Selbsteinschätzung

Checkliste „Untersuchen und Bestimmten von Funktionen“	Testaufgabe	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann	Trainingsaufgaben
1. Ich kann eine Funktion auf Monotonie untersuchen.	1					**LE 1** Beispiele 1 und 2	**LE 1** Aufgaben 11, 12 und 18
2. Ich kann die Koordinaten der Extrempunkte einer Funktion berechnen.	2					**LE 2** Beispiel 1	**LE 2** Aufgabe 11
3. Ich kann die Koordinaten der Wendepunkte einer Funktion berechnen.	3					**LE 3** Beispiel 3	**LE 3** Aufgabe 7
4. Ich kann die Gleichung der Wendetangente ermitteln.	4					**LE 3** Beispiel 3	**LE 3** Aufgaben 12 und 14
5. Ich kann eine vollständige Funktionsuntersuchung durchführen und anhand der Ergebnisse den Funktionsgraphen skizzieren.	5					**LE 4** Beispiel 1 und 2	**LE 4** Aufgabe 5
6. Ich kann Elemente der Differenzialrechnung zur Lösung von Sachaufgaben anwenden.	6					**LE 5** Beispiel 1 und 2	**LE 5** Aufgabe 3
7. Ich kann Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen.	7					**LE 6** Beispiel	**LE 6** Aufgabe 9
8. Ich kann den Term einer Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften aufstellen.	8					**LE 7** Lehrtext Beispiel 1	**LE 7** Aufgabe 5
9. Ich kann Funktionsterme so entwickeln, dass ein knickfreier Übergang entsteht.	9					**LE 8** Beispiel	**LE 8** Aufgabe 5

Autor: Andrea Stühler

Test- und Trainingsaufgaben

1 Untersuchen Sie die Funktion im angegebenen Intervall auf Monotonie.

a) $f(x) = -x^2 + 4$; $I = [1; 5]$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 15$; $I = [-4; 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $I = [-3; -1]$

d) $f(x) = \sqrt{x+3}$; $I = [0; 8]$

2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 13{,}5x + 7$

c) $f(x) = 3x^5 - x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 6x$

e) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 4x + \frac{1}{2}$

f) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$

3 Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 4$

b) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 21$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 - 8$

4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes und die Gleichung der Wendetangente.

a) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 11$

c) $f(x) = -2x^3 + 6x$

5 Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung durch und skizzieren Sie den Graphen der Funktion auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 5$

6 Die Flughöhe eines Heißluftballons lässt sich zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durch die Funktion h beschreiben. Es gilt $h(t) = 60x^3 - 430x^2 + 1000x$ mit der Zeit t in Stunden ab 13 Uhr. Bestimmen Sie die maximale Flughöhe des Ballons im genannten Zeitraum.

7 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -7x^2 + 5$ besitzt einen Punkt $C(a|f(a))$.
Berechnen Sie den Wert für $0 < a < 0{,}84$ so, dass das Dreieck mit den Punkten $A(0|0)$, $B(a|0)$ und $C(a|f(a))$ einen möglichst großen Flächeninhalt hat.

8 Bestimmen Sie den gesuchten Funktionsterm.

a) Die Funktion hat den Grad 2, die Tangente im Kurvenpunkt $(1|4)$ ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 4x$. Bei $x = \frac{3}{4}$ liegt ein Extremum vor.

b) Die Funktion hat den Grad 3, bei $(0|0)$ liegt ein Extrempunkt, bei $(-1|-2)$ ein Wendepunkt vor.

c) Die Funktion hat den Grad 3. Der Funktionsgraph schneidet die x-Achse an der Stelle 6 und hat im Ursprung eine Wendetangente mit der Gleichung $y = 2x$.

9 Bestimmen Sie einen Wert für den Parameter a, $a \in \mathbb{R}$, sodass sich die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} - 4x$ und g mit $g(x) = x^5 - 2x^3 + a$ im Punkt $P(1|f(1))$ schneiden. Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Schnittpunkt auch um einen Berührpunkt handelt, d. h. die Funktionen dort tangential ineinander übergehen.

Autor: Andrea Stühler

Test- und Trainingsaufgaben – Lösungen

1 a) $f'(x) = -2x$; für alle Werte im angegebenen Intervall gilt: $f'(x) < 0$. Im angegebenen Intervall ist die Funktion streng monoton abnehmend.

b) $f'(x) = 2x - 2$; für die Werte im Intervall $I_1 = [-4; 1]$ gilt: $f'(x) \leq 0$, im Intervall $I_2 = [1; 4]$ gilt: $f'(x) \geq 0$.
Im Intervall I_1 ist die Funktion streng monoton abnehmend, im Intervall I_2 streng monoton zunehmend.

c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$; für alle Werte im angegebenen Intervall gilt: $f'(x) < 0$. Im angegebenen Intervall ist die Funktion streng monoton abnehmend.

d) Bekannt ist, dass die Quadratwurzelfunktion $w(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \geq 0$ streng monoton zunimmt. Verschiebt man den Graphen von w um 3 Einheiten nach links, erhält man den Graphen von f. Die Funktion f ist demzufolge in ihrem gesamten Definitionsbereich $(x \geq -3)$ streng monoton zunehmend, also auch im Intervall [0; 8].

2 a) $H(-1|6)$; $T(3|-26)$ b) $H(-1{,}5|20{,}5)$; $T(1{,}5|-6{,}5)$

c) Zwar gilt auch $f'(0) = 0$, aber $(0|0)$ ist ein Sattelpunkt; $H\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\,\middle|\,0{,}04\right)$; $T\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\,\middle|\,-0{,}04\right)$

d) $T\left(-\sqrt[3]{3}\,\middle|\,-6{,}5\right)$ e) $T(-1{,}46|-2{,}69)$; $H(5{,}46|25{,}02)$

f) $T(0|-8)$

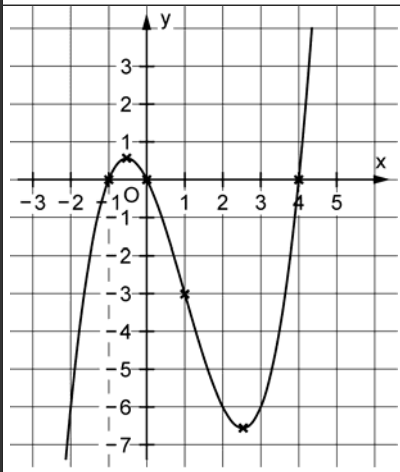
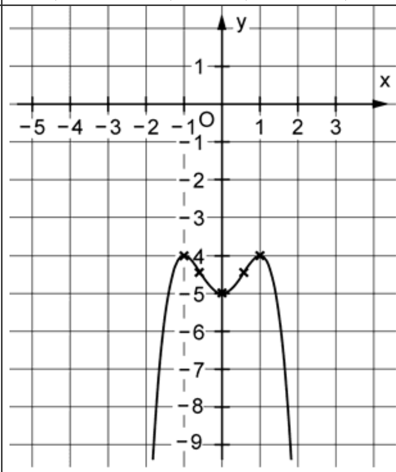
3 a) $W\left(-\frac{4}{3}\,\middle|\,\frac{172}{27}\right)$ b) Sattelpunkt: $S(0|21)$; $W(3{,}5|-129{,}1)$

c) $W_1(-2|12)$; $W_2(2|12)$

4 a) $W\left(1\,\middle|\,\frac{1}{3}\right)$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$ b) $W\left(\frac{4}{3}\,\middle|\,-\frac{353}{27}\right)$; $y = -\frac{10}{3}x - \frac{233}{27}$ c) $W(0|0)$; $y = 6x$

Autor: Andrea Stühler

5

	a)	b)
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
Symmetrie	keine elementare Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse
Verhalten für betragsgroße x	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Nullstellen	$x = -1;\ x = 0;\ x = 4$	keine Nullstellen
Extrempunkte	$T(2{,}53 \mid -6{,}56);\ H(-0{,}53 \mid 0{,}56)$	$T(0 \mid -5);\ H_1(-1 \mid -4);\ H_2(1 \mid -4)$
Wendepunkte	$W(1 \mid -3)$	$W_1\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \mid -\frac{40}{9}\right);\ W_2\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \mid -\frac{40}{9}\right)$
Graph		

6 Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $h(t)$ im Intervall [0; 3]. Für die erste Ableitung der Funktion h gilt $h'(t) = 180t^2 - 860t + 1000$. Diese hat Nullstellen bei $t_1 = 2$ und $t_2 = 2{,}\overline{7}$.

Intervall	$t < 2$		$2 < t < 2{,}\overline{7}$		$t > 2{,}\overline{7}$
z. B. t_0	1,5	2	2,5	$2{,}\overline{7}$	3
$h'(t_0)$	115	0	−25	0	40

Da an der Stelle $t_1 = 2$ ein Vorzeichenwechsel von + nach – vorliegt, hat die Funktion h in $H(2 \mid h(2))$ einen Hochpunkt.
Es gilt $h(2) = 760$. Also ist $H(2 \mid 760)$ ein Hochpunkt von h.
Um das globale Maximum von h zu finden, müssen auch die Ränder ihres Definitionsbereichs untersucht werden. Es gilt $h(0) = 0$ und $h(3) = 750$.
Bei $t = 2$ liegt also das absolute Maximum $h(2) = 760$ vor.
Der Ballon erreicht also zwischen 13 und 17 Uhr eine maximale Höhe von 760 m.

Autor: Andrea Stühler

7 Zielgröße: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$

Nebenbedingungen: $g = a$; $h = f(a) = -7a^2 + 5$, $f(a) > 0$ für $0 < a < 0{,}84$

Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2} a \cdot (-7a^2 + 5) = -\frac{7}{2}a^3 + \frac{5}{2}a$

$A'(a) = -\frac{21}{2}a^2 + \frac{5}{2}a$

$A'(a) = 0$ liefert $a = \pm\sqrt{\frac{5}{21}} \approx 0{,}488$

$A\left(\sqrt{\frac{5}{21}}\right) \approx 0{,}813$

Für $a = \sqrt{\frac{5}{21}}$ wird das Dreieck mit etwa 0,813 Flächeneinheiten maximal.

8 a) Grad 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$
Kurvenpunkt $(1|4)$: $f(1) = 4$, also $a + b + c = 4$
Tangente hat Steigung 4: $f'(1) = 4$, also $2a + b = 4$
Extremum bei $x = \frac{3}{4}$: $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$, also $\frac{3}{2a} + b = 0$ $\left(\text{zudem am Ende prüfen: } f''\left(\frac{3}{4}\right) \neq 0\right)$
Subtraktion der letzten beiden Gleichungen ergibt: $\frac{1}{2a} = 4$, also $a = 8$. Einsetzen in die anderen beiden Gleichungen liefert: $b = -12$ und $c = 8$. Man erhält somit $f(x) = 8x^2 - 12x + 8$ als mögliche Lösung; da $f''(x) = 16$, gilt auch $f''\left(\frac{3}{4}\right) \neq 0$. Lösung: $f(x) = 8x^2 - 12x + 8$

b) Grad 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$
Extrempunkt bei $(0|0)$: $f(0) = 0$, also $d = 0$; $f'(0) = 0$, also $c = 0$; außerdem: $f''(0) \neq 0$ (muss am Ende überprüft werden)
$W(-1|-2)$: $f(-1) = -2$, also $-a + b = -2$ sowie $f''(-1) = 0$ also $-6a + 2b = 0$ (*)
Einsetzen von $b = a - 2$ in (*) ergibt: $-6a + 2(a-2) = 0$, also $-4a - 4 = 0$, also $a = -1$, somit $b = a - 2 = -3$
Man erhält somit $f(x) = -x^3 - 3x^2$ als mögliche Lösung; da $f''(x) = -6x - 6$, gilt auch $f''(0) \neq 0$.
Lösung: $f(x) = -x^3 - 3x^2$

c) Grad 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$
$S(6|0)$: $f(6) = 0$, also $216a + 36b + 6c + d = 0$ (*)
„im Ursprung Wendetangente mit $y = 2x$" enthält 3 Informationen:
Ursprung: $f(0) = 0$, also $d = 0$
Wendepunkte: $f''(0) = 0$, also $b = 0$
$y = 2x$: $f'(0) = 2$, also $c = 2$.
Einsetzen in (*) liefert: $216a + 12 = 0$, also $a = \frac{-12}{216} = \frac{-1}{18}$

Lösung: $f(x) = \frac{-1}{18}x^3 + 2x$

9 Für $a = -2$ schneiden sich die Funktionen f und g im Punkt $P(1|-3)$. Da aber $f'(-1) \neq g'(-1)$ ist, handelt es sich bei dem Schnittpunkt nicht um einen Berührpunkt.

Autor: Andrea Stühler