# Kapitel V

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

| | Checkliste | ☺ | 😐 | ☹ | Wiederholung |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ich kann aus der Stufenform eines LGS die Lösung ermitteln. | ☐ | ☐ | ☐ | Lehrtext, Seite 158 |
| 2. | Ich kann mit dem Gauß-Verfahren ein LGS lösen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 159 |
| 3. | Ich kann die Lösungsmenge eines LGS bestimmen. | ☐ | ☐ | ☐ | Lehrtext, Seite 162<br>Beispiel, Seite 163 |
| 4. | Ich kann den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion aus Eigenschaften des Graphen der Funktion bestimmen. | ☐ | ☐ | ☐ | Beispiel 1, Seite 166<br>Beispiel 3, Seite 167 |

**Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.**

### 1 Lösung eines LGS aus Stufenform bestimmen

Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -x_3 &= -4 \end{aligned}$$

### 2 LGS mit dem Gauß-Verfahren lösen

Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

### 3 Lösungsmenge eines LGS bestimmen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 &= -3 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -2 & 2 & -10 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{array}\right)$$

### 4 Funktionsterm bestimmen

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f möglichst kleinen Grades, deren Graph im Ursprung einen Tiefpunkt und in $(1|1)$ einen Wendepunkt hat.


Autor: Prof. Detlef Hoche

# Kapitel V

**1** $x_3 = 4,\ x_2 = -1$ und $x_1 = 1$
Die Lösung ist $(1; -1; 4)$.

**2**
$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 & \\ \text{II} & 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 & \text{IIa} = \text{II} - 2\cdot\text{I} \\ \text{III} & -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 & \text{IIIa} = \text{III} + 3\cdot\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 & \\ \text{IIa} & 10x_2 - 9x_3 = 1 & \\ \text{IIIa} & -7x_2 + 10x_3 = 3 & \text{IIIb} = 7\cdot\text{IIa} + 10\cdot\text{IIIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{IIa} & 10x_2 - 9x_3 = 1 \\ \text{IIIb} & 37x_3 = 37 \end{array}$$

$x_3 = 1,\ x_2 = 1$ und $x_1 = 1$
Die Lösung ist $(1; 1; 1)$.

**3** a)
$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 & \\ \text{II} & 2x_1 + 4x_3 = -3 & \\ \text{III} & -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -4 & \text{IIIa} = \text{III} + 2\cdot\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 & \\ \text{II} & 2x_1 + 4x_3 = -3 & \\ \text{IIIa} & 2x_1 + 4x_3 = -2 & \text{IIIb} = \text{III} - \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \text{II} & 2x_1 + 4x_3 = -3 \\ \text{IIIb} & 0 = 1 \end{array}$$

Lösungsmenge: $L = \{\ \}$

b)
$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 & \\ \text{II} & 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 6 & \text{IIa} = \text{I} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{I} & x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ \text{IIa} & 7x_1 - 7x_3 = 7 \end{array}$$

Man wählt z. B. $x_3 = t,\ x_1 = 1 + t$ und $x_2 = 0{,}4t$.
Lösungsmenge: $L = \{(1 + t;\ 0{,}4t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -2 & 2 & -10 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Man wählt z. B. $x_3 = t,\ x_2 = s$ und $x_1 = 5 - s + t$.
Lösungsmenge: $L = \{(5 - s + t;\ s;\ t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$


Autor: Prof. Detlef Hoche

**4** 1. Aufstellen des allgemeinen Funktionsterms und Angeben der Ableitungen der Funktion:
Es liegen vier Bedingungen vor. Daher ist die Funktion f vom Grad drei.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f'''(x) = 6a$
2. Formulieren der gegebenen Bedingungen mit f, f′, f″ usw.:
$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f''(1) = 0$
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{ll} f(0) = 0: & \phantom{6a + 2b + c + {}} d = 0 \\ f'(0) = 0: & \phantom{6a + 2b + {}} c \phantom{{}+ d} = 0 \\ f(1) = 1: & a + b \phantom{{}+ c + d} = 1 \\ f''(1) = 0: & 6a + 2b \phantom{{}+ c + d} = 0 \end{array}$$
4. Lösen des linearen Gleichungssystems:
$a = -0{,}5$; $b = 1{,}5$
$f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2$
5. Überprüfen, ob alle angegebenen Bedingungen erfüllt sind:
Es ist $f''(0) = 3 > 0$. Also liegt im Ursprung ein Tiefpunkt des Graphen von f vor.
Wegen $f'''(1) = -3 \neq 0$ ist $(1|1)$ ein Wendepunkt des Graphen von f.
Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2$ erfüllt die genannten Bedingungen.


Autor: Prof. Detlef Hoche