Kapitel VI

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann den Gegenvektor, den Betrag und den Einheitsvektor eines Vektors bestimmen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 177
2.	Ich kann die gegenseitige Lage von Geraden bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 181
3.	Ich kann aus drei gegebenen Punkten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, die Parameterform einer Ebenengleichung aufstellen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 185
4.	Ich kann überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 185
5.	Ich kann zwei Vektoren bzw. zwei Geraden auf Orthogonalität überprüfen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 189
6.	Ich kann zu zwei Vektoren einen dazu jeweils orthogonalen Vektor bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 189 Merkkasten, Seite 194
7.	Ich kann aus drei gegebenen Punkten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, eine Parameter-, Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene aufstellen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 195
8.	Ich kann mithilfe der Spurpunkte und Spurgeraden die Lage einer Ebene in einem Koordinatensystem veranschaulichen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 199
9.	Ich kann die gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 203
10.	Ich kann die gegenseitige Lage zweier Ebenen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 207

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Gegenvektor, Betrag und Einheitsvektor zu einem Vektor bestimmen

Geben Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seinen Gegenvektor an.
Bestimmen Sie anschließend den Betrag sowie den Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(3|0|7)$, $B(-1|4|0)$ b) $A(1|-1|6)$, $B(3|1|7)$ c) $A(-1|2|3)$, $B(1|5|-3)$

2 Gegenseitige Lage von Geraden bestimmen

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3 Parameterform einer Ebenengleichung aufstellen

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die die Punkte

a) $A(3|0|2)$, $B(1|2|9)$ und $C(-1|2|3)$, b) $A(-1|10|1)$, $B(-2|3|2)$ und $C(1|4|5)$

enthält.

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dr. Michael Kölle

4 Punktprobe durchführen

Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(3|0|5)$ in der Ebene E liegt.

a) $E: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

b) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

5 Zwei Geraden auf Orthogonalität überprüfen

Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6 Einen zu zwei Vektoren orthogonalen Vektor bestimmen

a) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht ist.

b) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7 Eine Parameter-, Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene aufstellen

Bestimmen Sie eine Parameter-, Normalen- und Koordinatengleichung der Ebene E, die die Punkte $A(9|2|-3)$, $B(3|3|-2)$ und $C(1|6|8)$ enthält.

8 Lage einer Ebene in einem Koordinatensystem veranschaulichen

Geben Sie die Spurpunkte der Ebene E an und veranschaulichen Sie E mithilfe ihrer Spurgeraden in einem Koordinatensystem.

a) $E: 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$

b) $E: 3x_1 - 4x_3 = -12$

c) $E: -2x_2 = 8$

9 Gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade bestimmen

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene E.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

10 Gegenseitige Lage zweier Ebenen bestimmen

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E und F.

a) $E: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$, $F: x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$

b) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dr. Michael Kölle

Kapitel VI

1 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 16 + 49} = 9$, $\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$, $\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, $\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

2 a) Die Richtungsvektoren von g und h sind Vielfache voneinander, g und h sind also zueinander parallel. Da h z. B. den Ursprung nicht enthält (g aber schon), sind g und zueinander parallel und verschieden.
b) Da die Richtungsvektoren von g und h keine Vielfache voneinander sind, sind g und h zueinander windschief oder sie schneiden sich. Für $r = 1$ und $s = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt $S(3|-1|4)$.
c) Die x_3-Koordinate des Stützvektors von g unterscheidet sich von der in Teilaufgabe b). Ansonsten sind die Teilaufgaben identisch. Damit sind g und h zueinander windschief.
d) Die Richtungsvektoren von g und h sind Vielfache voneinander. Da der Punkt $P(1|1|1)$ der Geraden g auch auf h liegt $(s = 10)$, sind g und h zueinander parallel und identisch.

3 a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

4 a) $3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 5 = 4$. P liegt in E.
b) $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 + 12 \neq 0$. P liegt nicht in E
c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für $r = 1$ und $s = -1$. P liegt in E.

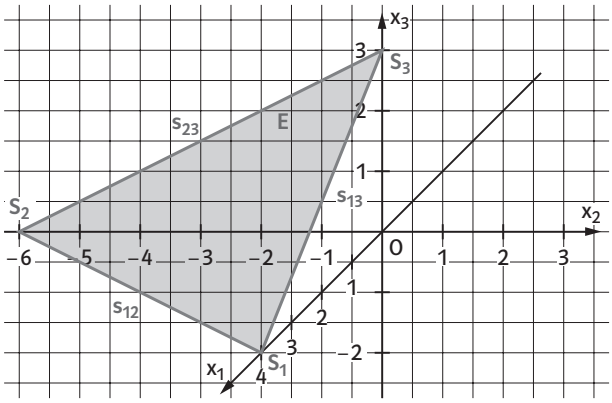
5 a) Die beiden Geraden schneiden sich in $S(1|1|1)$. Da $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$ ist, schneiden sich g und h nicht senkrecht.
b) Die beiden Geraden schneiden sich in $S(2|0|-3)$. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist, schneiden sich g und h senkrecht.

6 a) Das Vektorprodukt der beiden Vektoren ergibt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist senkrecht zu den beiden gegebenen Vektoren.
b) Das Vektorprodukt $\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ der beiden Spannvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt einen möglichen Normalenvektor von E.

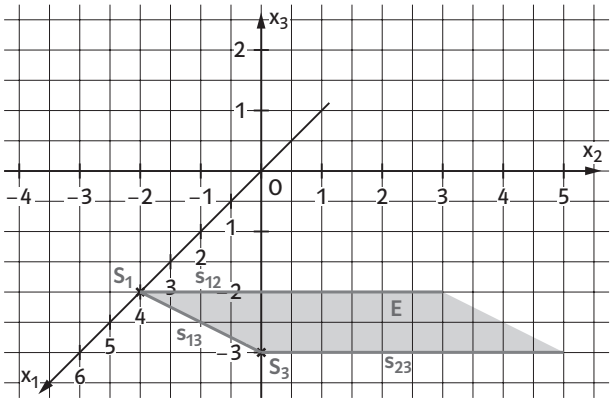
7 Individuelle Lösung, z. B.:
Parametergleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$
Damit ergibt sich $\begin{pmatrix} 7 \\ 56 \\ -16 \end{pmatrix}$ als ein möglicher Normalenvektor von E.
Normalengleichung: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 56 \\ -16 \end{pmatrix} = 0$
Koordinatengleichung: $E: 7x_1 + 56x_2 - 16x_3 = d$. Einsetzen von A liefert $d = 223$.

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dr. Michael Kölle

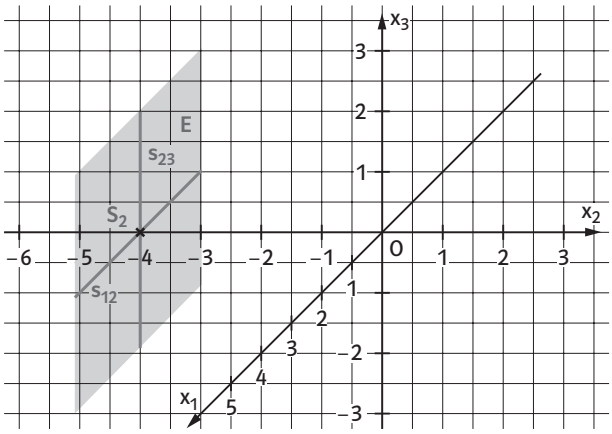
8 a) $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|-6|0)$ und $S_3(0|0|3)$



b) $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|-3)$



c) $S_2(0|-4|0)$



9 a) Einsetzen von g in E liefert $12r + 2(-1 - r) - (-1 + 2r) = 7$ mit $r = 1$. Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich also in $S(4|-2|1)$.

b) Da $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ist, sind g und E zueinander parallel. Da $P(2|1|3)$ in E, aber nicht in g liegt, sind g und E zueinander parallel und verschieden.

c) Der Richtungsvektor von g ist die Differenz der beiden Spannvektoren von E. Daher ist g parallel zu E. Da z. B. $P(4|2|-8)$ offensichtlich in E, aber auch in g $(r = 1)$ liegt, liegt g in E.

(Alternative: Ein möglicher Normalenvektor von E ist $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da das Skalarprodukt des Normalenvektors von E mit dem Richtungsvektor von g null ist, ist g zu E parallel. Eine Punktprobe liefert, dass g in E liegt.)

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dr. Michael Kölle

10 a) Lösen des Gleichungssystems

$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$

liefert $L = \{(2 - t; t; -1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Die Schnittgerade von E und F hat also z. B. die Gleichung

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Es ist $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ und $F: x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$. Da die Normalenvektoren Vielfache voneinander, die Gleichungen aber nicht zueinander äquivalent sind, sind E und F zueinander parallel und verschieden.

Klett

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dr. Michael Kölle