Kapitel III

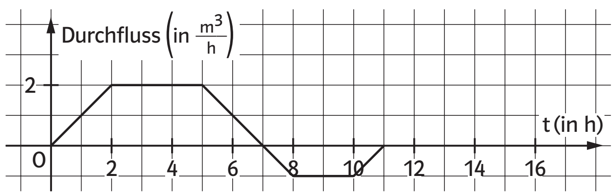
Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann den Bestand einer Größe aus deren Änderungsrate ermitteln.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 75
2.	Ich kann orientierte Flächeninhalte mithilfe von Integralen ausdrücken.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 79
3.	Ich kann Stammfunktionen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 83 Beispiel a) und c), Seite 87
4.	Ich kann Integrale mit dem Hauptsatz berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 83
5.	Ich kann die obere Grenze eines Integrals so bestimmen, dass das Integral einen vorgegebenen Wert hat.	☐	☐	☐	Test, Runde 2, Aufgabe 5, Seite 117
6.	Ich kann zu einer Funktion deren Integralfunktion ermitteln.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 91 Beispiel 2, Seite 92
7.	Ich kann die Graphen einer Funktion und einer zugehörigen Integralfunktion oder Stammfunktion analysieren.	☐	☐	☐	Test, Aufgabe 11, Seite 93
8.	Ich kann Inhalte von Flächen berechnen, die von Funktionsgraphen begrenzt werden.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 95
9.	Ich kann Mittelwerte von Funktionen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1a), Seiten 98 und 99 Beispiel 2, Seite 99
10.	Ich kann das Volumen eines Rotationskörpers berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 102
11.	Ich kann unteruchen, ob unbegrenzte Flächen endlichen Inhalt haben bzw. ob uneigentliche Integrale existieren.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 105

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Den Bestand einer Größe aus deren Änderungsrate ermitteln

a) Ein Tank wird durch eine Leitung befüllt und entleert. In der Grafik ist die Durchflussgeschwindigkeit der Flüssigkeit in der Leitung dargestellt. Ermitteln Sie die Flüssigkeitsmenge im Tank zu den Zeitpunkten $t = 4$; 7 und 11, wenn der Tank zu Beginn des Prozesses leer gewesen ist.



b) Ein Körper bewegt sich beschleunigt. Seine Geschwindigkeit wird in den ersten fünf Sekunden durch die Funktion $v(t) = 2t$ (t in Sekunden, v in Meter pro Sekunde) beschrieben. Ermitteln Sie den zurückgelegten Weg innerhalb dieser ersten fünf Sekunden.

Autorin: Dr. Rebecca Roy

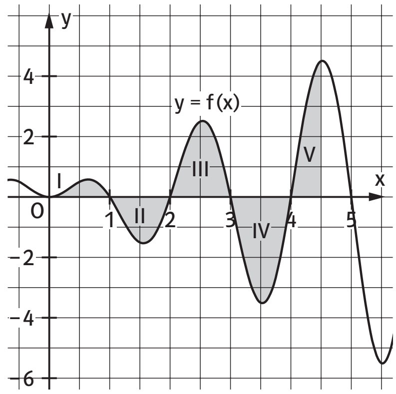
2 Orientierten Flächeninhalte mithilfe von Integralen ausdrücken

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit den abschnittsweise markierten orientierten Flächeninhalten I bis V. Drücken Sie den angegebenen orientierten Flächeninhalt mit der Integralschreibweise aus.

a) I

b) III + IV + V

c) II + IV



3 Stammfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \sin(3x) - 2$ c) $f(x) = 3 - e^{0{,}25x+2}$ d) $f(x) = 2 \cdot (5x - 7)^2$

e) $f(x) = \sqrt{5x}$ f) $f(x) = \frac{3}{(3x-1)^2}$ g) $f(x) = \frac{1}{2x} - x$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+2}}$

4 Integrale mit dem Hauptsatz berechnen

Berechnen Sie das Integral.

a) $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(2x) + 1)\,dx$ c) $\int_1^2 \left(-\frac{4}{x^2}\right)dx$ d) $\int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 + 1)\,dx$

e) $\int_2^6 e^{0{,}5x-1}\,dx$ f) $\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\,dx$ g) $\int_1^4 \cos(\pi x)\,dx$ h) $\int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{4}x^3 + x\right)dx$

5 Obere Grenze eines Integrals bestimmen

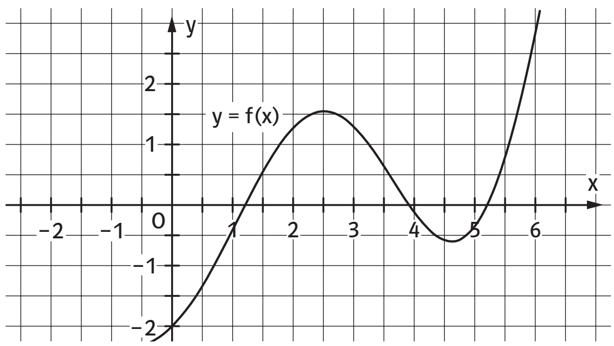
Bestimmen Sie die obere Grenze des Integrals so, dass es den angegebenen Wert hat $(x > 0)$.

a) $\int_0^x t^2\,dt = 9$ b) $\int_0^x 3e^t\,dt = 12$ c) $\int_0^x \cos(3t)\,dt = -\frac{1}{3}$ $(0 < x < \pi)$

6 Integralfunktion ermitteln

a) Ermitteln Sie grafisch zunächst die Integralfunktion $J_0(x)$ der grafisch dargestellten Funktion f. Zeichnen Sie dann den Graphen der Integralfunktion $J_2(x)$ dieser Funktion.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Integralfunktionen $J_{-1}(x)$, $J_0(x)$ und $J_3(x)$ der Funktionen f und g mit $f(x) = 6x^2 - 1$ und $g(x) = \sqrt{x+1}$.



Autorin: Dr. Rebecca Roy

7 Graphen von Stamm- bzw. Integralfunktionen analysieren

Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion F einer Funktion f. Ist die Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

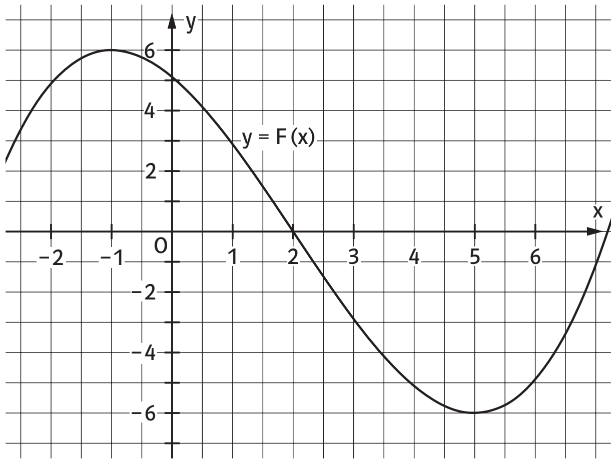
a) Die Funktion f hat im Intervall $[-3; 6]$ genau eine Nullstelle.

b) Der Graph von f verläuft im Intervall $[0; 4]$ unterhalb der x-Achse.

c) Der Graph von F stellt den Graphen der Integralfunktion J_0 zur unteren Grenze 0 dar.

d) Der Graph der Integralfunktion J_{-1} zur unteren Grenze −1 verläuft im Intervall $[-3; 6]$ nicht oberhalb der x-Achse.

e) Es gilt $f(-1) \cdot F(-1) > 0$.



8 Flächeninhalte bestimmen, die von Funktionsgraphen begrenzt werden

Die Graphen der Funktionen g und h begrenzen Flächen. Bestimmen Sie den Gesamtflächeninhalt aller eingeschlossenen Flächen.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2;\ g(x) = x$ b) $f(x) = x^3;\ g(x) = 2x^2 - x$ c) $f(x) = \sin(\pi x);\ g(x) = 2x$

9 Mittelwerte von Funktionen bestimmen

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion f im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = 2x - 4;\ [-1; 3]$ b) $f(x) = \frac{5}{x};\ [1; e]$ c) $f(x) = \cos(x) + 3;\ [-\pi, \pi]$

10 Volumen von Rotationskörpern berechnen

a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ rotiert im Intervall $[0; 8]$ um die x-Achse, wodurch ein Rotationskörper entsteht. Berechnen Sie sein Volumen.

b) Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ und $g(x) = 2$ schließen mit der Geraden $x = 5$ eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Beschreiben Sie den dadurch entstehenden Körper und berechnen Sie sein Volumen.

c) Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ schließen eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

11 Unbegrenzte Flächen bzw. uneigentliche Integrale untersuchen

a) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ im Intervall $(1; 4]$ existiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

b) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$ begrenzt mit den Koordinatenachsen eine nach rechts unbegrenzte Fläche. Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Inhalt hat, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

Autorin: Dr. Rebecca Roy

Kapitel III

1 a) Flüssigkeitsmenge für $t = 4$: $2\,m^3 + 4\,m^3 = 6\,m^3$
Flüssigkeitsmenge für $t = 7$: $6\,m^3 + 2\,m^3 + 2\,m^3 = 10\,m^3$
Flüssigkeitsmenge für $t = 11$: $10\,m^3 - 0{,}5\,m^3 - 2\,m^3 - 0{,}5\,m^3 = 7\,m^3$
b) Der zurückgelegte Weg entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $v(t)$. Für die ersten fünf Sekunden gilt für den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$. Der Körper legt in den ersten fünf Sekunden also 25 m zurück.

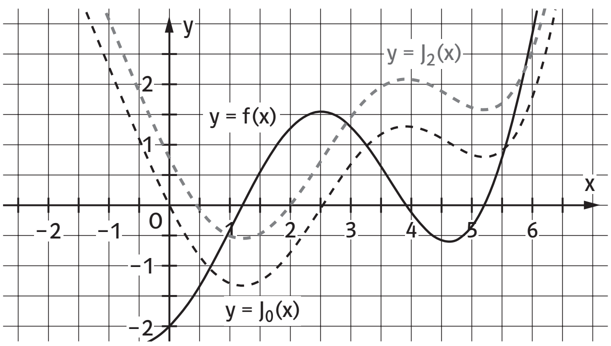
2 a) $\int_0^1 f(x)\,dx$ b) $\int_2^{4,5} f(x)\,dx$ c) $\int_1^2 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$

3 a) $F(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ b) $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) - 2x$ c) $F(x) = 3x - 4e^{0,25x+2}$ d) $F(x) = \frac{2}{15}(5x-7)^3$
e) $F(x) = \frac{2}{15}(5x)^{\frac{3}{2}}$ f) $F(x) = -\frac{1}{3x-1}$ g) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(|x|) - \frac{x^2}{2}$ h) $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x+2}$

4 a) $\frac{4}{3}$ b) 2π c) -2 d) $\frac{172}{15} \approx 11{,}47$
e) $2e^2 - 2 \approx 12{,}78$ f) 3 g) 0 h) 0

5 a) $x = 3$ b) $x = \ln(5)$ c) $x = \frac{\pi}{2}$

6 a)



b) Integralfunktionen zu f: $J_{-1}(x) = 2x^3 - x + 1$, $J_0(x) = 2x^3 - x$ und $J_3(x) = 2x^3 - x - 51$
Integralfunktionen zu g: $J_{-1}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$, $J_0(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$ und $J_3(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{3}$

7 a) Falsch. Die Funktion $f = F'$ hat genau zwei Nullstellen, da F in $[-3; 6]$ genau zwei Extremstellen hat.
b) Wahr. Die Funktion F ist im Intervall $[0; 4]$ monoton fallend. Daher hat die Funktion f in $[0; 4]$ negative Werte und ihr Graph verläuft unterhalb der x-Achse.
c) Falsch. Dann müsste die Funktion F bei $x = 0$ eine Nullstelle haben.
d) Wahr. Der Graph der Integralfunktion J_{-1} entsteht aus dem dargestellten Graphen, indem man ihn soweit in negative y-Richtung verschiebt, bis bei $x = -1$ eine Nullstelle vorliegt. Da F bei $x = -1$ ein Maximum hat, verläuft der Graph von J_{-1} nicht oberhalb der x-Achse.
e) Falsch. Es ist $f(-1) = F'(-1) = 0$.

8 a) $\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{2}{3}$

b) $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{1}{12}$

c) $\int_{-0,5}^{0} (2x - \sin(\pi x))\,dx + \int_0^{0,5} (\sin(\pi x) - 2x)\,dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0{,}137$

Autorin: Dr. Rebecca Roy

9 a) -2 b) $\frac{5}{e-1}$ c) 3

10 a) $V = \pi\int_0^8 \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}x}\right)^2\right)dx = \pi\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^8 = 16\pi$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 16π VE $\approx$ 50,27 VE.

b) Es entsteht ein Kegelstumpf, aus dem ein Zylinder herausgebohrt wurde. Das Volumen beträgt $\frac{425}{12}\pi$ VE $\approx$ 111,26 VE.

c) $V = \pi\left(\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^4\,dx\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt $\frac{2\pi}{5}$ VE $\approx$ 0,42 VE.

11 a) Es gilt $\int_z^4 f(x)\,dx = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3} \to \infty$ für $z \to 1$. Das uneigentliche Integral existiert nicht.

b) Es gilt $\int_0^z \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2z} \to \frac{1}{4}$ für $z \to \infty$. Die nach rechts unbegrenzte Fläche hat einen endlichen Inhalt, nämlich $\frac{1}{4}$ FE.

Autorin: Dr. Rebecca Roy