Kapitel VIII

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann bei einer Binomialverteilung den fehlenden Parameter n bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 270
2.	Ich kann bei einer Binomialverteilung den fehlenden Parameter p bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 271
3.	Ich kann bei einer Binomialverteilung den fehlenden Parameter k bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 3, Seite 271
4.	Ich kann bei einem einseitigen Hypothesentest den Ablehnungsbereich angeben und die Entscheidungsregel formulieren.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 275
5.	Ich kann zu einem Hypothesentest eine Nullhypothese und Alternative formulieren, die der Zielsetzung des Tests entspricht.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 279
6.	Ich kann bei einem zweiseitigen Hypothesentest den Ablehnungsbereich angeben und die Entscheidungsregel formulieren.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 282
7.	Ich kann die Fehler 1. und 2. Art erläutern.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 285
8.	Ich kann die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße angeben und die zugehörige Glockenkurve skizzieren.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 292
9.	Ich kann Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 293

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Parameter n bestimmen

Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 80 %.
Bestimmen Sie die Anzahl an Elfmetern, die er mindestens schießen muss, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens fünf verwandelte befinden.

2 Parameter p bestimmen

Wenn man ein Glücksrad zehnmal dreht, soll die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens fünfmal das rote Feld erscheint, 60 % betragen.
Bestimmen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das rote Feld bei einmaligem Drehen sein muss.

3 Parameter k bestimmen

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus zwölf Fragen. Zu jeder gibt es vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand nur durch Raten den Test besteht, soll höchstens 8 % betragen.
Bestimmen Sie die Mindestanzahl an richtigen Antworten, die für das Bestehen des Multiple-Choice-Tests verlangt werden muss.

Autor: Dr. Torsten Schatz

4 Einseitiger Hypothesentest
Ein Medikament zeigte bislang in 4 % der Fälle unerwünschte Nebenwirkungen. Nach einer Veränderung der Zusammensetzung behauptet der Hersteller, dass diese Quote nun geringer sei. Die Nullhypothese H_0: $p \geq 4\%$ wird bei einem Stichprobenumfang von 500 Testpersonen auf einem Signifikanzniveau von 1% getestet.
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und die Entscheidungsregel des Tests.

5 Nullhypothese und Alternative formulieren
In einer Stadt befürworten laut einer älteren Umfrage nur 40 % der Bevölkerung den Bau eines weiteren Parkhauses. Die Stadtverwaltung ist der Auffassung, dass die Anzahl der Befürworter inzwischen gestiegen sei. Dazu soll ein Test durchgeführt werden.
Formulieren Sie eine Nullhypothese und eine Alternative, die der Zielsetzung dieses Tests entspricht.

6 Zweiseitiger Hypothesentest
Die Behauptung, dass beim Werfen eines Reißnagels dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % auf dem Kopf landet, soll mithilfe eines zweiseitigen Tests überprüft werden. Dazu wird die Nullhypothese H_0: $p = 0{,}6$ bei einem Stichprobenumfang von 100 auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet.
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und die Entscheidungsregel des Tests.

7 Fehler 1. und 2. Art erläutern
Ein Hersteller von Saatgut gibt an, dass mindestens 95 % der Samen keimen. Ein Kunde bezweifelt dies und führt einen Hypothesentest durch. Als Nullhypothese wählt er H_0: $p \geq 0{,}95$.
Erläutern Sie in diesem Zusammenhang den Fehler 1. Art und den Fehler 2. Art.

8 Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße angeben und Glockenkurve skizzieren
Geben Sie einen Funktionsterm der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 5$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ an und skizzieren Sie die zugehörige Glockenkurve.

9 Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen berechnen
Die Länge von Salatgurken (in cm) einer bestimmten Sorte ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 35$ und der Standardabweichung $\sigma = 15$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Salatgurke
a) kürzer als 25 cm ist,
b) länger als 50 cm ist,
c) eine Länge zwischen 40 cm und 50 cm hat,
d) eine Länge zwischen 10 cm und 60 cm hat.

Autor: Dr. Torsten Schatz

Kapitel VIII

1 X zählt die Anzahl der Treffer und ist binomialverteilt mit $p = 0{,}8$. Gesucht ist n.
Es soll $P(X \geq 5) \geq 0{,}9$ gelten. Es ist $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$. Also muss $P(X \leq 4) \leq 0{,}1$ gelten.
Für $n = 7$ ist $P(X \leq 4) \approx 0{,}148$ und für $n = 8$ ist $P(X \leq 4) \approx 0{,}056$ (WTR).
Der Fußballspieler muss mindestens achtmal schießen.

2 X gibt an, wie oft das rote Feld erscheint und ist binomialverteilt mit $n = 10$. Gesucht ist p.
Es soll $P(X \leq 5) = 0{,}6$ gelten.
Für $p = 0{,}50$ ist $P(X \leq 5) \approx 0{,}623$ und für $n = 0{,}51$ ist $P(X \leq 5) \approx 0{,}598$ (WTR).
Man testet den Wert in der Mitte. Für $p = 0{,}505$ ist $P(X \leq 5) \approx 0{,}611$. Also liegt das gesuchte p zwischen 0,50 und 0,505.
Die Trefferwahrscheinlichkeit für das rote Feld muss ca. 0,50 betragen.

3 X gibt die Anzahl richtiger Antworten an und ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 12$ und $p = 0{,}25$.
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl k, sodass $P(X \geq k) \leq 0{,}08$ ist.
Also muss $P(X \leq k - 1) \geq 0{,}92$ gelten. Es gilt $P(X \leq 4) \approx 0{,}842$ und $P(X \leq 5) \approx 0{,}946$ (WTR). Damit ist $k - 1 = 5$, also $k = 6$.
Für das Bestehen des Multiple-Choice-Tests müssen mindestens sechs richtige Antworten verlangt werden.

4 Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft bei den 500 Testpersonen unerwünschte Nebenwirkungen auftreten. Gilt die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}04$, so ist X im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}04$. Es handelt sich um einen linksseitigen Test.
Der Ablehnungsbereich ist $\{0; \ldots; g\}$, wobei g die größte natürliche Zahl mit $P(X \leq g) \leq 0{,}01$ ist. Es ist $P(X \leq 10) \approx 0{,}0097$ und $P(X \leq 11) \approx 0{,}0195$ (WTR).
Der Ablehnungsbereich ist $\{0; \ldots; 10\}$ und die Entscheidungsregel lautet: „Wenn höchstens zehn Personen unerwünschte Nebenwirkungen haben, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.“

5 Die Stadtverwaltung wählt als Alternative, dass die Zahl der Befürworter inzwischen größer als 40 % ist.
Somit ist H_0: $p = 0{,}4$ und H_1: $p > 0{,}4$ (oder auch H_0: $p \leq 0{,}4$ und H_1: $p > 0{,}4$).

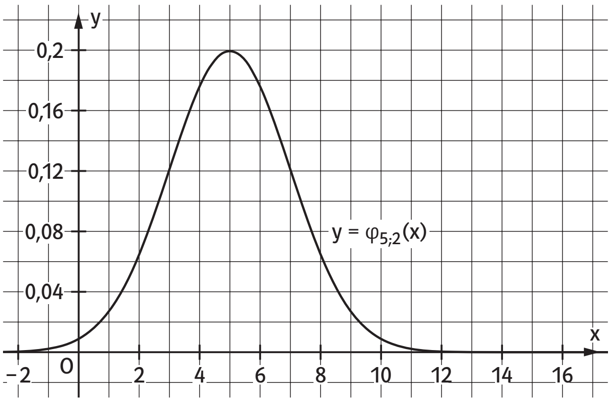
6 Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft der Reißnagel auf dem Kopf landet. Gilt die Nullhypothese H_0: $p = 0{,}6$, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}6$. Der Ablehnungsbereich ist $\{0; \ldots; g_1\}$ und $\{g_2; \ldots; 100\}$, wobei g_1 die größte natürliche Zahl mit $P(X \leq g_1) \leq 0{,}025$ und g_2 die kleinste natürliche Zahl mit $P(X \geq g_2) \leq 0{,}025$, d.h. $P(X \leq g_2 - 1) \geq 0{,}975$ ist. Es ist $P(X \leq 49) \approx 0{,}017$ und $P(X \leq 50) \approx 0{,}027$ sowie $P(X \leq 68) \approx 0{,}960$ und $P(X \leq 69) \approx 0{,}975$ (WTR). Also ist $g_1 = 49$ und $g_2 = 69 + 1 = 70$.
Der Ablehnungsbereich ist $\{0; \ldots; 49\}$ und $\{70; \ldots; 100\}$ und die Entscheidungsregel lautet: „Wenn der Reißnagel höchstens 49- oder mindestens 70-mal auf dem Kopf landet, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.“

7 Es ist H_0: $p \geq 0{,}95$ und H_1: $p < 0{,}95$.
Der Fehler 1. Art ist der Fehler, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist. Das heißt, die Angabe des Herstellers, dass mindestens 95 % der Samen keimen, stimmt, aber trotzdem geht man aufgrund des Stichprobenergebnisses davon aus, dass weniger Samen keimen.
Der Fehler 2. Art ist der Fehler, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl sie falsch ist. Das heißt, die Angabe des Herstellers, dass mindestens 95 % der Samen keimen, stimmt nicht, aber man behält sie aufgrund des Stichprobenergebnisses bei.

Autor: Dr. Torsten Schatz

8 Dichtefunktion: $\varphi_{5;\,2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-5)^2}{8}}$

Glockenkurve:



9 $\mu = 35$, $\sigma = 15$

a) $P(X < 25) \approx 0{,}253$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Salatgurke kürzer als 25 cm ist, beträgt ca. 25,3 %.

b) $P(X > 50) \approx 0{,}159$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Salatgurke länger als 50 cm ist, beträgt ca. 15,9 %.

c) $P(40 \le X \le 50) \approx 0{,}211$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Salatgurke eine Länge zwischen 40 cm und 50 cm hat, beträgt ca. 21,1 %.

d) $P(10 \le X \le 60) \approx 0{,}904$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Salatgurke eine Länge zwischen 10 cm und 60 cm hat, beträgt ca. 90,4 %.

Autor: Dr. Torsten Schatz