Kapitel II

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann Exponentialfunktionen mit Basis e mit den Ableitungsregeln ableiten.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 43
2.	Ich kann Terme mit dem natürlichen Logarithmus vereinfachen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 45
3.	Ich kann Exponentialgleichungen mithilfe des natürlichen Logarithmus lösen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 46
4.	Ich kann Exponentialgleichungen mithilfe von Ausklammern oder Substitution lösen.	☐	☐	☐	Grundwissen, Seite 303, Aufgabe 8 f)
5.	Ich kann Extrempunkte des Graphen von Exponentialfunktionen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seiten 48 und 49
6.	Ich kann Asymptoten des Graphen von Exponentialfunktionen angeben.	☐	☐	☐	Beispiel, Seiten 48 und 49
7.	Ich kann bei Funktionenscharen mit Exponentialfunktionen die Wirkung des Parameters beschreiben.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seiten 52 und 53
8.	Ich kann bei Funktionenscharen mit Exponentialfunktionen Extremstellen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 53
9.	Ich kann den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmusfunktion skizzieren.	☐	☐	☐	Rückblick, Seiten 69 Grundwissen, Seite 305
10.	Ich kann die natürliche Logarithmusfunktion ableiten.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 57
11.	Ich kann exponentielle und beschränkte Wachstumsvorgänge mithilfe von Exponentialfunktionen mit Basis e beschreiben.	☐	☐	☐	Rückblick, Seiten 69

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Exponentialfunktionen mit Basis e ableiten

Bestimmen Sie die Ableitung und vereinfachen Sie falls möglich das Ergebnis.

a) $f(x) = 3x + 2e^x$ b) $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ c) $f(x) = (2x - 1)e^{-0,5x}$ d) $f(x) = x^2 e^{4x^2+2} - 6x^3$

2 Terme mit dem natürlichen Logarithmus vereinfachen

Vereinfachen Sie den Term.

a) $\ln(e^3)$ b) $e^{\ln(4)}$ c) $4 \cdot \ln(\sqrt{e})$ d) $\frac{2}{3} \cdot e^{\ln(3x)}$

e) $\ln(x^3) - \ln(x)$ f) $\ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{1}{6}$ g) $e^{2 \cdot \ln(2)}$ h) $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) + e^{\ln(2x)}$

3 Exponentialgleichungen mithilfe des natürlichen Logarithmus lösen

Lösen Sie die Gleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an sowie einen Näherungswert auf drei Dezimalen.

a) $e^x = 7$ b) $e^{2z-3} = 5$ c) $5 \cdot (e^{2y} - 8,2) = 4$ d) $e^2 + e^{0,2a} - 10 = 0$

4 Exponentialgleichungen mithilfe von Ausklammern oder Substitution lösen

Lösen Sie die Gleichung.

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^x = 0$ b) $e^{x+2} - 7 \cdot e^2 = 0$ c) $x \cdot e^{-2x} - 3x = 5x$ d) $e^{3x} - 49 \cdot e^x = 0$

e) $e^{2x} - 10 \cdot e^x + 21 = 0$ f) $6 \cdot e^{2x} - 13 \cdot e^x - 5 = 0$ g) $e^x + 15e^{-x} = 8$ h) $\frac{1}{e^{2x}} - 20 = 8e^{-x}$

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dr. Frieder Haug

5 Extrempunkte des Graphen von Exponentialfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = e^x - x$ b) $f(x) = e^{2x} - e^x$ c) $f(x) = -20x \cdot e^{-2x^2}$

6 Asymptoten des Graphen von Exponentialfunktionen bestimmen

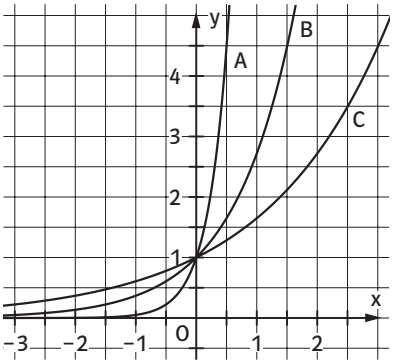
Geben Sie die Asymptoten des Graphen von f an.

a) $f(x) = 6 \cdot e^x + 1$ b) $f(x) = 2 - 5 \cdot e^{-0{,}1x}$ c) $f(x) = x^3 \cdot e^{-2x^2}$

7 Bei Funktionenscharen mit Exponentialfunktionen die Wirkung des Parameters beschreiben

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = e^{kx}$.
In der Abbildung sind Graphen der Schar für verschiedene Parameter k dargestellt.

a) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten der abgebildeten Graphen.
b) Dargestellt sind die Graphen zu $k = 1$, $k = 0{,}5$ und $k = 3$.
Ordnen Sie zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
c) Was bewirkt eine Vergrößerung des Wertes von k?



8 Bei Funktionenscharen mit Exponentialfunktionen Extremstellen bestimmen

Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion in Abhängigkeit vom Parameter.

a) $f_t(x) = t e^x - x$ $(t > 0)$ b) $g_a(x) = e^{ax} - a^2 x$ $(a > 0)$ c) $f_k(x) = x \cdot e^{kx}$ $(k \in \mathbb{R})$

9 Graphen von natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktionen skizzieren

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion hervorgeht, und skizzieren Sie den Graphen von f.

a) $f(x) = e^x - 2$ b) $f(x) = \ln(x)$ c) $f(x) = \ln(x + 1)$ d) $f(x) = -e^{-x}$

10 Natürliche Logarithmusfunktion ableiten

Bestimmen Sie die Ableitung und vereinfachen Sie falls möglich das Ergebnis.

a) $f(x) = 3 \cdot \ln(x) + x$ b) $f(x) = \ln(x + 1)$ c) $f(x) = \ln(x^2)$ d) $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$

11 Wachstumsvorgänge beschreiben

Auf einer Wiese wachsen zu Beginn 100 Gänseblümchen. Zwei Wochen später sind es 120 Stück.

a) Man nimmt an, der Bestand wächst exponentiell. Geben Sie die Wachstumsfunktion mit Basis e an.
b) Man nimmt an, der Bestand wächst beschränkt, wobei nicht mehr als 500 Gänseblümchen auf der Wiese wachsen können. Geben Sie die Wachstumsfunktion an.

Klett © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dr. Frieder Haug

Kapitel II

1 a) $f'(x) = 3 + 2e^x$
b) $f'(x) = e^{3x}$
c) $f'(x) = (2{,}5 - x) \cdot e^{-0{,}5x}$
d) $f'(x) = (1 + 4x^2) \cdot 2x \cdot e^{4x^2+2} - 18x^2$

2 a) $\ln(e^3) = 3$
b) $e^{\ln(4)} = 4$
c) $4 \cdot \ln(\sqrt{e}) = 2$
d) $\frac{2}{3} \cdot e^{\ln(3x)} = 2x$
e) $\ln(x^3) - \ln(x) = 2 \cdot \ln(x)$
f) $\ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x)$
g) $e^{2 \cdot \ln(2)} = 4$
h) $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) + e^{\ln(2x)} = x$

3 a) $e^x = 7$
$x = \ln(7) \approx 1{,}946$
b) $e^{2z-3} = 5$
$z = \frac{1}{2} \cdot (\ln(5) + 3) \approx 2{,}305$
c) $5 \cdot (e^{2y} - 8{,}2) = 4$
$y = \frac{1}{2} \cdot \ln(9) = \ln(3) \approx 1{,}099$
d) $e^2 + e^{0{,}2a} - 10 = 0$
$a = 5 \cdot \ln(10 - e^2) \approx 4{,}799$

4 a) $e^{2x} - 3 \cdot e^x = 0$
$\Leftrightarrow e^x \cdot (e^x - 3) = 0$
$x = \ln(3)$
b) $e^{x+2} - 7 \cdot e^2 = 0$
$\Leftrightarrow e^2 \cdot (e^x - 7) = 0$
$x = \ln(7)$
c) $x \cdot e^{-2x} - 3x = 5x$
$\Leftrightarrow x \cdot (e^{-2x} - 8) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \ln(8)$
d) $e^{3x} - 49 \cdot e^x = 0$
$\Leftrightarrow e^x \cdot (e^{2x} - 49) = 0$
$x = \ln(7)$
e) $e^{2x} - 10 \cdot e^x + 21 = 0$
Substitution: $y = e^x$
$y^2 - 10y + 21 = 0$
$y_1 = 3,\ y_2 = 7$
Rücksubstitution: $x_1 = \ln(3),\ x_2 = \ln(7)$
f) $6 \cdot e^{2x} - 13 \cdot e^x - 5 = 0$
Substitution: $y = e^x$
$6y^2 - 13y - 5 = 0$
$y_1 = 2{,}5,\ y_2 = -\frac{1}{3}$
Rücksubstitution: $x_1 = \ln(2{,}5)$
g) $e^x + 15e^{-x} = 8$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
Substitution: $y = e^x$
$y^2 - 8y + 15 = 0$
$y_1 = 3,\ y_2 = 5$
Rücksubstitution: $x_1 = \ln(3),\ x_2 = \ln(5)$
h) $\frac{1}{e^{2x}} - 20 = 8e^{-x}$
$\Leftrightarrow 20e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$
Substitution: $y = e^x$
$20y^2 + 8y - 1 = 0$
$y_1 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{10}$
Rücksubstitution: $x_2 = -\ln(10)$

5 a) $f(x) = e^x - x,\ f'(x) = e^x - 1,\ f''(x) = e^x$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = e^x - 1 = 0$, also $x = 0$
Untersuchung der möglichen Extremstelle: $f''(0) = 1 > 0$. An der Stelle $x = 0$ liegt das Minimum $f(0) = e^0 - 0 = 1$ vor; $T(0|1)$.
b) $f(x) = e^{2x} - e^x,\ f'(x) = 2e^{2x} - e^x,\ f''(x) = 4e^{2x} - e^x$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x \cdot (2e^x - 1) = 0$, also $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$
Untersuchung der möglichen Extremstelle: $f''\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 4e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. An der Stelle $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ liegt das Minimum $f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ vor; $T(-\ln(2)|-0{,}25)$.
c) $f(x) = -20x \cdot e^{-2x^2};\ f'(x) = -20 \cdot e^{-2x^2} \cdot (1 - 4x^2);\ f''(x) = 80x \cdot e^{-2x^2} \cdot (3 - 4x^2)$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = -20 \cdot e^{-2x^2} \cdot (1 - 4x^2) = 0$, also $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$
Untersuchung der möglichen Extremstellen: $f''\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm 40e^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 - 1) = \pm\frac{80}{\sqrt{e}}$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ liegt das Minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{\sqrt{e}}$ vor; $T\left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{10}{\sqrt{e}}\right)$. An der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ liegt das Maximum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{\sqrt{e}}$ vor; $H\left(-\frac{1}{2}\middle|+\frac{10}{\sqrt{e}}\right)$.

6 a) Waagerechte Asymptote $y = 1$ für $x \to -\infty$.
b) Waagerechte Asymptote $y = 2$ für $x \to +\infty$.
c) Waagerechte Asymptote $y = 0$ für $x \to \pm\infty$.

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dr. Frieder Haug

7 a) Die drei Graphen sind alle monoton steigend, linksgekrümmt und haben weder Extrem- noch Wendepunkte. Die x-Achse $(y = 0)$ ist bei allen Graphen waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$. Der Punkt $S(0|1)$ ist gemeinsamer Punkt aller Graphen.
Die Graphen sind nicht symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung.
b) Zum Graphen B (natürliche Exponentialfunktion) gehört $k = 1$. Zum Graphen A gehört $k = 3$, denn es ist $f_3(1) = e^3 > e$. Zum Graphen C gehört $k = 0{,}5$, denn es ist $f_{0,5}(1) = e^{0,5} = \sqrt{e} < e$.
c) Eine Vergrößerung des Wertes von k bewirkt, dass die Steigung des Graphen in $S(0|1)$ zunimmt, denn es ist $f_k'(0) = k$. Außerdem nehmen die Funktionswerte $f_k(a)$ für positive Werte von k zu, für negative Werte von k nehmen sie ab.

8 a) $f_t(x) = t\,e^x - x$; $f_t'(x) = t\,e^x - 1$; $f_t''(x) = t\,e^x$

Mögliche Extremstellen: $f_t'(x) = t\,e^x - 1 = 0$, also $x = \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(x)$ $(t > 0)$

Untersuchung der möglichen Extremstelle: $f''\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1 > 0$. Die Stelle $x = \ln\left(\frac{1}{t}\right)$ ist eine Minimumstelle für alle $t > 0$.

b) $g_a(x) = e^{ax} - a^2x$; $g_a'(x) = a\,e^{ax} - a^2$; $g_a''(x) = a^2e^{ax}$

Mögliche Extremstellen: $g_a'(x) = a\,e^{ax} - a^2 = 0$, also $x = \frac{1}{a} \cdot \ln(x)$ $(a > 0)$

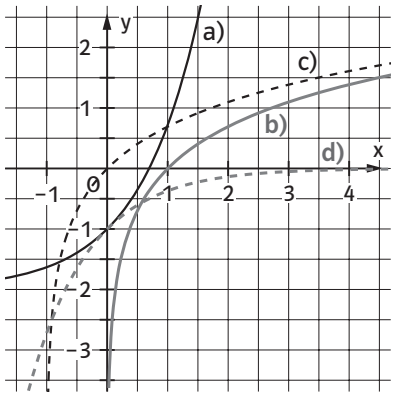
Untersuchung der möglichen Extremstelle: $g_a''\left(\frac{1}{a} \cdot \ln(x)\right) = a^3 > 0$. Die Stelle $x = \frac{1}{a} \cdot \ln(x)$ ist eine Minimumstelle für alle $a > 0$.

c) $f_k(x) = x \cdot e^{kx}$; $f_k'(x) = e^{kx} \cdot (1 + k\,x)$; $f_k''(x) = k \cdot e^{kx} \cdot (2 + k\,x)$

Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = e^{kx} \cdot (1 + k\,x) = 0$, also $x = -\frac{1}{k}$

Untersuchung der möglichen Extremstelle: $f_k''\left(-\frac{1}{k}\right) = k \cdot e^{-1} = \frac{k}{e}$. Die Stelle $x = -\frac{1}{k}$ ist für $k > 0$ eine Minimumstelle und für $k < 0$ eine Maximumstelle.

9 a) Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch eine Verschiebung um −2 in y-Richtung.
b) Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.
c) Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden und eine anschließende Verschiebung um −1 in x-Richtung.
d) Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch eine Punktspiegelung am Ursprung.



10 a) $f'(x) = \frac{3}{x} + 1$ b) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$ d) $f'(x) = 3 \cdot \ln(x) + 3$

11 a) Ansatz: $f(t) = 100 \cdot e^{kt}$

$f(2) = 100 \cdot e^{2k} = 120$, also $k = \frac{1}{2} \cdot \ln(1,2) \approx 0{,}0912$

$f(t) = 100 \cdot e^{0,0912 \cdot t}$ (t in Wochen)
$f(t) = 100 \cdot e^{0,013 \cdot t}$ (t in Tagen)
b) Ansatz: $f(t) = 500 - 400 \cdot e^{-kt}$

$f(2) = 500 - 400 \cdot e^{-2k} = 120$, also $k = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{19}{20}\right) \approx 0{,}0256$

$f(t) = 500 - 400 \cdot e^{-0,0256 \cdot t}$ (t in Wochen)
$f(t) = 500 - 400 \cdot e^{-0,00366 \cdot t}$ (t in Tagen)

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dr. Frieder Haug