Kapitel IV

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann Nullstellen beliebiger, zusammengesetzter Funktionen berechnen.	☐	☐	☐	Beispiele 1, 2 und 3, Seiten 120 und 121
2.	Ich kann senkrechte Asymptoten eines Graphen und Polstellen einer Funktion mit und ohne Vorzeichenwechsel bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 124
3.	Ich kann eine Funktion auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersuchen und die Gleichung der waagerechten Asymptoten eines Graphen angeben.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 127
4.	Ich kann Funktionen bzw. deren Graphen auf charakteristische Eigenschaften untersuchen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 131
5.	Ich kann vom Graphen einer Funktion auf deren Funktionsterm schließen und umgekehrt.	☐	☐	☐	Lehrtext, Seite 130 Beispiel 1, Seite 131
6.	Ich kann trigonometrische Gleichungen mit und ohne WTR sowie zeichnerisch lösen.	☐	☐	☐	Beispiele 2 und 3, Seite 136
7.	Ich kann Funktionenscharen auf charakteristische Eigenschaften untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 140
8.	Ich kann Nullstellen einer Funktion näherungsweise mithilfe des Newton-Verfahrens bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 144

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Nullstellen bestimmen

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (6 + x)$
b) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 4}$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$
d) $f(x) = e^x x - 2e^x x^2$
e) $f(x) = e^{2x} - e^x - 6$
f) $f(x) = \ln(x) \cdot (x^2 - 4)$

2 Senkrechte Asymptoten und Polstellen bestimmen

Untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücken. Geben Sie gegebenenfalls Polstellen sowie die Gleichung der senkrechten Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$
b) $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4}$
c) $f(x) = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2}$

3 Funktionen auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersuchen und die Gleichung waagerechter Asymptoten angeben

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der waagerechten Asymptote an.

a) $f(x) = 3 + \frac{2}{x^3}$
b) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x^2}$
c) $f(x) = \frac{6x^3}{4 - 2x}$
d) $f(x) = \frac{2e^x - 1}{x^2}$

4 Funktionen bzw. deren Graphen auf charakteristische Eigenschaften untersuchen

a) Nennen Sie mindestens fünf charakteristische Eigenschaften, auf die man Funktionen bzw. deren Graphen untersuchen kann.

b) Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$ sowie deren Graph auf mindestens drei charakteristische Eigenschaften.

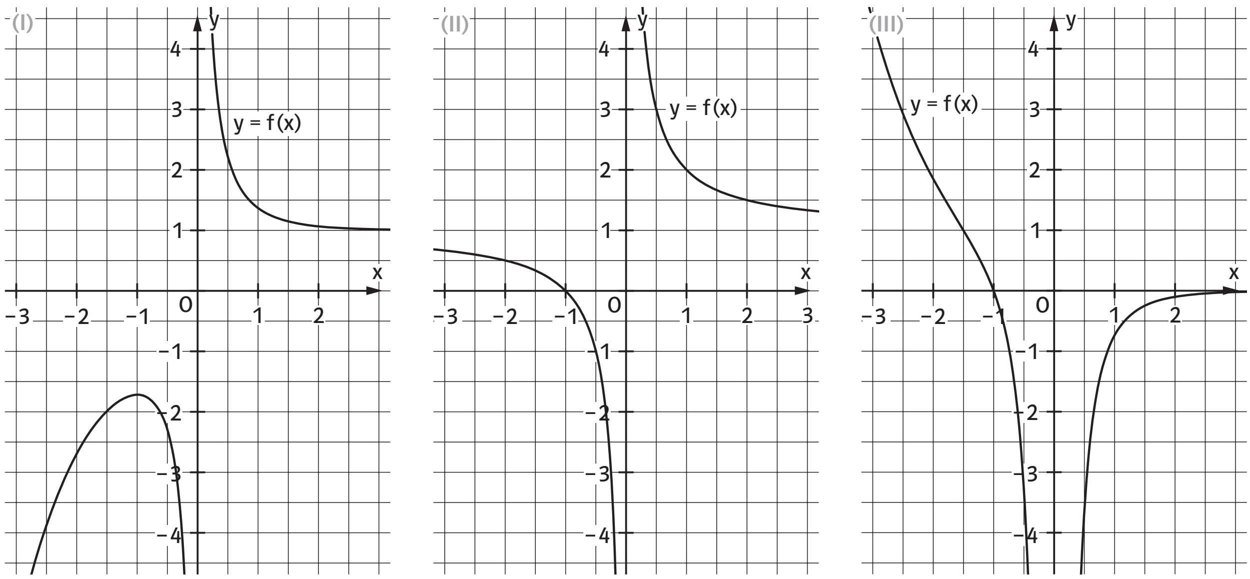
c) Skizzieren Sie den Graphen von f aus Teilaufgabe b) mithilfe der dort bestimmten Eigenschaften.

Autorin: Maren Herrmann

5 Vom Graphen einer Funktion auf den Funktionsterm schließen und umgekehrt

a) Welcher Graph gehört zu welcher Funktion? Ordnen Sie zu und begründen Sie.

(1) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ (2) $g(x) = \frac{e^{-x}}{x} + 1$ (3) $h(x) = \frac{1-x}{x^2}$ (4) $i(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (1+x)}{x^2}$



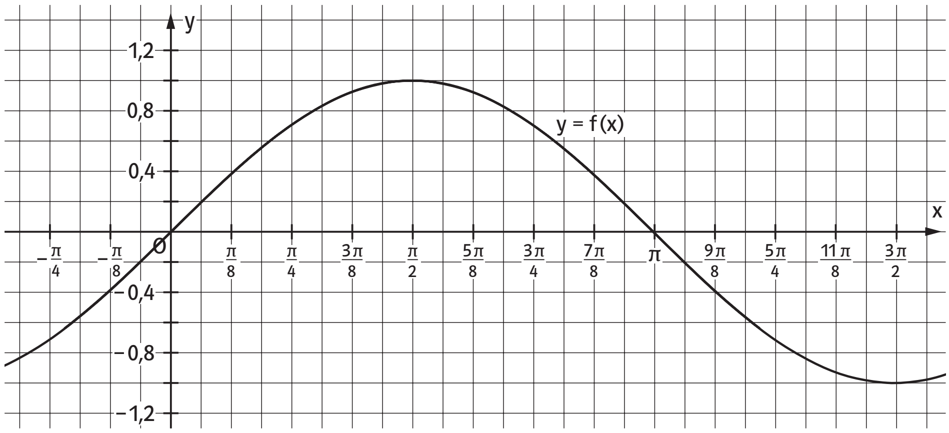
b) Einer der Funktionsterme aus Teilaufgabe a) bleibt übrig. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

c) Es gilt $g'(x) = i(x)$. Weisen Sie dies sowohl rechnerisch als auch anhand der zugehörigen Graphen nach.

6 Trigonometrische Gleichungen lösen

a) Lösen Sie folgende trigonometrische Gleichungen für $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ und veranschaulichen Sie die Lösung(en) grafisch mithilfe des abgebildeten Graphen von $y = \sin(x)$.

(1) $\sin(x) = 0{,}4$ (2) $\sin(x) = -0{,}6$



b) Lösen Sie folgenden trigonometrischen Gleichungen im Intervall $[0; 2\pi]$.

(1) $4 \cdot \cos(x) \cdot (1 + \cos(x)) = 0$ (2) $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$ (3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

7 Funktionenscharen auf charakteristische Eigenschaften untersuchen

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = \frac{t \cdot e^x}{x - t}$ für $t \in \mathbb{R}^+$.

a) Zeigen Sie, dass $P(0\,|\,-1)$ gemeinsamer Punkt aller Graphen von f_t ist.

b) Untersuchen Sie die Graphen von f_t auf Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls die Ortskurve der Extrempunkte an.

c) Skizzieren Sie den Graphen von $f_{0,5}$.

Autorin: Maren Herrmann

8 Nullstellen mithilfe des Newton-Verfahrens bestimmen

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{x}$ schneidet die x-Achse im Intervall $[2; 3]$ genau einmal, und zwar an der Stelle x^*. Bestimmen Sie den Wert von x^* mithilfe des Newton-Verfahrens auf drei Dezimalen gerundet.

Autorin: Maren Herrmann

Kapitel IV

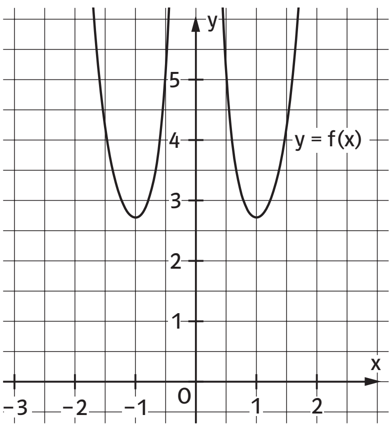
1 a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -6$ b) $x = 3$ c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; f hat keine Nullstellen.

d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ e) $x = \ln(3)$ f) $D_f = \mathbb{R}^+$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

2 a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$
Für $x \to 3$, $x < 3$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to 3$, $x > 3$ gilt $f(x) \to +\infty$.
$x_0 = 3$ ist Polstelle mit VZW. Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 3$.
b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
Für $x \to -2$, $x < -2$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to -2$, $x > -2$ gilt $f(x) \to +\infty$.
$x_0 = -2$ ist Polstelle mit VZW. Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -2$.
c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Für $x \to 0$, $x < 0$ gilt $f(x) \to -\infty$ und und für $x \to 0$, $x > 0$ gilt $f(x) \to -\infty$.
$x_0 = 0$ ist Polstelle ohne VZW. Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$.

3 a) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to 3$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 3$.
$y = 3$ ist waagerechte Asymptote.
b) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to 4$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 4$.
$y = 4$ ist waagerechte Asymptote.
c) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
Es gibt keine waagerechte Asyptote.
d) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 0$.
$y = 0$ ist waagerechte Asymptote.

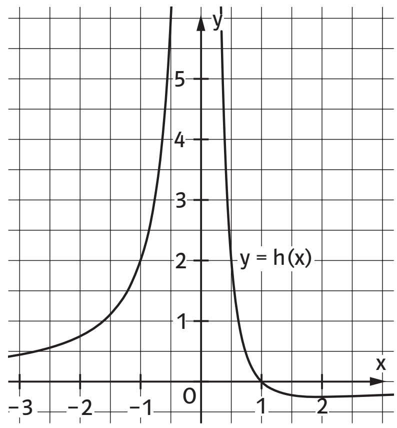
4 a) Individuelle Lösung, z.B.: Symmetrie des Graphen zur y-Achse bzw. zum Ursprung; Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen; Extrempunkte des Graphen; Wendepunkte des Graphen; Polstellen der Funktion; Asymptoten des Graphen; Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ und waagerechte Asymptoten des Graphen; Monotonie der Funktion.
b) Individuelle Lösung, z. B.:
(1) Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt $f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{(-x)^2} = \frac{e^{x^2}}{x^2} = f(x)$.
(2) $x_0 = 0$ ist Polstelle von f ohne VZW; $x = 0$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von f.
(3) Mit $f'(x) = \frac{2e^{x^2} \cdot (x^2 - 1)}{x^3} = 0$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ sowie dem VZW von f′ von − nach + an den Stellen x_1 und x_2 ergeben sich die Tiefpunkte des Graphen von f zu $T_1(-1|e)$ und $T_2(1|e)$.
(4) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.
c) Skizze des Graphen von f:



Autorin: Maren Herrmann

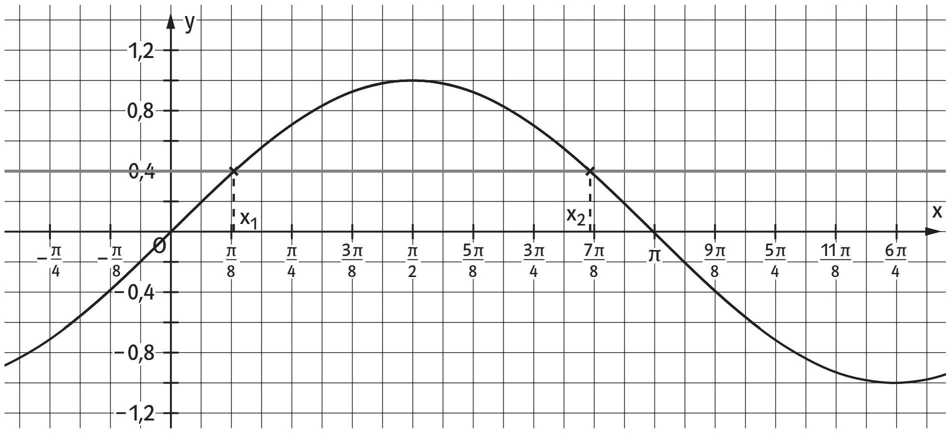
5 a) Graph (I) gehört zur Funktion g mit $g(x) = \frac{e^{-x}}{x} + 1$. Mögliche Begründung: Für $x \to +\infty$ gilt $g(x) \to 1$ und für $x \to -\infty$ gilt $g(x) \to -\infty$.
Graph (II) gehört zur Funktion f mit $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Mögliche Begründungen: waagerechte Asymptote $y = 1$ und Nullstelle $x = -1$. Zudem ist $x_0 = 0$ Polstelle mit VZW .
Graph (III) gehört zur Funktion i mit $i(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (1+x)}{x^2}$. Mögliche Begründung: Polstelle $x_0 = 0$ ohne VZW und Nullstelle $x = -1$.

b) Skizze des Graphen zu h mit $h(x) = \frac{1-x}{x^2}$: vgl. Abbildung rechts
$x_0 = 0$ ist Polstelle ohne VZW und $x = 1$ Nullstelle.

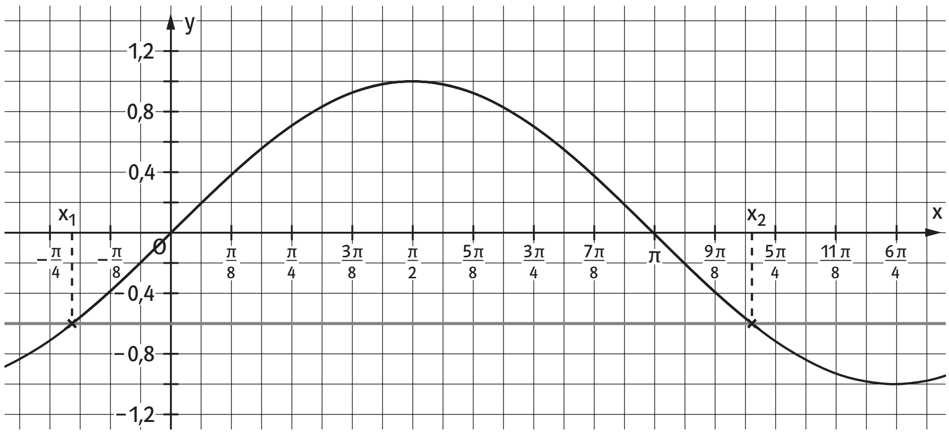


c) Rechnerischer Nachweis, dass $g'(x) = i(x)$ gilt:
Es ist $g(x) = e^{-x} \cdot x^{-1}$.
Mit der Produktregel folgt
$g(x) = \frac{-e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x} \cdot (x+1)}{x^2} = \frac{-e^{-x} \cdot (1+x)}{x^2} = i(x)$.
Argumentation anhand der Graphen:
$H(-1 \mid g(-1))$ Hochpunkt des Graphen von g (I). An der Stelle $x = -1$ schneidet der Graph von i (III) die x-Achse und es findet hier ein Vorzeichenwechsel von + nach − statt.

6 a) (1) Lösungen zu $\sin(x) = 0{,}4$:



$x_1 \approx 0{,}412$ (WTR) und $x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}730$ (WTR)
(2) Lösungen zu $\sin(x) = -0{,}6$:

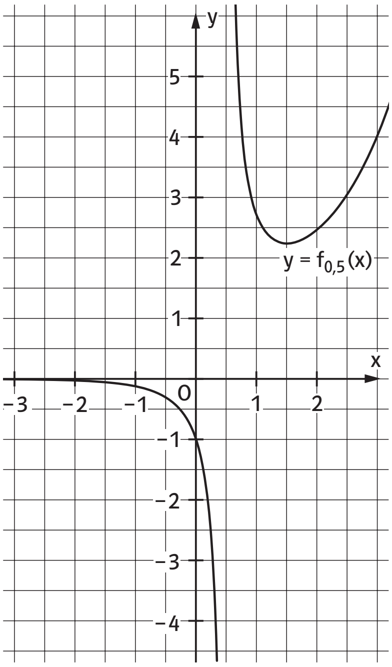


$x_1 \approx -0{,}644$ (WTR) liegt außerhalb des Lösungsintervalls. Damit erhält man $x_2 = \pi - x_1 \approx 3{,}785$ (WTR).

Autorin: Maren Herrmann

b) (1) Lösungen zu $4 \cdot \cos(x) \cdot (1 + \cos(x)) = 0$:
$x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \pi$; $x_3 = \frac{3}{2}\pi$
(2) Lösung zu $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$:
Durch Substitution $(u = \sin(x))$ und Rücksubstitution erhält man $x_1 = \frac{\pi}{2}$.
(3) Lösungen zu $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$:
$x_1 = \frac{\pi}{2}$, da $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

7 a) Mit $f_t(0) = \frac{t \cdot e^0}{0 - t} = \frac{t}{-t} = -1$ ist $P(0\,|-1)$ gemeinsamer Punkt aller Graphen von f_t.
b) $T_t(t + 1\,|\,t \cdot e^{t+1})$ sind die Tiefpunkte der Graphen der Schar. Die Tiefpunkte T_t liegen auf der Ortskurve mit der Gleichung $y = (x - 1)e^x$.
c) Skizze des Graphen von $f_{0,5}$:



8 $x^* \approx 2{,}189$

Autorin: Maren Herrmann