Selbsteinschätzung

Checkliste „Folgen und Reihen“	Testaufgabe	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann	Trainingsaufgaben
1. Ich kann mithilfe der expliziten Darstellung einer Folge einzelne Folgenglieder berechnen.	1					**LE 1** Beispiel 2	**LE 1** Aufgaben 4 und 6
2. Ich kann aus einer rekursiven Darstellung einer Folge eine explizite Darstellung der Folge bestimmen.	2					**LE 1** Beispiel 3b	**LE 1** Aufgabe 5 **Training** Aufgabe 24
3. Ich kann explizite und rekursive Darstellungen von arithmetischen Folgen bestimmen.	3					**LE 1** Lehrtext	**LE 1** Aufgabe 1 und 2
4. Ich kann explizite und rekursive Darstellungen von geometrischen Folgen bestimmen.	4					**LE 1** Lehrtext	**LE 1** Aufgabe 1, 7 und 12 **Training** Aufgabe 4, 5, 6 und 8
5. Ich kann eine Folge auf Beschränktheit untersuchen.	5					**LE 2** Lehrtext Beispiel	**LE 2** Aufgabe 1, 2, 4, 5 und 11
6. Ich kann kann eine Folge auf Monotonie untersuchen.	6					**LE 2** Lehrtext Beispiel	**LE 2** Aufgabe 1, 2, 4, 5 und 12
7. Ich kann begründen, dass eine Folge eine Nullfolge ist.	7					**LE 3** Lehrtext Beispiel 1	**LE 3** Aufgabe 4 und 5 **Training** Aufgabe 1, 2
8. Ich kann begründen, dass eine gegebene konvergente Folge den Grenzwert g hat.	8					**LE 3** Beispiel 2	**LE 3** Aufgabe 2, 3, 7, 8 und 13 **Training** Aufgabe 4, 12

Autor: Detlef Hoche

Checkliste „Folgen und Reihen“	Testaufgabe	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann	Trainingsaufgaben
9. Ich kann die Grenzwertsätze anwenden.	9					**LE 4** Beispiele	**LE 4** Aufgabe 1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 13 und 14 **Training** Aufgabe 14, 23
10. Ich kann die Summe von endlich vielen Folgengliedern einer arithmetischen Folge bestimmen.	10					**LE 5** Merkkasten Beispiel 1	**LE 5** Aufgabe 1 ,2 und 9
11. Ich kann die Summe aller Folgenglieder einer geometrischen Folge bestimmen, sofern die zugehörige Reihe konvergent ist.	11					**LE 5** Beispiel 2c	**LE 5** Aufgabe 3 und 8
12. Ich kann eine Nullstelle einer Funktion in einem geeigneten Intervall näherungsweise bestimmen.	12					**LE 6 – 8** Lehrtext Beispiele	**LE 6** Aufgabe 2 **LE 7** Aufgabe 1, 2, 3, und 6 **LE 8** Aufgabe 1, 4 und 6 **Training** 7, 9, 10, 19
13. Ich kann den Schnittpunkt der Graphen zweier Funktionen näherungsweise bestimmen.	13					**LE 6 – 8** Lehrtext Beispiele	**LE 6** Aufgabe 5, 9 und 11 **LE 7** Aufgabe 4 **LE 8** Aufgabe 11

Autor: Detlef Hoche

Test- und Trainingsaufgaben

1 Berechnen Sie die ersten zehn Folgenglieder der Folge (a_n) mit

a) $a_n = n - n^2$. b) $a_n = \frac{1}{n+2}$. c) $a_n = \sqrt{n-1}$.

2 Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der Folge (a_n) mit

a) $a_1 = 0;\ a_{n+1} = a_n + 5$. b) $a_1 = 3;\ a_{n+1} = -a_n$. c) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n^2$.

3 Bestimmen Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung der arithmetischen Folge.

a) 1; 5; 9; 13; 17; … b) 6; 4; 2; 0; –2; c) –100; –10; 80; …

4 Bestimmen Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung der geometrischen Folge.

a) 2; 6; 18; 54; 162; .. b) 20; 2; 0,2; 0,02; ... c) –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$; ...

5 Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = \frac{3}{n+1}$ b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$

6 Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie.

a) $a_1 = -1;\ a_{n+1} = a_n + n$ b) $a_n = (-5)^{1-n}$ c) $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$

7 Begründen Sie, dass die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ c) $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$

8 Bestimmen Sie ein n_0 so, dass für alle Folgenglieder a_n mit $n > n_0$ der Abstand zum Grenzwert g kleiner als d ist.

a) $a_n = \frac{2}{2n-1}$; $g = 0$; $d = 0{,}1$ b) $a_n = 1 - 2^{-n}$; $g = 1$; $d = 0{,}01$ c) $a_n = \frac{1-2n}{1+3n}$; $g = -\frac{2}{3}$; $d > 0$

9 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mithilfe der Grenzwertsätze.

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{n-1}{n}$ c) $a_n = \frac{1-n^2}{1+2n^2}$

10 Bestimmen Sie die Summe der ersten m Folgenglieder der arithmetischen Folge (a_n).

a) $a_n = 3n - 2$; m = 10 b) $a_n = 1 - n$; m = 100

11 Bestimmen Sie die Summe aller Folgenglieder der geometrischen Folge (a_n).

a) $a_n = (0{,}01)^{n-1}$ b) $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$ c) $a_n = \frac{2}{9^n}$

12 Bestimmen Sie näherungsweise die Nullstelle der Funktion $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{x}$ im Intervall $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ auf zwei Dezimalen genau.

13 Bestimmen Sie näherungsweise die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$ auf drei Dezimalen genau.

Autor: Detlef Hoche

Test- und Trainingsaufgaben – Lösungen

1 a) $0; -2; -6; -12; -20; -30; -42; -56; -72; -90$

b) $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{10}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}$

c) $0; 1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; 2\sqrt{2}; 3$

2 a) $a_n = 5(n-1)$ b) $a_n = 3\cdot(-1)^{n-1}$

c) 2; 4; 16; 256; …, also $2^1; 2^2; 2^4; 2^8; \ldots$ $a_n = 2^{2^{n-1}}$

3 a) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n + 4;\ a_n = 1 + 4(n-1)$

b) $a_1 = 6;\ a_{n+1} = a_n - 2;\ a_n = 6 - 2(n-1)$

c) $a_1 = -100;\ a_{n+1} = a_n + 90;\ a_n = -100 + 90(n-1)$

4 a) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 3a_n;\ a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ b) $a_1 = 20;\ a_{n+1} = 0{,}1a_n;\ a_n = 20\cdot 0{,}1^{n-1}$

c) $a_1 = -4;\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{2};\ a_n = -4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5 a) S = 3, denn der Zähler 3 wird durch eine Zahl größer als 1 dividiert;
s = 0, denn alle Folgenglieder sind positiv.
b) S = 1, denn der Nenner ist immer größer als der Zähler;
s = 0, denn alle Folgenglieder sind positiv.
c) s = 0, denn alle Folgenglieder sind positiv. Nach oben nicht beschränkt, weil Zähler ungefähr das n-fache des Nenners ist und der Bruch somit über alle Grenzen wächst.

6 a) streng monoton zunehmend, weil $a_{n+1} - a_n = n > 0$

b) $1;\ -\frac{1}{5}; \frac{1}{25};\ldots$ nicht monoton.

c) streng monoton zunehmend, weil $\sqrt{(n+1)^2 - 1} = \sqrt{n^2 + 2n + 1 - 1} > \sqrt{n^2 - 1}$ für alle n

7 a) Es ist $0 < \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$ und $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge.

b) Der Nenner wird betragsmäßig beliebig groß und damit streben die Folgenglieder gegen 0.
c) Da die Logarithmusfunktion streng monoton zunehmend ist und über alle Schranken wächst, wird der Nenner beliebig groß und damit strebt der Bruch gegen 0.

8 a) $\frac{2}{2n_0 - 1} < 0{,}1 \Leftrightarrow 2 < 0{,}1\cdot(2n_0 - 1) \Leftrightarrow 2 < 0{,}2n_0 - 0{,}1 \Leftrightarrow 2{,}1 < 0{,}2n_0 \Leftrightarrow 10{,}5 < n_0$. Wähle z. B. $n_0 = 11$

b) $1 - (1 - 2^{n_0}) < 0{,}01 \Leftrightarrow 2^{-n_0} < 0{,}01 \Leftrightarrow 2^{n_0} > 100 \Leftrightarrow n_0 > \log_2(100) \approx 6{,}64$. Wähle z. B. $n_0 = 7$.

c) $\left|\frac{1-2n_0}{1+3n_0} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < d \Leftrightarrow \left|\frac{1-2n_0}{1+3n_0} + \frac{2}{3}\right| < d \Leftrightarrow \left|\frac{3(1-2n_0) + 2(1+3n_0)}{3(1+3n_0)}\right| < d \Leftrightarrow \left|\frac{3 - 6n_0 + 2 + 6n_0}{(1+3n_0)\cdot 3}\right| < d \Leftrightarrow \frac{5}{3+9n_0} < d$

$\Leftrightarrow 5 < 3d + 9n_0 d \Leftrightarrow \frac{5-3d}{9d} < n_0$

Autor: Detlef Hoche

9 a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2-0=2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{1}{n^2}+2}=\frac{0-1}{0-2}=-\frac{1}{2}$

10 a) $S_{10}=\frac{10}{2}(2+(10-1)3)=145$ b) $S_{100}=\frac{100}{2}(0+(100-1)(-1))=-4950$

11 a) $S=\frac{1}{1-0{,}01}=\frac{100}{99}$ b) $S=\frac{-1}{4\left(1+\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{5}$ c) $S=\frac{2}{9\left(1-\frac{1}{9}\right)}=\frac{1}{4}$

12 Newtonverfahren mit Startwert 1:

x	f (x)	f′ (x)
1	–0,15852902	1,54030231
1,10292072	–0,0141551	1,27306617
1,11403962	–0,0001465	1,24678667
1,11415713	–1,6182E-08	1,24651125

Ergebnis: x = 1,11

13 Betrachte $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-e^x=0$
$h(-1)\approx 0{,}6$; $h(0)=-1$
Newtonverfahren mit Startwert 0

x	f(x)	f′(x)
0	–1	–1
–1	0,632120559	–2,367879441
–0,73304361	0,056908448	–1,94653169
–0,70380779	0,000647392	–1,902313581
–0,70346747	8,7166E-08	–1,901801328

Ergebnis: S (–0,70 | 0,49)

Autor: Detlef Hoche