Quadratische Gleichungen mit CAS

1 Bestimme die Lösungen der quadratischen Gleichung mit dem CAS rechnerisch und grafisch.

a) $-x^2 + 8x + 2 = 3x + 2$ b) $-\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x = -\frac{1}{2}$ c) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

2 In Fig. 1 wird eine quadratische Gleichung gelöst.

a) Gib die Gleichung an und forme sie in die allgemeine Form um.

b) Bestimme die Lösung mit dem CAS.

c) Löse die Gleichung mit dem CAS grafisch. Gib mindestens drei verschiedene Lösungswege an.

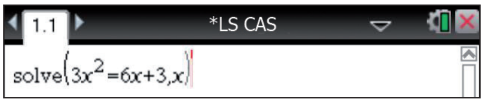

Fig. 1

3 Bestimme die Lösungen der quadratischen Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - 4x + a = 0$.
Für welchen Wert von a hat die Gleichung die Lösung $x = 5$?

4 In Fig. 2 wurde eine quadratische Gleichung mit dem CAS grafisch gelöst. Gib die quadratische Gleichung in der allgemeinen Form an. Bestimme die zweite Lösung mit dem CAS.

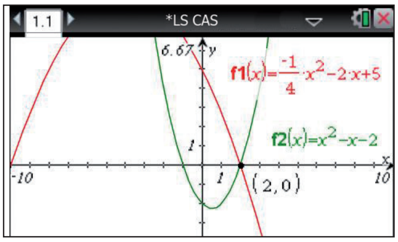

Fig. 2

5 Gegeben sind die quadratischen Gleichungen:

I. $x^2 + 2x + 2 = 0$ II. $x^2 + 2x - 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Löse die Gleichungen mit dem CAS rechnerisch und grafisch. Wie viele Lösungen kann eine quadratische Gleichung besitzen? Begründe deine Entscheidung.

6 Für welche Werte von t hat die quadratische Gleichung keine Lösung, genau eine Lösung bzw. zwei Lösungen? Veranschauliche für jeden Fall eine grafische Lösung mit dem CAS.

a) $4x^2 - 3x + t = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + t \cdot x - t = 0$

7 Die Lösungen für eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gibt man mit der Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ an.

a) Welche allgemeine Lösung erhält man für die quadratische Gleichung in der allgemeinen Form mit dem CAS? Gib die Lösung in der Form $x_{1/2} = \ldots$ an.

b) Zeige durch Umformen, dass die CAS-Lösung äquivalent zur Lösungsformel ist.

8 Bestimme eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -10$.
Gib die Gleichung in der allgemeinen Form an.

9 Die quadratische Gleichung $2x^2 - 4x = \ldots$ ist unvollständig.
Ergänze die Gleichung so, dass sie die entsprechenden Lösungen hat.

a) $x_1 = -3,\ x_2 = 4$ b) $x_1 = 2 - \sqrt{3},\ x_2 = 2 + \sqrt{3}$ c) $x_1 = 2 - \sqrt{3},\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$

10 Bestimme die Schnittpunkte der Funktionen mit dem CAS.

a)

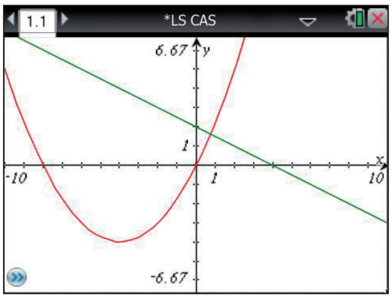

Fig. 3

b)

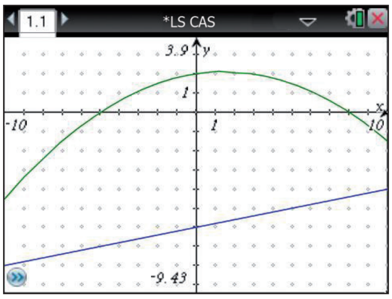

Fig. 4

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

1 a) $-x^2 + 8x + 2 = 3x + 2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

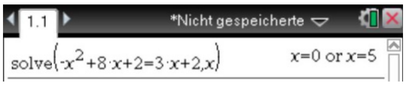

Fig. 1

$f_1(x) = -x^2 + 8x + 2$

$f_2(x) = 3x + 2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

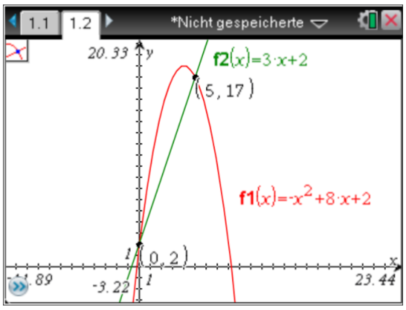

Fig. 2

b) $-\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{2}{5}$

$x_2 = 1$

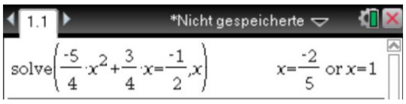

Fig. 3

$f_1(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -0{,}4$

$x_2 = 1$

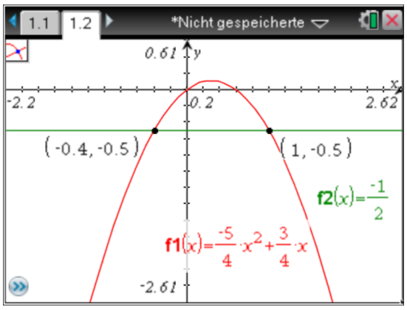

Fig. 4

c) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx -0{,}387$

$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx 1{,}72$

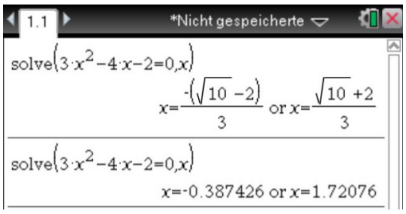

Fig. 5

$f_1(x) = 3x^2 - 4x - 2$

$f_2(x) = 0$

$x_1 \approx -0{,}387$

$x_2 \approx 1{,}72$

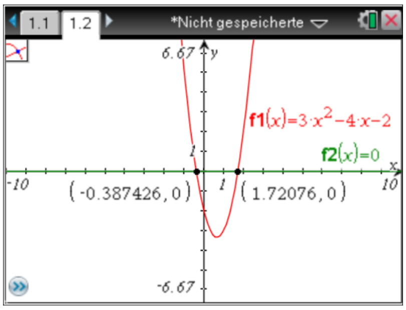

Fig. 6

2 a) $3x^2 = 6x + 3$ quadratische Gleichung

$0 = x^2 - 2x - 1$ Normalform

b) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

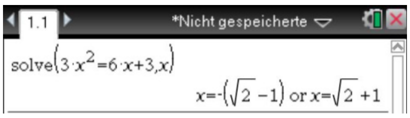

Fig. 7

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

2 c) Grafische Lösung:

Lösungsvariante 1, *Fig. 1:*

$x_1 = 2{,}414$

$x_2 = -0{,}414$

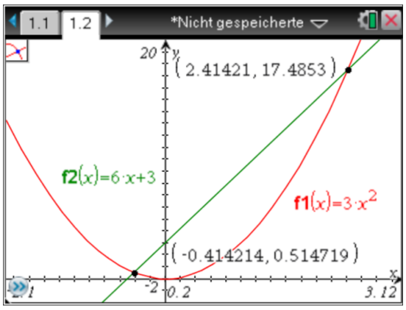

Fig. 1

Lösungsvariante 2: *Fig. 2*

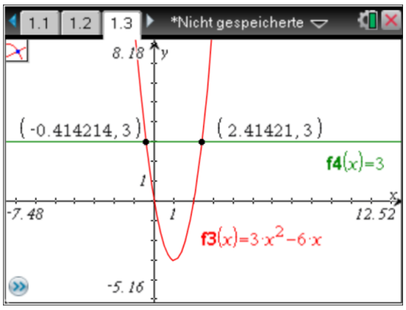

Fig. 2

Lösungsvariante 3: *Fig. 3*

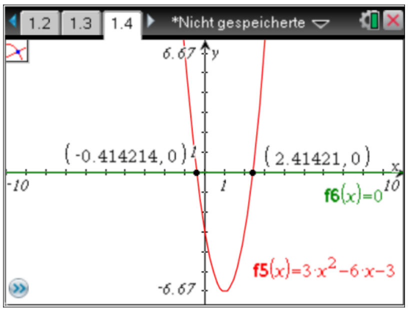

Fig. 3

3 *Fig. 4:*

$x_1 = 4 - \sqrt{16 - 2a}$

$x_2 = 4 + \sqrt{16 - 2a}$

Für die Bestimmung von a gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, z.B.: Fig. 5

I) $5 = 4 + \sqrt{16 - 2a}$

$a = \frac{15}{2}$

II) $\frac{1}{2} \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + a = 0$

$a = \frac{15}{2}$

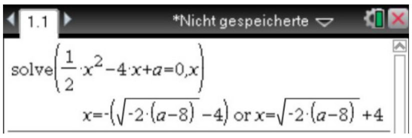

Fig. 4

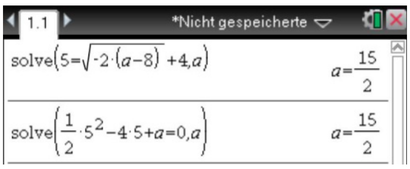

Fig. 5

4 *Fig. 6:*

$-\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 = x^2 - x - 2$

$0 = x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{28}{5}$

$x_1 = -\frac{14}{5}$

$x_2 = 2$

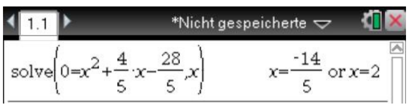

Fig. 6

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

5 *Fig. 1:*

I $x^2 + 2x + 2 = 0$
$L = \emptyset$, es gibt keine Lösung.

II $x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_1 = -1 + \sqrt{2}$
$x_2 = -1 - \sqrt{2}$

III $x^2 + 2x + 1 = 0$
$x_1 = -1$

Eine quadratische Gleichung kann zwei, eine oder keine reelle Lösung haben.

Fasst man die Lösung einer quadratischen Gleichung als Nullstellen einer im Koordinatensystem verschobenen quadratischen Normalparabel auf (Fig. 2 – Fig. 4), so kann man sich den Sachverhalt bildlich vorstellen. Die Funktion kann oberhalb der x-Achse liegen, die x-Achse gerade berühren oder in zwei Punkten die x-Achse schneiden.

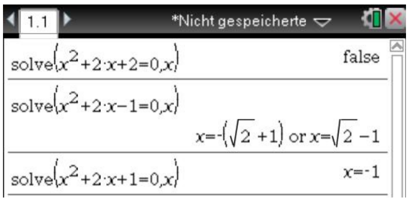

Fig. 1

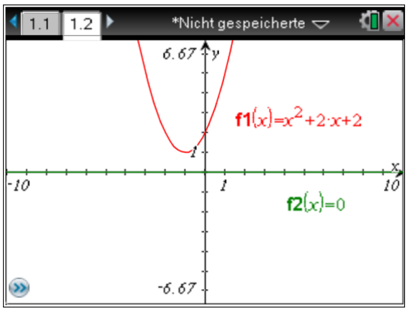

Fig. 2

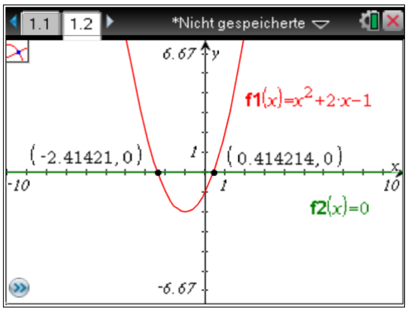

Fig. 3

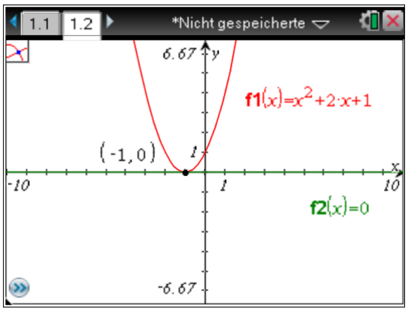

Fig. 4

6 a) $4x^2 - 3x + t = 0$

$x_1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{9 - 16t}$

$x_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{9 - 16t}$

keine Lösung für $t > \frac{9}{16}$

eine Lösung für $t = \frac{9}{16}$

zwei Lösungen für $t < \frac{9}{16}$

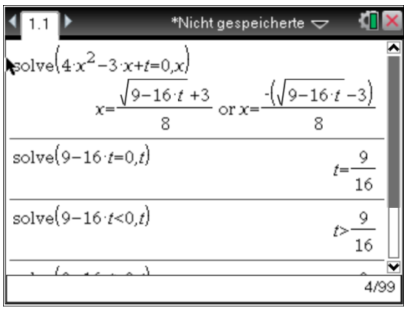

Fig. 5

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

6 Beispiele für die grafische Veranschaulichung *(Fig. 1)*:
keine Lösung $t = 2$
eine Lösung $t = \frac{9}{16}$
zwei Lösungen $t = -2$

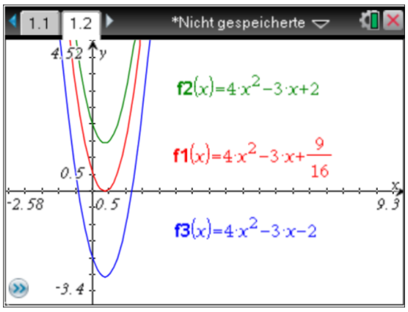

Fig. 1

b) *Fig. 2:*
$\frac{1}{2}x^2 + t \cdot x - t = 0$
$x_1 = -t + \sqrt{t(t+2)}$
$x_2 = -t - \sqrt{t(t+2)}$
keine Lösung für $-2 < t < 0$
eine Lösung für $t = 0$ oder $t = -2$
zwei Lösungen für $t < -2$ oder $t > 0$

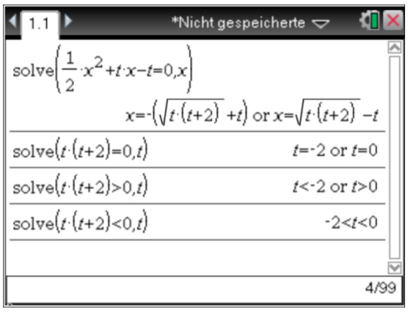

Fig. 2

Beispiele für die grafische Veranschaulichung *(Fig. 3)*:
keine Lösung $t = -1$
eine Lösung $t = 0$
zwei Lösungen $t = -4$

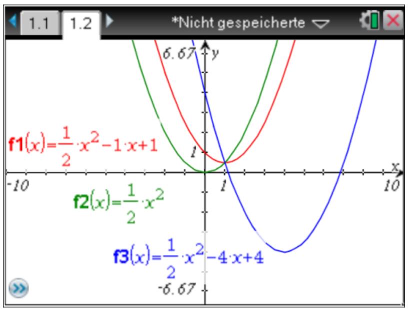

Fig. 3

7 *Fig. 4:*
a) $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$
b) Für $a = 1$ ist $b = p$ und $c = q$
$x_{1/2} = -\frac{p}{2 \cdot 1} \pm \frac{1}{2 \cdot 1}\sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}$
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}}$
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

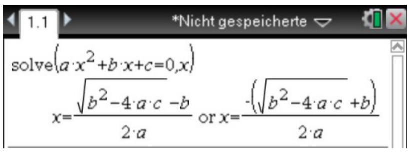

Fig. 4

8 Lösung mit dem Satz von Vieta:
$0 = (x - 5)(x + 10)$
$0 = x^2 + 5x - 50$

Lösung mit einem Gleichungssystem (Fig. 5):
$0 = x^2 + a \cdot x + b$
$0 = 5^2 + a \cdot 5 + b$
$0 = (-10)^2 + a \cdot (-10) + b$
$a = 5 \quad b = -50$

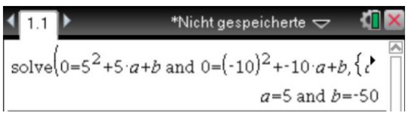

Fig. 5

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

9 a) Lösung mit dem Satz von Vieta:
$0 = (x+3)(x-4)$
$0 = x^2 - x - 12$

Folgende Ergänzung wird notwendig:
$2x^2 - 4x = x^2 - 3x + 12$

Lösung über ein Gleichungssystem *(Fig. 1)*:
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c}$
$\underline{30 = 9a - 3b + c}$
$\underline{16 = 16a + 4b + c}$
$a = 2 - \frac{t}{12},\quad b = -2 + \frac{t}{12},\quad c = t$
Die Variable t kann frei gewählt werden.
Für $t = 12$ ergibt sich die Gleichung:
$2x^2 - 4x = x^2 - 3x + 12$

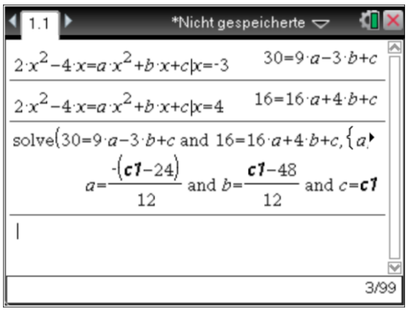

Fig. 1

Grafische Lösung *(Fig. 2)*:
- Zeichnen der quadratischen Funktion
- Festlegen der Punkte mit den x-Werten −3 und 4 auf dem Graphen der Funktion
- Zeichnen einer Geraden durch die bestimmten Punkte
- Angabe der Geradengleichung

Lösung:
$2x^2 - 4x = -2x + 24$

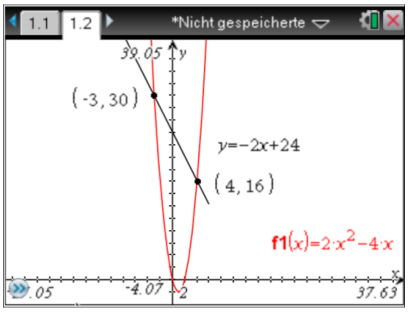

Fig. 2

b) Lösung mit dem Satz von Vieta:
$0 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$
$0 = x^2 - 4x + 1$

Folgende Ergänzung wird notwendig *(Fig. 3)*:
$2x^2 - 4x = -1$
Lösung über ein Gleichungssystem:
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c}$
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c \quad | \; x = 2 - \sqrt{3}}$
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c \quad | \; x = 2 + \sqrt{3}}$
$a = 2 + t,\quad b = -4 - 4t,\quad c = t$
Die Variable t kann frei gewählt werden.
Für $t = -1$ ergibt sich die Gleichung:
$2x^2 - 4x = -1$

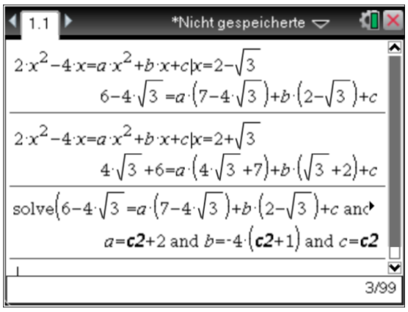

Fig. 3

Grafische Lösung *(Fig. 4)*:
$2x^2 - 4x = 4x - 2$

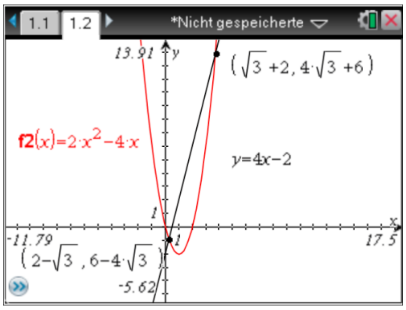

Fig. 4

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

9 c) Lösung mit dem Satz von Vieta:
$0 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{2})$
$0 = x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2} - 3)x - \sqrt{6} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2$

Folgende Ergänzung wird notwendig:
$2x^2 - 4x = x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{2} + 1)$

Lösung über ein Gleichungssystem *(Fig. 1)*:
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c}$
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c \quad | \; x = 2 - \sqrt{3}}$
$\underline{2x^2 - 4x = ax^2 + bx + c \quad | \; x = 1 + \sqrt{2}}$
Die Lösung ist nur näherungsweise anzugeben:
$a = 1{,}55(t + 1{,}29)$, $b = -4{,}15(t + 0{,}965)$, $c = t$
Die Variable t kann frei gewählt werden.
Für $t = 1$ ergibt sich die Gleichung:
$2x^2 - 4x = 3{,}55x^2 - 8{,}15x + 1$

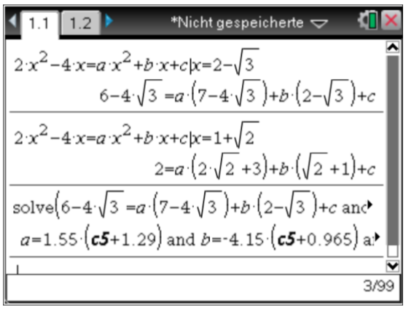

Fig. 1

Grafische Lösung *(Fig. 2)*:
$2x^2 - 4x = 1{,}36x - 1{,}29$

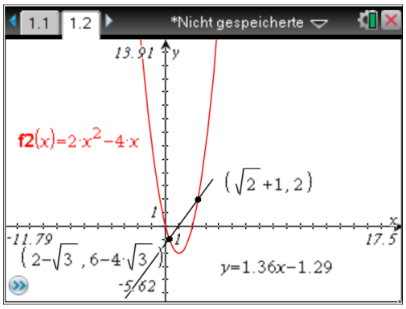

Fig. 2

10 Fig. 3 und Fig. 4:
a) $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$
$f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

$\frac{1}{4}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}x + 2$
$x_1 = -5 + \sqrt{33}$
$x_2 = -5 - \sqrt{33}$

$f_2(-5 + \sqrt{33}) = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}$
$f_2(-5 - \sqrt{33}) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$

$S_1\left(-5 + \sqrt{33} \,\middle|\, \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$
$S_2\left(-5 - \sqrt{33} \,\middle|\, \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$

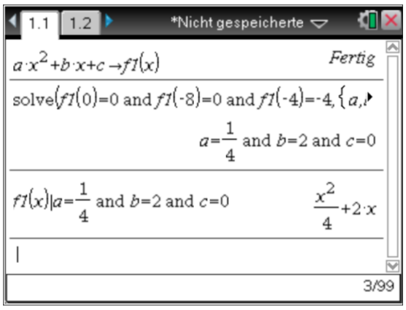

Fig. 3

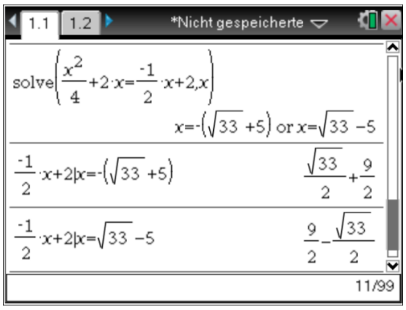

Fig. 4

Quadratische Gleichungen mit CAS – Lösungen

10 b) Fig. 1 und Fig. 2:

$f_1(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{20}x + 2$

$f_2(x) = \frac{1}{5}x - 6$

$-\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{20}x + 2 = \frac{1}{5}x - 6$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{641} \approx 12{,}159$

$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{641} \approx -13{,}159$

$f_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{641}\right) = -\frac{61}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{641} \approx -3{,}568$

$f_2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{641}\right) = -\frac{61}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{641} \approx -8{,}632$

$S_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{641} \,\middle|\, -\frac{61}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{641}\right)$

$S_2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{641} \,\middle|\, -\frac{61}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{641}\right)$

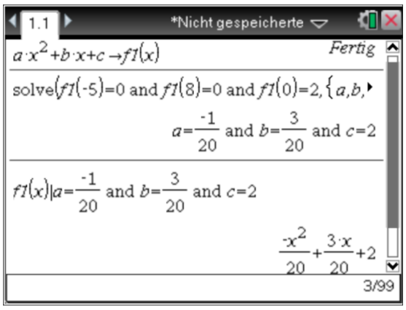

Fig. 1

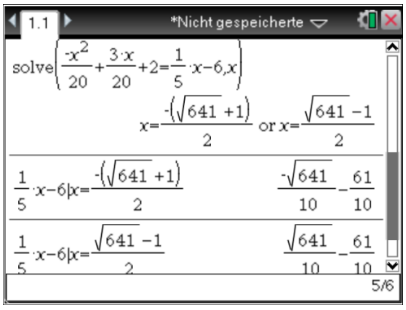

Fig. 2

11 a) x – Anzahl der Reihen
y – Anzahl der Tennisbälle

x	1	2	3	4
y	1	3	6	10

Folgende Funktion kann bestimmt werden (Fig. 3):

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

Die Gleichung der Funktion ergibt sich auch aus der Gauß'schen Summenformel

$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$

$f(23) = 276$

Für eine Dreiecksform mit 23 Reihen benötigt man 276 Tennisbälle.

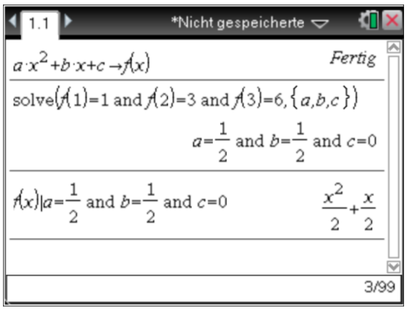

Fig. 3

b) Fig. 4:

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 2701$

$x_1 = -74, \; x_2 = 73$

Die Lösung −74 entfällt, da sie nicht praxisrelevant ist.
Die Dreiecksform hätte bei 2701 Tennisbällen 73 Reihen.

Fig. 4