Kapitel VII

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann den Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1 und 2, Seite 221
2.	Ich kann den Abstand eines Punktes von einer Geraden berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 224
3.	Ich kann den Abstand zueinander windschiefer Geraden berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 227
4.	Ich kann Winkelgrößen zwischen Vektoren sowie die Größe von Schnittwinkeln berechnen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 230 Merkkasten, Seite 234
5.	Ich kann Punkte an Punkten, Geraden und Ebenen im Raum spiegeln.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 241
6.	Ich kann Bewegungen mithilfe von Vektoren modellieren.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 243
7.	Ich kann Beweise mithilfe von Vektoren führen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 247

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$ und der Punkt $R(7|7|-11{,}5)$.

a) Berechnen Sie den Abstand von R zu E mit der Hesse'schen Normalenform.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes von R auf E.

2 Abstand eines Punktes von einer Geraden berechnen

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $R(2|3|5)$

a) von den Koordinatenachsen,

b) von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3 Abstand zueinander windschiefer Geraden berechnen

Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind zueinander windschief. Berechnen Sie ihren Abstand.

4 Winkelgrößen zwischen Vektoren und die Größe von Schnittwinkeln berechnen

Gegeben sind die Punkte $P(1|2|1)$, $Q(3|2|-5)$ und $R(-6|7|3)$. Die Gerade g enthält P und Q, die Gerade h enthält P und R.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$.

b) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und h.

c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g mit der Ebene $E: x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7$.

d) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebene E aus Teilaufgabe c) und die x_1x_2-Ebene?

Autor: Dieter Greulich

5 An Punkten, Geraden und Ebenen spiegeln

Gegeben sind die Punkte $P(1|2|3)$ und $Q(4|0|20)$ sowie die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 152$.

a) Der Punkt P wird am Punkt Q gespiegelt. Welche Koordinaten hat der Bildpunkt P'?

b) Der Punkt P wird an der x_1-Achse gespiegelt. Welche Koordinaten hat der Bildpunkt P'?

c) Der Punkt P wird an der Ebene E gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P'.

d) Die Gerade durch die Punkte P und Q wird an E gespiegelt. Geben Sie eine Gleichung für die Bildgerade g' an.

6 Bewegungen mithilfe von Vektoren modellieren

Ein Boot befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $P(3|2)$. Nach 15 Minuten befindet es sich im Punkt $Q(6{,}75|4)$. Es bewegt sich gleichmäßig auf einer Geraden durch diese beiden Punkte. 1 LE entspricht 1 km.

a) Geben Sie die Zeit-Ort-Gleichung des Bootes und seine Position nach einer Stunde an.

b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Boot?

7 Beweise mithilfe von Vektoren führen

Beweisen Sie: In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ ist die Seitenhalbierende s_c identisch mit der Höhe h_c.
(Achtung: Das Dreieck in Fig. 1 ist nicht gleichschenklig.)

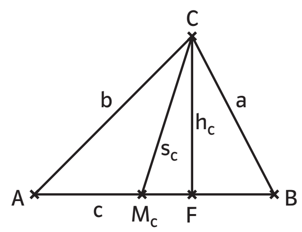

Fig. 1

Autor: Dieter Greulich

Kapitel VII

1 a) $d(R; E) = 10{,}5$ LE
b) Lotfußpunkt: $F(0\,|\,0\,|\,-8)$

2 a) Abstand von der x_1-Achse: $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
Abstand von der x_2-Achse: $\sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$
Abstand von der x_3-Achse: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
b) Fußpunkt des Lotes von R auf g: $F(3\,|\,9\,|\,23)$
Abstand: $d(R; g) = 19$ LE

3 $d(g; h) = 12$ LE

4 a) $\approx 117{,}7°$
b) $\approx 62{,}3°$
c) $\approx 61{,}5°$
d) $\approx 27{,}3°$

5 a) $P'(7\,|\,-2\,|\,37)$
b) $P'(1\,|\,-2\,|\,-3)$
c) $P'(13\,|\,10\,|\,31)$
d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$

6 a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}$. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot 4 \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix}$. Nach einer Stunde befindet sich das Boot im Punkt $R(18\,|\,10)$.

b) $\left|\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. Das Boot bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $17\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7 Man wählt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Dann ist $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$ und $\overrightarrow{M_cC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.
1. Voraussetzung:
„Das Dreieck ist gleichschenklig.“ bedeutet in Vektorschreibweise
$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ bzw. $|\vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$ bzw. $\vec{b}^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a}^2$ bzw. $\vec{a}^2 = 2\vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Behauptung:
„Die Seitenhalbierende s_c ist identisch mit der Höhe h_c.“ bedeutet in Vektorschreibweise
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{M_cC}$ bzw. $\vec{a} \cdot \left(-\frac{1}{2}a + \vec{b}\right) = 0$.
3. Beweis:
$\vec{a} \cdot \left(-\frac{1}{2}a + \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Autor: Dieter Greulich