Kapitel I

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann die Ableitung einer Funktion an einer Stelle näherungsweise grafisch bestimmen und damit den Graphen der Ableitungsfunktion dieser Funktion skizzieren.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 9
2.	Ich kann mithilfe der Potenz-, der Faktor- und der Summenregel die Ableitung und höhere Ableitungen einer Funktion berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 11 Beispiel 2, Seite 12
3.	Ich kann die Verkettung zweier Funktionen bilden und eine geeignete Funktion als Verkettung zweier Funktionen darstellen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 15
4.	Ich kann geeignete Funktionen mithilfe der Kettenregel ableiten.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 18,
5.	Ich kann geeignete Funktionen mithilfe der Produktregel und gegebenenfalls weiterer Regeln ableiten.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 20 Beispiel 2, Seite 21
6.	Ich kann das Monotonieverhalten von Funktionen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 24
7.	Ich kann das Krümmungsverhalten von Funktionsgraphen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 24
8.	Ich kann Extrem- und Wendepunkte von Funktionsgraphen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 27
9.	Ich kann Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen.	☐	☐	☐	Beispiele 1 und 2, Seite 30

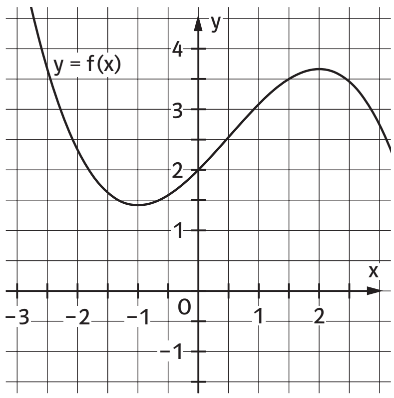
Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf der letzten Seite.

1 Grafisch ableiten

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie näherungsweise $f'(0)$.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



2 Mithilfe der Potenz-, Faktor- und Summenregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

a) $f(x) = -3x^3 + 0{,}5x^2 - 6x + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2}$

Autor: Prof. Rolf Dürr

3 Funktionen verketten

a) Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $v(x) = \frac{1}{x}$.
b) Stellen Sie die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2}$ als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

4 Mithilfe der Kettenregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x^2 - 4)^4$ b) $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2}$

5 Mithilfe der Produktregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = (1 - x)\sin(x)$ b) $f(x) = (x + 1)(2x - 1)^3$ c) $f(x) = (2x - 1)\cos(2x)$

6 Monotonieverhalten untersuchen

Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ alle Intervalle, auf denen f streng monoton wachsend ist.

7 Krümmungsverhalten untersuchen

Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6x^2 + 2x - 1$ linksgekrümmt ist.

8 Extrem- und Wendepunkte bestimmen

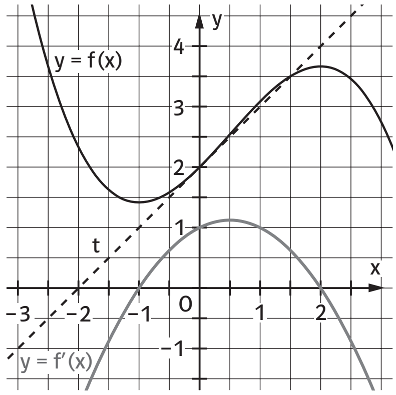
Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1$. Geben Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f an.

9 Extremwertprobleme lösen

Ein rechteckiges Gelände soll einen Flächeninhalt von $1000\,m^2$ haben. An einer Seite soll es durch eine Mauer, an den drei anderen Seiten durch einen Zaun begrenzt werden.
Die Herstellung von einem Meter Mauer kostet 200 €, ein Meter Zaun kostet 50 €.
Bestimmen Sie die Seitenlängen des Geländes so, dass die Begrenzung möglichst billig wird.

Autor: Prof. Rolf Dürr

Kapitel I



1 a) $f'(0)$ ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $P(0|2)$.
Aus der Zeichnung liest man ab: $f'(0) \approx 1$.
b) Graph von f': vgl. Abbildung

2 a) $f'(x) = -9x^2 + x - 6$; $f''(x) = -18x + 1$

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $f(x) = x^2 - 2 + \frac{4}{x^2}$; $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3}$; $f''(x) = 2 + \frac{24}{x^4}$

3 a) $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$; $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $f(x) = u(v(x))$ mit $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = (2x - 1)^2$ oder $u(x) = \frac{1}{x^2}$ und $v(x) = 2x - 1$

4 a) $f'(x) = 4(2x^2 - 4)^3 \cdot 4x = 16x(2x^2 - 4)^3$

b) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$

5 a) $f'(x) = -\sin(x) + (1 - x)\cos(x)$
b) $f'(x) = (2x - 1)^3 + (x + 1) \cdot 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = (2x - 1)^2(2x - 1 + 6x + 6) = (2x - 1)^2(8x + 5)$
c) $f'(x) = 2\cos(2x) - (2x - 1)\sin(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x) - 2(2x - 1)\sin(2x)$

6 $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
Nullstellen von f': -2, 0 und 2.
Es ist $f'(x) > 0$ für $x \in (-2; 0)$ und für $x \in (2; \infty)$.

7 $f'(x) = 2x^3 - 12x + 2$; $f''(x) = 6x^2 - 12 = 6(x^2 - 2)$

Es ist $f''(x) > 0$ für $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ und für $x \in \left(\sqrt{2}; \infty\right)$.

8 $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 = \frac{1}{3}x^2(x - 3)$; $f''(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$; $f'''(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Es ist $f''(3) = 3 > 0$, d.h., x_2 ist eine Minimumstelle.
Wegen $f''(0) = 0$ hat f' hat an der Stelle $x_1 = 0$ keinen Vorzeichenwechsel, d.h., x_1 ist keine Extremstelle.
$f''(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$. Es ist $f'''(0) = -2 \neq 0$ und $f'''(2) = 2 \neq 0$, d.h., x_1 und x_3 sind Wendestellen.

Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T\left(3\middle|-\frac{5}{4}\right)$ sowie die Wendepunkte $W_1(0|1)$ (mit waagerechter Tangente) und $W_2\left(2\middle|-\frac{1}{3}\right)$.

9 a: Länge der anderen Seite des Rechtecks (in m); b: Länge der Mauer (in m)
Kosten der Begrenzung (in €): $K = 2a \cdot 50 + b \cdot 50 + b \cdot 200 = 100a + 250b$
Nebenbedingung: Der Flächeninhalt des Rechtecks muss $1000\,m^2$ betragen, also $a \cdot b = 1000$ (in m^2),

d.h. $b = \frac{1000}{a}$.

Zielfunktion (Kosten in €): $K(a) = 100a + \frac{250\,000}{a}$; $a > 0$

$K'(a) = 100 - \frac{250\,000}{a^2}$; $K''(a) = \frac{500\,000}{a^3} > 0$

$K'(a) = 0$ liefert die Minimalstelle $a = 50$. Damit ist $b = \frac{1000}{50} = 20$ und $K(50) = 10000$.

Das Gelände sollte 50 m lang und 20 m breit (entlang der Mauer) sein. Die Begrenzung kostet dann 10 000 €.

Autor: Prof. Rolf Dürr