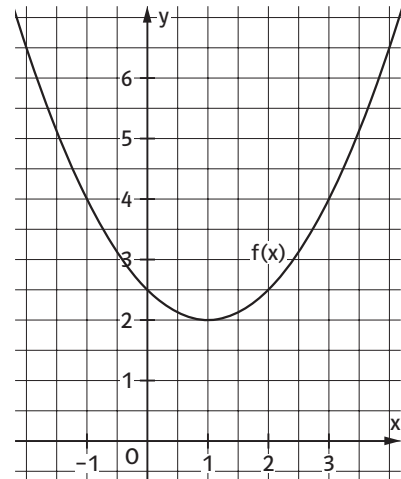
6 Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 15$
- c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- e) $f(x) = 2\sin(2x) - 3e^{2x}$

- c) $f(x) = 1 - e^x$
- f) $f(x) = (2 - 3x)^2$

7 Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion

Dargestellt ist der Graph der Funktion f. Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
 A: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle.
 B: Die Funktion f hat das lokale Minimum 2.
 C: Eine Stammfunktion F von f hat an der Stelle 0 eine Nullstelle.
 D: Eine Stammfunktion F von f hat bei $x = 2$ eine Wendestelle.



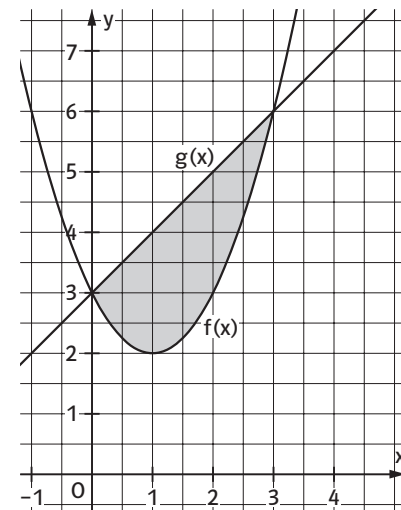
8 Integrale mithilfe des Hauptsatzes berechnen

- a) $\int_2^8 (5x^4 - 3x^2 - x) dx$
- b) $\int_0^{2\pi} (\sin(x) + x^2) dx$
- c) $\int_{-1}^1 (1 - e^x) dx$
- d) $\int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x} dx$

9 Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der von den Graphen von f und g begrenzt wird.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3; g(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2(x - 4) + 3$

- 10 Volumen von Rotationskörpern berechnen**
Die grau gefärbte Fläche rotiert in dem nebenstehenden Graphen um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.
- 11 Unbegrenzte Flächen berechnen**
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die eingeschlossen wird von den Koordinatenachsen und dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$.
- 12 Kurvenstücke bestimmen**
Bestimmen Sie die Länge des Kurvenstücks, das bei dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(\pi x)$ im Intervall $[0; 2]$ unter der x-Achse liegt.



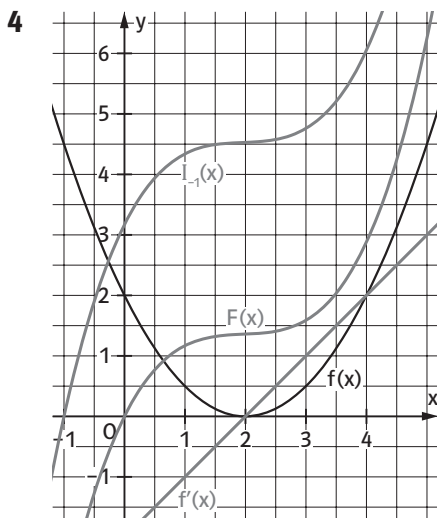
Kapitel II

1 Eine Funktion f heißt **integrierbar** im Intervall $[a; b]$, wenn die Annäherungen durch Rechtecksummen von unten und von oben denselben Grenzwert liefern. Diesen Grenzwert nennt man (bestimmtes) **Integral** von f im

Intervall $[a; b]$ und schreibt dafür $\int_a^b f(x) dx$.

2 Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von einer Funktion f im Intervall I , wenn **für alle x aus dem Intervall I gilt: $F'(x) = f(x)$.**

3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet: Ist die Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar und ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a; b]$, so gilt: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.



5 a) ja b) nein c) ja d) nein e) ja f) ja

6 a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ b) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 15x$ c) $F(x) = x - e^x$
 d) $F(x) = -\cos(x) + \sin(x)$ e) $F(x) = -\cos(2x) - \frac{3}{2}e^{2x}$ f) $F(x) = -\frac{1}{9}(2 - 3x)^3$

7 A: Stimmt, denn der Graph von f hat den Tiefpunkt $(1|2)$.

B: Stimmt, denn der Graph von f hat den Tiefpunkt $(1|2)$.

C: Stimmt, denn eine Stammfunktion zu f ist bis auf eine Konstante c eindeutig festgelegt. Für eine Funktion F kann die Konstante so gewählt werden, dass der Graph der Funktion durch den Punkt $(0|0)$ verläuft.

D: Falsch, denn wenn F an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle hätte, dann müsste die Ableitung f dort eine Extremstelle haben.

8 a) $\int_2^8 (5x^4 - 3x^2 - x) dx = 32202$

b) $\int_0^{2\pi} (\sin(x) + x^2) dx = \frac{8}{3}\pi^3$

c) $\int_{-1}^1 (1 - e^x) dx = \frac{1 + 2e - e^2}{e}$

d) $\int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{e^4 - 1}{4}$

9 Schnittpunkte der Graphen $P(0|3)$ und $Q(4|3)$.

Flächeninhalt zwischen den Graphen: $\int_0^4 (f(x) - g(x)) dx = \frac{32}{3}$.

10 Gerade: $f(x) = x + 3$; Parabel: $g(x) = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

$$V = V_f - V_g = \pi \int_0^3 (x + 3)^2 dx - \pi \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)^2 dx \approx 101,8.$$

11 $\int_0^z e^{-x} dx = 1 - e^{-z}$; für $z \rightarrow \infty$ ergibt sich 1 als Inhalt der Fläche A.

12 $\int_1^2 \sqrt{1 + (\pi \cdot \cos(\pi x))^2} dx \approx 2,3$