Selbsteinschätzung

Checkliste „Wachstumsvorgänge“	Testaufgabe	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann	Trainingsaufgaben
1. Ich kann die absolute und die relative Änderung eines Bestandes zwischen zwei Zeitpunkten berechnen.	1					**LE 1** Lehrtext Beispiel	**LE 1** Aufgaben 1, 2 und 3
2. Ich kann zwischen linearem und exponentiellem Wachstum unterscheiden.	2					**LE 2** Lehrtext Beispiel 1	**LE 2** Aufgaben 1, 2, 5 und 9 **Training** Augabe 4
3. Ich kann aus zwei Zeitpunkten den Wachstumsfaktor bei exponentiellem Wachstum bestimmen.	3					**LE 2** Lehrtext Beipiel 2	**LE 2** Aufgaben 7, 8 und 9b
4. Ich kann zwischen exponentieller Zunahme und Abnahme unterscheiden.	4					**LE 3** Lehrtext	**LE 3** Aufgabe 1
5. Ich kann den Graphen einer Exponentialfunktion verschieben und strecken und weiß, wie sich das auf den Funktionsterm auswirkt.	5					**LE 3** Lehrtext Beispiel 2	**LE 3** Aufgaben 3, 4, 5 und 8 **Training** Aufgabe 1
6. Ich kann aus zwei Punkten des Graphen einer Exponentialfunktion den Term der Funktion $f(x) = a\,q^x$ bestimmen.	6					**LE 4** Beispiel 1	**LE 4** Aufgaben 1 und 5
7. Ich kann Halbwerts- und Verdopplungszeiten bestimmen.	7					**LE 4** Beipiel 3	**LE 4** Aufgaben 7, 8 und 9 **Training** Aufgabe 10b
8. Ich kann eine Exponentialgleichung durch Logarithmieren lösen.	8					**LE 5** Beispiel 2	**LE 5** Aufgaben 10, 11, 17, 23, 24, und 26 **Training** Aufgabe 2
9. Ich kann die Logarithmengesetze anwenden.	9					**LE 6** Lehrtext Beispiel 1	**LE 6** Aufgaben 1, 2, 3, 5, 10 und 13

Autor: Detlef Hoche

Checkliste „Wachstumsvorgänge“	Testauf-gabe	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch un-sicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbei-ten kann	Trainings-aufgaben
10. Ich kann eine Exponential-gleichung mithilfe der Logarithmengesetze lösen.	10					**LE 6** Beispiel 2 und 3	**LE 6** Aufgaben 7, 8 und 9

Autor: Detlef Hoche

Test- und Trainingsaufgaben

1 Die Schülerzahl an allgemeinbildenden Schulen in Hessen betrug 645 952 im Schuljahr 2012/13, 631 588 im Schuljahr 2013/14 und 623 866 im Schuljahr 2014/15.
Berechnen Sie die absolute und die relative jährliche Abnahme der Schülerzahl.

2 Geben Sie an, ob es sich bei folgendem Wachstumsvorgang um lineares oder exponentielles Wachstum handelt.
a) Der Bestand nimmt jährlich um 10 zu.
b) Der Bestand nimmt stündlich um 10 % zu.
c) Die Differenz $B(n+1) - B(n)$ ist konstant.
d) Die Differenz $B(n+3) - B(n)$ ist konstant.
e) Der Quotient zweier Bestandswerte mit jeweils stündlichem Abstand ist konstant.
f) Der Bestand ist proportional zur Zeit.

3 Berechnen Sie den Wachstumsfaktor.
a) Eine Algenkultur bedeckt eine Fläche von 32 cm². Nach 4 Tagen hat sie sich auf eine Fläche von 162 cm² ausgebreitet.
b) Die Temperatur in einem Thermosbehälter beträgt beim Einfüllen 98 °C. Nach zwei Stunden ist sie auf 72 °C abgekühlt.

4 a) Welche Funktion beschreibt eine expontentielle Zunahme, welche eine exponetielle Abnahme?

$f_1(x) = 0{,}2 \cdot 3^{-x}$ $f_2(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$ $f_3(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$ $f_4(x) = 0{,}8 \cdot 0{,}3^x$

b) Geben Sie eine Bedingung für exponentielle Abnahme der Funktionswerte von $f(x) = c \cdot a^x$ an.

5 Verschiebt man den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ um 3 Einheiten nach links, dann kann man den ursprünglichen Graphen erhalten, indem man den verschobenen Graphen streckt. Bestimmen Sie den Streckfaktor.

6 Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Exponentialfunktion mit $f(x) = a\,q^x$, deren Graph durch die Punkte P und Q geht.
a) $P(0|1)$, $Q(5|15)$ b) $P(1|1)$, $Q(-1|0{,}5)$ c) $P(-1|10)$, $Q(2|1)$

7 Stellen Sie jeweils eine Exponentialgleichung auf und lösen Sie sie.
a) Ein Betrag von 1000 € soll zu einem Jahreszinssatz von 1,25 % bei einer Bank angelegt werden. Wie viele Jahre müsste man warten, damit das Guthaben auf das Doppelte angewachsen ist, wenn sich der Zinssatz nicht ändert und die jährlichen Zinsen auf dem Konto verbleiben?
b) Ein Auto eines bestimmten Herstellers verliert jährlich 16 % seines Wertes. Nach wie vielen Jahren ist es nur noch die Hälfte wert?

8 Lösen Sie die Exponentialgleichung.
a) $0{,}3 \cdot 2^x = 84$ b) $2 \cdot 2^x + 2^{x-1} = 320$ c) $3{,}5^{1-x} \cdot 3{,}5^{2x} = 100$

9 Es ist $\log_2(5) \approx 2{,}322$. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen ohne die Logarithmustaste auf dem Taschenrechner zu verwenden.
a) $\log_2(5^2)$ b) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)$ c) $\log_5(2)$

10 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.
a) $3^{x+1} = 5 \cdot 2^{x-1}$ b) $4^x \cdot 7^x = 15$ c) $3^{\log_{10}(x)} = 5x$

Autor: Detlef Hoche

Test- und Trainingsaufgaben – Lösungen

1

Von Schuljahr zu Schuljahr	Absolute Abnahme	Relative Abnahme
2012/13 nach 2013/14	14 364	2,2 %
2013/14 nach 2014/15	7722	1,2 %

2 linear a), c), d), f); exponentiell b), e)

3 a) $32 \cdot a^4 = 162$; $a^4 = \frac{162}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$; Wachstumsfaktor $a = \frac{3}{2}$

b) $98 \cdot a^2 = 72$; $a^2 = \frac{72}{98} = \left(\frac{6}{7}\right)^2$; Wachstumsfaktor $a = \frac{6}{7}$

4 a) Zunahme: f_3; Abnahme: f_1, f_2 und f_4

b) exponentielle Abnahme liegt bei $0 < a < 1$ vor.

5 $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$

Man muss also mit dem Streckfaktor $\frac{1}{8}$ strecken.

6 a) $a = 1$; $q^5 = 15$; $q = \sqrt[5]{15} = 15^{\frac{1}{5}}$; $f(x) = \sqrt[5]{15}^{\,x}$ oder $f(x) = 15^{\frac{x}{5}}$

b) $aq^1 = 1$; $aq^{-1} = 0{,}5$; $q^{-2} = 0{,}5$; $q = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $a = 2^{-\frac{1}{2}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}^{\,x}$ oder $f(x) = 2^{\frac{x-1}{2}}$

c) $aq^{-1} = 10$; $aq^2 = 1$; $q^3 = 0{,}1$; $q = \sqrt[3]{0{,}1}$; $a = \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}01}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}01}}\sqrt[3]{0{,}1}^{\,x}$ oder $f(x) = 10^{\frac{2-x}{3}}$

7 a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}0125^x$

Ansatz für Verdopplung: $2 = 1{,}0125^x$; $x = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(1{,}0125)} \approx 55{,}8$ (oder mit TR systematisch x-Werte probieren);

also muss man 56 Jahre warten, bis sich das Kapital verdoppelt hat.

b) $f(x) = f(0) \cdot 0{,}84^x$;

Ansatz für Halbierung: $0{,}5 = 0{,}84^x$; $x = \frac{\log_{10}(0{,}5)}{\log_{10}(0{,}84)} \approx 3{,}98$; also ist das Auto nach 4 Jahren nur noch die Hälfte wert.

8 a) $0{,}3 \cdot 2^x = 84$; $2^x = \frac{84}{0{,}3} = 280$; $x = \log_2(280) = 8{,}129$

b) $2 \cdot 2^x + 2^{x-1} = 320$; $2 \cdot 2^x + \frac{1}{2}2^x = 320$; $\frac{5}{2}2^x = 320$; $2^x = 128$; $x = 7$

c) $3{,}5^{1-x} \cdot 3{,}5^{2x} = 100$; $3{,}5^{1-x} \cdot 3{,}5^{2x} = 3{,}5^{x+1} = 100$; $x + 1 = \log_{3,5}(100) = 3{,}676$; $x = 2{,}676$

9 a) $\log_2(5^2) = 2\log_2(5) \approx 2 \cdot 2{,}322 = 4{,}644$

b) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right) = \log_2(1) - \log_2(5) = 0 - \log_2(5) \approx -2{,}322$;

alternativ: $\log_2\left(\frac{1}{5}\right) = \log_2(5^{-1}) = -1 \cdot \log_2(5) = -\log_2(5) \approx -2{,}322$

c) $\log_5(2) = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(5)} = \frac{1}{\frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(2)}} = \frac{1}{\log_2(5)} \approx \frac{1}{2{,}322} \approx 0{,}431$

Autor: Detlef Hoche

10 a) $3^{x+1} = 5 \cdot 2^{x-1} \quad | \log_{10}(\ )$

$\log_{10}(3^{x+1}) = \log_{10}(5 \cdot 2^{x-1})$

$(x+1) \cdot \log_{10}(3) = \log_{10}(5) + \log_{10}(2^{x-1})$

$(x+1) \cdot \log_{10}(3) = \log_{10}(5) + (x-1) \cdot \log_{10}(2)$

$x \cdot \log_{10}(3) + \log_{10}(3) = \log_{10}(5) + x\log_{10}(2) - 1\log_{10}(2)$

$x \cdot \log_{10}(3) - x\log_{10}(2) = \log_{10}(5) - \log_{10}(2) - \log_{10}(3)$

$x \cdot (\log_{10}(3) - \log_{10}(2)) = \log_{10}(5) - \log_{10}(2) - \log_{10}(3)$

$x = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(2) - \log_{10}(3)}{\log_{10}(3) - \log_{10}(2)} \approx -0{,}45$

b) $4^x \cdot 7^x = 15$

$x\log_{10}(4) + x\log_{10}(7) = \log_{10}(15)$

$x(\log_{10}(4) + \log_{10}(7)) = \log_{10}(15)$

$x = \frac{\log_{10}(15)}{\log_{10}(4) + \log_{10}(7)} \approx 0{,}81$

alternativ: $4^x \cdot 7^x = 15$

$28^x = 15$

$x = \log_{28}(15)$

c) $3^{\log_{10}(x)} = 5x$

$\log_{10}(x) \cdot \log_{10}(3) = \log_{10}(5) + \log_{10}(x)$

$\log_{10}(x)\log_{10}(3) - \log_{10}(x) = \log_{10}(5)$

$\log_{10}(x)(\log_{10}(3) - 1) = \log_{10}(5)$

$\log_{10}(x) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3) - 1}$

$x = 10^{\frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3) - 1}} \approx 0{,}046$

Autor: Detlef Hoche