# Kapitel I

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

| | Checkliste | ☺ | 😐 | ☹ | Wiederholung |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ich kann die Ableitung einer Funktion an einer Stelle näherungsweise grafisch bestimmen und damit den Graphen der Ableitungsfunktion dieser Funktion skizzieren. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 9 |
| 2. | Ich kann mithilfe der Potenz-, der Faktor- und der Summenregel die Ableitung und höhere Ableitungen einer Funktion berechnen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 11<br>Beispiel 2, Seite 12 |
| 3. | Ich kann die Verkettung zweier Funktionen bilden und eine geeignete Funktion als Verkettung zweier Funktionen darstellen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 15 |
| 4. | Ich kann geeignete Funktionen mithilfe der Kettenregel ableiten. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel, Seite 18 |
| 5. | Ich kann geeignete Funktionen mithilfe der Produktregel und gegebenenfalls weiterer Regeln ableiten. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 20<br>Beispiel 2, Seite 21 |
| 6. | Ich kann zusammengesetzte Funktionen untersuchen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 2, Seite 25 |
| 7. | Ich kann Exponentialgleichungen mithilfe des natürlichen Logarithmus lösen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 2, Seite 29 |
| 8. | Ich kann die natürliche Logarithmusfunktion ableiten. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel, Seite 32 |
| 9. | Ich kann mithilfe der Tangente eine Näherungslösung für einen Funktionswert bestimmen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 35 |

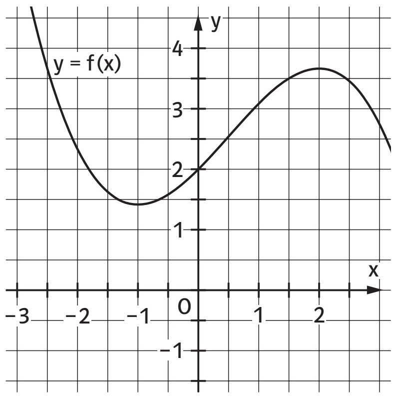
**Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.**

## 1 Grafisch ableiten

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie näherungsweise $f'(0)$.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion $f'$.




## 2 Mithilfe der Potenz-, Faktor- und Summenregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

a) $f(x) = -3x^3 + 0{,}5x^2 - 6x + 1$  b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$  c) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2}$

## 3 Funktionen verketten

a) Bilden Sie $u(v(x))$ und $v(u(x))$ für $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $v(x) = \frac{1}{x}$.

b) Stellen Sie die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2}$ als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.



**Autor:** Prof. Rolf Dürr

**4 Mithilfe der Kettenregel ableiten**

Bestimmen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x^2 - 4)^4$ b) $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2}$

**5 Mithilfe der Produktregel ableiten**

Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = (1 - x)\sin(x)$ b) $f(x) = (x + 1)(2x - 1)^3$ c) $f(x) = (2x - 1)\cos(2x)$

**6 Funktionen untersuchen**

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x - 2)^2 \cdot \sqrt{x}$.

**7 Exponentialgleichungen mithilfe des ln lösen**

Lösen Sie die Gleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des ln an und berechnen Sie einen Näherungswert auf 3 Dezimalen.

a) $e^x = 7$ b) $e^{2z-3} = 5$ c) $5 \cdot (e^{2y} - 8{,}2) = 4$ d) $e^2 + e^{0{,}2a} - 10 = 0$

☐ **8 Natürliche Logarithmusfunktion ableiten**

Bestimmen Sie die Ableitung und vereinfachen Sie das Ergebnis, wenn möglich.

a) $f(x) = 3 \cdot \ln(x) + x$ b) $f(x) = \ln(x + 1)$ c) $f(x) = \ln(x^2)$ d) $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$

☐ **9 Tangente berechnen und Näherungswert bestimmen**

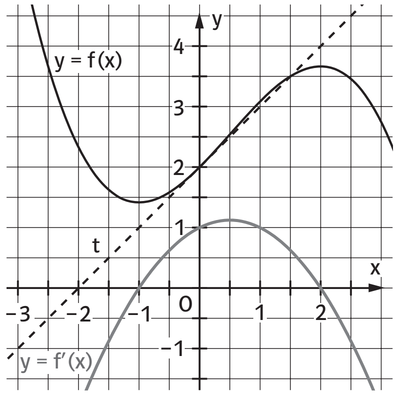
Berechnen Sie die Tangentengleichung im Punkt $(3|5)$, wenn dort die Steigung $f'(3) = 4$ beträgt und bestimmen Sie einen Näherungswert für den Funktionswert an der Stelle $x = 3{,}3$.



**Autor:** Prof. Rolf Dürr

# Kapitel I

**1** a) $f'(0)$ ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $P(0|2)$.
Aus der Zeichnung liest man ab: $f'(0) \approx 1$.
b) Graph von $f'$: vgl. Abbildung




**2** a) $f'(x) = -9x^2 + x - 6$; $f''(x) = -18x + 1$

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $f(x) = x^2 - 2 + \frac{4}{x^2}$; $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3}$; $f''(x) = 2 + \frac{24}{x^4}$

**3** a) $u(v(x)) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$; $v(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $f(x) = u(v(x))$ mit $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = (2x - 1)^2$ oder $u(x) = \frac{1}{x^2}$ und $v(x) = 2x - 1$

**4** a) $f'(x) = 4(2x^2 - 4)^3 \cdot 4x = 16x(2x^2 - 4)^3$

b) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$

**5** a) $f'(x) = -\sin(x) + (1 - x)\cos(x)$
b) $f'(x) = (2x - 1)^3 + (x + 1) \cdot 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = (2x - 1)^2 (2x - 1 + 6x + 6) = (2x - 1)^2 (8x + 5)$
c) $f'(x) = 2\cos(2x) - (2x - 1)\sin(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x) - 2(2x - 1)\sin(2x)$

**6** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$. Keine Symmetrie erkennbar.
Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs: linker Rand $f(0) = 0$; rechter Rand $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.
Achsenschnittpunkte: y-Achsenabschnitt $f(0) = 0$; Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Ableitungen: $f'(x) = \frac{5x^2 - 12x + 4}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$;

$f''(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = \frac{15x^2 - 12x - 4}{4x\sqrt{x}}$;

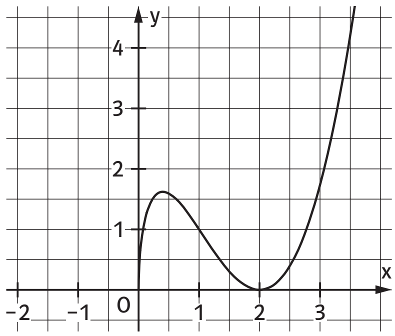
$f'''(x) = \frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{15x^2 + 12x + 12}{8x^2\sqrt{x}}$.

Extrempunkt: $x_3 = 0{,}4$: $f''(0{,}4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(0{,}4|1{,}619)$.
Extrempunkt $x_4 = 2$: $f''(2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(2|0)$.

Wendepunkt: $x_5 = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{15}$: $f'''(x_5) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(1{,}053|0{,}920)$.

Wendepunkt $x_6 = \frac{6 - 4\sqrt{6}}{15}$ liegt nicht im Definitionsbereich, muss deswegen nicht betrachtet werden.

Graph (siehe rechts).




**7** a) $e^x = 7$
$x = \ln(7)$

b) $e^{2z-3} = 5$
$z = \frac{1}{2} \cdot (\ln(5) + 3)$

c) $5 \cdot (e^{2y} - 8{,}2) = 4$
$y = \frac{1}{2} \cdot \ln(9) = \ln(3)$

d) $e^2 + e^{0{,}2a} - 10 = 0$
$a = 5 \cdot \ln(10 - e^2)$

**8** a) $f(x) = 3 \cdot \ln(x) + x$; $f'(x) = \frac{3}{x} + 1$

b) $f(x) = \ln(x + 1)$; $f'(x) = \frac{1}{x + 1}$

c) $f(x) = \ln(x^2)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

d) $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$; $f'(x) = 3 \cdot \ln(x) + 3$

**9** $t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3) = 4(x - 3) + 5 = 4x - 7$
$t(3{,}3) = 6{,}2$ ist ein Näherungswert für $f(3{,}3)$



Autor: Prof. Rolf Dürr