XIII Geometrische Abbildungen und Matrizen

1 Geometrische Abbildungen und Abbildungsgleichungen

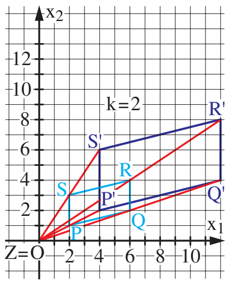


Fig. 1

1 Bei einer zentrischen Streckung wird von einem Punkt, dem Zentrum, aus gestreckt (Fig. 1). Entsprechend kann man auch von einer Geraden aus strecken (Fig. 2).
a) Bestimmen Sie den Bildpunkt T′ von T(5|4), wenn die Achse a die x_1-Achse und der Streckfaktor k = 2 ist.
b) Geben Sie die Koordinaten des Bildpunktes X′ eines Punktes $X(x_1|x_2)$ allgemein an.
c) Welche Punkte werden bei dieser Streckung auf sich abgebildet?

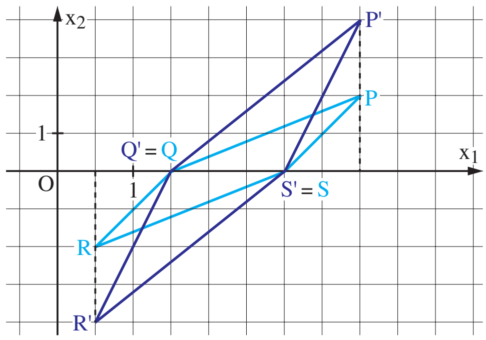
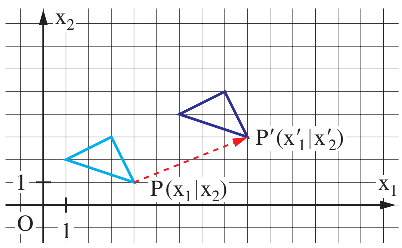


Fig. 2

Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen ordnen jedem Punkt $P(x_1|x_2)$ einen Bildpunkt $P'(x_1'|x_2')$ zu. Solche Abbildungen nennt man **geometrische Abbildungen**. Den Zusammenhang zwischen den Koordinaten von Punkt und Bildpunkt kann man häufig durch Abbildungsgleichungen beschreiben.

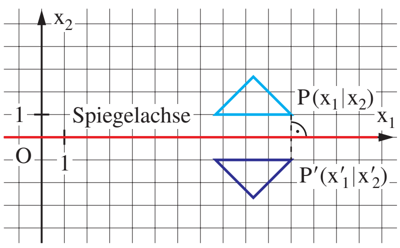
In einigen speziellen Fällen kann man die Abbildungsgleichungen aus der Zeichnung fast „ablesen“ (Fig. 3–5).

Verschiebung $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$



Abbildungsgleichungen: $\begin{cases} x_1' = x_1 + 5 \\ x_2' = x_2 + 2 \end{cases}$

Spiegelung an der x_1-Achse



Abbildungsgleichungen: $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = \quad -x_2 \end{cases}$

Zentrische Streckung von O aus mit dem Streckfaktor 3

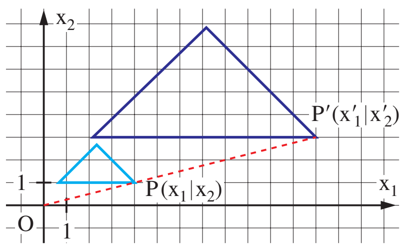


Fig. 3–5

Abbildungsgleichungen: $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = \quad 3x_2 \end{cases}$

Alle geometrischen Abbildungen, die Geraden auf Geraden abbilden, kann man durch Abbildungsgleichungen beschreiben. Die Scherung ist ein weiteres Beispiel.

Scherung mit einer Achse a

Eine Scherung ist festgelegt durch eine Achse a und einen „Scherungswinkel“ α.
Es gilt die Abbildungsvorschrift:
(1) Liegt P auf a, so ist P′ = P.
(2) Liegt P nicht auf der Achse a, so gilt für P′ (Fig. 6):
  (a) PP′ ist parallel zu a.
  (b) Ist A der Fußpunkt des Lotes von P auf die Achse a, so ist ∢P′AP = α, dem festen Scherungswinkel.

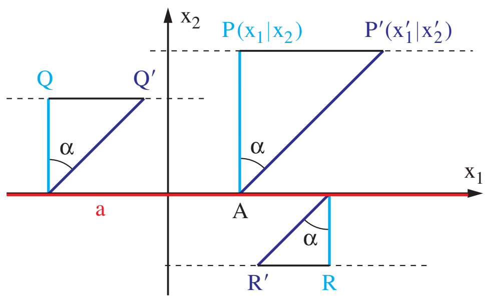


Fig. 6

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Ist die x_1-Achse die Scherungsachse a, so bedeutet die Bedingung „PP′ ist parallel zu a“: $x_2' = x_2$. Aus $\alpha = \sphericalangle P'AP$ folgt: $\frac{x_1' - x_1}{x_2} = \tan(\alpha)$. Setzt man $t = \tan(\alpha)$, so ergeben sich die Abbildungsgleichungen: $\begin{cases} x_1' = x_1 + t\,x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$.

Bei einer Scherung wird jeder Punkt der Achse auf sich selbst abgebildet. Punkte, die bei einer geometrischen Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, nennt man **Fixpunkte** der Abbildung. Eine Gerade, die aus Fixpunkten einer Abbildung besteht, nennt man eine **Fixpunktgerade**.
Bei einer Scherung wird jeder Punkt einer zur Achse parallelen Geraden auf einen (anderen) Punkt dieser Geraden abgebildet. Man sagt: Die Gerade wird auf sich selbst abgebildet, und man nennt eine solche Gerade eine **Fixgerade**.

Beispiel 1: (Berechnen von Bildpunkten und Bildgeraden)
Eine geometrische Abbildung ist durch die Abbildungsgleichungen $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ gegeben.
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $A(5|7)$.
b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ rechnerisch.
Lösung:
a) Man muss die Koordinaten von A in die „rechten Seiten“ der Abbildungsgleichungen einsetzen und erhält so die Koordinaten a_1' und a_2' des Bildpunktes A′ von A.
Also $a_1' = 2\cdot 5 - 7 = 3$ und $a_2' = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43$. Also $A'(3|43)$.

Fig. 1

b) Ein Punkt P auf g hat die Koordinaten $p_1 = 1 - 3t$ und $p_2 = 2 + t$. Der Bildpunkt P′ hat die Koordinaten $p_1' = 2p_1 - p_2 = 2(1 - 3t) - (2 + t) = -7t$ und $p_2' = 3p_1 + 4p_2 = 3(1 - 3t) + 4(2 + t) = 11 - 5t$.
Also $g'\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2: (Fixpunkte und Fixgeraden)
Gegeben ist die durch die Abbildungsgleichungen $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ definierte Abbildung.
a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung.
b) Zeigen Sie, dass alle zur x_1-Achse parallelen Geraden Fixgeraden sind.
Lösung:
a) Ein Punkt $P(x_1|x_2)$ ist Fixpunkt, wenn er gleich seinem Bildpunkt $P'(x_1'|x_2')$ ist. Für einen Fixpunkt muss also gelten $x_1' = x_1$ und $x_2' = x_2$.

Der Rechner gibt @1 als Variable aus. Dafür schreibt man meistens t. $x_1 = t$ und $x_2 = 0$ wird als Vektorgleichung notiert: $\vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Rechner liefert $\vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ als Fixpunkte (Fig. 2).
Alle Punkte der x_1-Achse sind Fixpunkte; die x_1-Achse ist also Fixpunktgerade.
b) Eine zur x-Achse parallele Gerade g hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Bildgerade g′ ist dann $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (siehe Fig. 2).

Fig. 2

Setzt man in der Gleichung von g für $t = 2c$, so erkennt man, dass $(2c|c)$ auf g liegt. Da g und g′ denselben Richtungsvektor haben, ist also $g = g'$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Aufgaben

2 Berechnen Sie die Bildpunkte von $A(-3|5)$, $B(2|11)$, $C(4|6)$ bei der

a) Verschiebung $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, b) Spiegelung an der x_2-Achse,

c) Drehung um O um 180°, d) Drehung um O um 135°,

e) zentrischen Streckung von O aus mit dem Streckfaktor 5,

f) Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen der x_1- und der x_2-Achse.

3 Eine Scherung mit der x_1-Achse als Scherungsachse bildet $P(2|3)$ auf $P'(5|3)$ ab.

a) Konstruieren Sie die Bildpunkte von $Q(4|5)$, $R(-2|8)$ und $S(3|-4)$.

b) Stellen Sie die Abbildungsgleichungen der Scherung auf. Kontrollieren Sie das Ergebnis aus a) durch Rechnung.

4 Bestimmen Sie die Abbildungsgleichungen einer Scherung an der x_2-Achse mit dem Scherungswinkel 45°.

5 Eine Scherung mit der x_2-Achse als Scherungsachse bildet $P(2|0)$ auf $P'(2|5)$ ab.

a) Konstruieren Sie die Bildpunkte von $Q(3|-2)$ und $R(-3|0)$.

b) Stellen Sie die Abbildungsgleichungen der Scherung auf. Kontrollieren Sie das Ergebnis aus a) durch Rechnung.

6 Gegeben ist eine geometrische Abbildung mit den Gleichungen

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + r x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad (r \neq 0).$$

a) Begründen Sie, dass es sich um eine Scherung mit der x_1-Achse als Achse a handelt. Zeigen Sie dazu:

– die x_1-Achse ist eine Fixpunktgerade,

– für jeden Punkt $P(p_1|p_2)$ mit $p_2 \neq 0$ ist die Größe des Winkels $\sphericalangle P'AP$ mit $A(p_1|0)$ unabhängig von den Koordinaten von P.

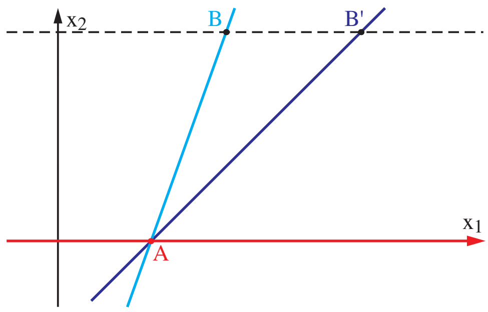


Fig. 1

b) Zeigen Sie: Liegt ein Punkt P auf der Geraden durch $A(a_1|0)$ und $B(b_1|b_2)$, dann liegt sein Bildpunkt P′ auf der Geraden durch A′ = A und B′ (Fig. 1).

7 Durch die Abbildungsgleichungen ist eine Abbildung definiert. Bestimmen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden der Abbildung mit den Gleichungen

a) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1' = 4x_2 \\ x_2' = 9x_1' \end{cases}$

Die in Aufgabe 8e entstehende Kurve wurde in einem anderen Zusammenhang zuerst intensiv von der Mathematikerin MARIA AGNESI untersucht. Sie wird daher als AGNESI-Kurve bezeichnet.
MARIA AGNESI (1718–1799) wurde 1750 zur Professorin für Mathematik an die Universität Bologna berufen. Sie war, soweit heute bekannt, die erste Frau, die als Professorin Vorlesungen zur Mathematik an einer Universität hielt.

8 Eine Abbildung ist durch die Gleichungen $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{1+x_1^2} \\ x_2' = \phantom{\frac{1}{1}} x_2 \end{cases}$ definiert.

a) Welche Punkte der Ebene sind bei dieser Abbildung Bildpunkte?

b) Begründen Sie, dass eine zur x_2-Achse parallele Gerade auf eine zur x_2-Achse parallele Gerade abgebildet wird.

c) Begründen Sie, dass es eine zur x_2-Achse parallele Fixpunktgerade gibt.

d) Bestimmen Sie das Bild einer zur x_1-Achse parallelen Geraden.

e) Skizzieren Sie das Bild der Winkelhalbierenden zwischen der x_1- und der x_2-Achse, indem Sie die Bildpunkte von mindestens 10 Punkten in ein Koordinatensystem zeichnen.

 ISBN 3-12-733120-2

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

2 Affine Abbildungen

1 a) Durch welche Abbildung α wird das Dreieck ABC auf das Dreieck A′B′C′ abgebildet?
b) Welche Abbildung bildet das Dreieck A′B′C′ auf das Dreieck ABC ab?
c) Bestimmen Sie das Bild der Geraden AB.
d) Auf welchen Punkt wird der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ abgebildet?
e) Können sich die Bilder zweier zueinander paralleler Geraden schneiden?

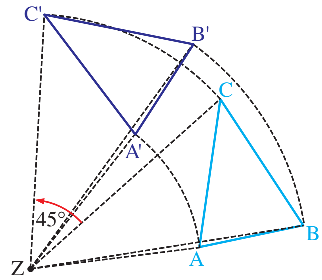


Fig. 1

Viele der geometrischen Abbildungen, die Sie kennen, haben folgende Eigenschaften:
Sie sind **geradentreu**, d. h. sie bilden Geraden auf Geraden ab.
Sie sind **umkehrbar**, d. h. zu jedem Bildpunkt gibt es genau einen Punkt als Urbild.
Sie sind **parallelentreu**, d. h. sie bilden zueinander parallele Geraden auf zueinander parallele Geraden ab.
Sie sind **teilverhältnistreu**, d. h.: Wenn ein Punkt T eine Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis t teilt, so teilt auch sein Bildpunkt T′ die Bildstrecke $\overline{A'B'}$ im Verhältnis t.

„Affinität" bedeutet so viel wie Nähe, Verwandtschaft: Betrachten Sie dazu Fig. 2: Das Bild eines Parallelogramms ist wieder ein Parallelogramm. Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen sind Beispiele für affine Abbildungen.

Geradentreue umkehrbare Abbildungen sind auch parallelentreu und teilverhältnistreu (vgl. Satz 1). Daher legt man fest:

Definition: Eine geradentreue und umkehrbare geometrische Abbildung der Ebene auf sich nennt man eine **affine Abbildung** oder **Affinität**.

Aus der Umkehrbarkeit einer geradentreuen Abbildung folgt ihre Parallelentreue. Hätten nämlich die Bilder zweier (verschiedener) paralleler Geraden einen Schnittpunkt, dann hätte dieser Schnittpunkt zwei Urbilder.

Aufgrund der Parallelentreue bildet jede affine Abbildung Parallelogramme auf Parallelogramme ab. Damit wird der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ auf den Mittelpunkt der Bildstrecke $\overline{A'B'}$ abgebildet (Fig. 2). Man kann (mithilfe einer Intervallschachtelung) hieraus folgern, dass eine affine Abbildung teilverhältnistreu ist.

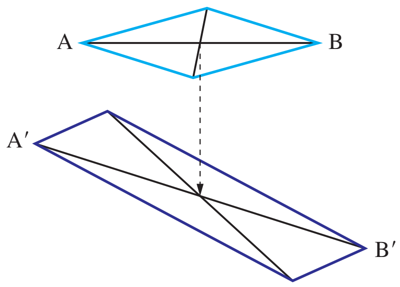


Fig. 2

Satz 1: Affine Abbildungen sind parallelentreu und teilverhältnistreu.

Zentrische Streckungen sind Beispiele für affine Abbildungen, die nicht längentreu sind.
Scherungen sind Beispiele für affine Abbildungen, die nicht winkeltreu sind.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Um eine affine Abbildung zu beschreiben, genügt es, von einem Dreieck ABC das Bilddreieck A′B′C′ anzugeben, und zwar so, dass A auf A′, B auf B′ und C auf C′ abgebildet wird, denn es gilt:

Satz 2: Jede affine Abbildung ist festgelegt durch die Angabe von drei Punkten A, B, C und ihren Bildpunkten A′, B′, C′. Dabei dürfen allerdings die Punkte A, B, C und die Punkte A′, B′, C′ nicht auf einer Geraden liegen.

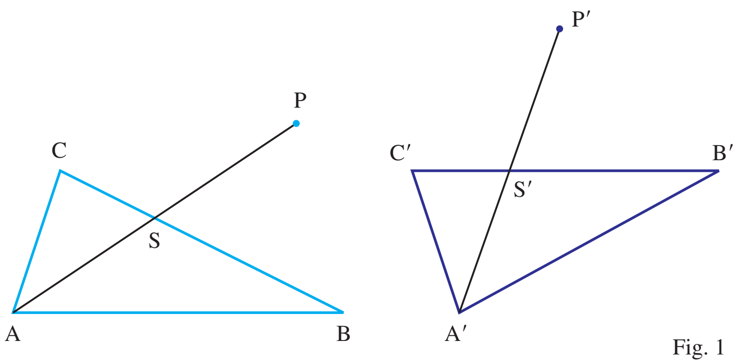


Fig. 1

Beweis von Satz 2:
Voraussetzung: Eine affine Abbildung bildet die Ecken A, B, C eines Dreiecks auf A′, B′ bzw. C′ ab.
Behauptung: Die Abbildung ist damit festgelegt, d. h. für jeden Punkt P ist der Bildpunkt P′ bestimmt.
Beweis: Man wählt eine Ecke des Dreiecks, z. B. A, so, dass die Gerade durch A und P die Gerade durch B und C schneidet (Fig. 1). Der Schnittpunkt S teilt die Strecke $\overline{BC}$ in einem Verhältnis s.
Die affine Abbildung ist teilverhältnistreu. Der Bildpunkt S′ teilt die Bildstrecke $\overline{B'C'}$ ebenfalls im Verhältnis s. Der Punkt P teilt die Strecke $\overline{AS}$ im Verhältnis t. Damit ist der Punkt, der $\overline{A'S'}$ im Verhältnis t teilt, der Bildpunkt P′.

Beispiel: (Konstruktion von Bildpunkten)
Eine affine Abbildung α bildet das Dreieck ABC mit A(1|1), B(10|1), C(4|5) auf das Dreieck A′B′C′ mit A′ = A, B′ = B und C′(7|7) ab.
Konstruieren Sie die Bildpunkte von D(6|2) und E(6|5) und begründen Sie jeweils Ihre Konstruktion.
Lösung:

__Strategie__ zur Konstruktion eines Bildpunktes eines Punktes P: Man betrachtet zwei Geraden durch P, deren Bildgeraden man bestimmen kann. Der Schnittpunkt der Bildgeraden ist der gesuchte Bildpunkt.

Die Punkte A und B sind Fixpunkte; α ist geradentreu und teilverhältnistreu; also ist die Gerade AB eine Fixpunktgerade.
Die Gerade $g_1 = CD$ schneidet die Gerade AB in einem Fixpunkt S. Der Punkt C wird auf C′ abgebildet, also ist die Bildgerade $g_1' = SC'$.
α ist parallelentreu, deshalb wird die Parallele g_2 zu AC durch D, die AB im Fixpunkt T schneidet, auf eine Parallele g_2' zu AC′ durch T abgebildet. Der Schnittpunkt von g_1' und g_2' ist D′.
$h_1 = CE$ ist parallel zu AB, also wird h_1 auf die Parallele h_1' zu AB durch C′ abgebildet.
Die Parallele h_2 zu AC durch E, die AB im Fixpunkt R schneidet, wird auf die Parallele h_2' zu AC′ durch R abgebildet. Der Schnittpunkt von h_1' und h_2' ist E′.

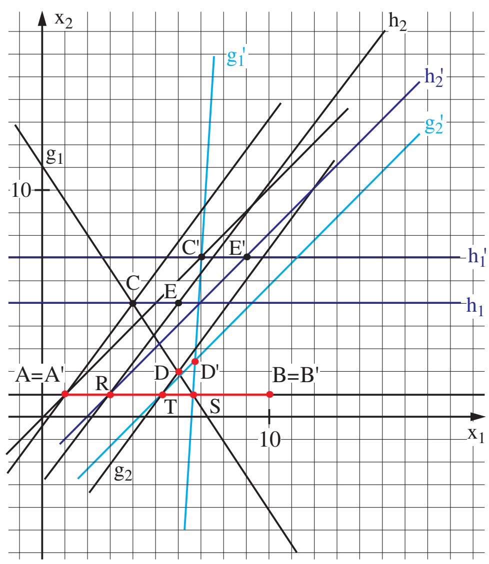


Fig. 2

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Aufgaben

2 Was lässt sich bei einer nicht näher bekannten affinen Abbildung über die Bildfigur der folgenden Figur sagen?

a) Quadrat
b) Rechteck
c) Raute
d) Parallelogramm
e) Trapez
f) Drachen
g) gleichseitiges Dreieck

3 Warum gibt es keine affine Abbildung, die eines der Sechsecke von Fig. 1 auf das andere abbildet?

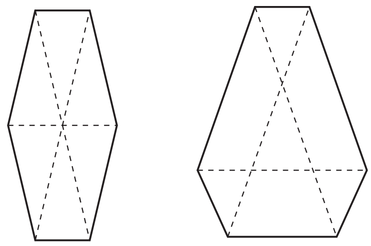


Fig. 1

4 Den folgenden Figuren liegt jeweils eine affine Abbildung zugrunde. Bestimmen Sie die gesuchten Punkte und Geraden. Begründen Sie Ihre Antworten.

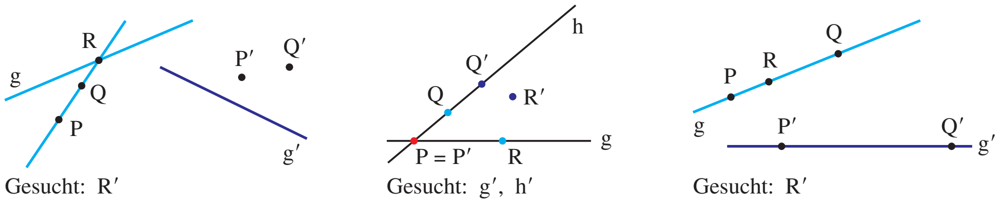


Fig. 2

5 a) Begründen Sie: Eine affine Abbildung bildet den Schwerpunkt eines Dreiecks auf den Schwerpunkt des Bilddreiecks ab.
b) Bildet eine affine Abbildung den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks auf den Umkreismittelpunkt des Bilddreiecks ab?

6 Bei einer affinen Abbildung wird jeder Punkt der x_1-Achse auf sich abgebildet und $P(2|3)$ auf $P'(4|7)$. Konstruieren Sie

a) das Bild der Geraden durch $A(8|0)$ und P
b) das Bild der Geraden durch P und P′
c) den Bildpunkt Q′ von $Q(4|2)$
d) die Bildpunkte von $R(0|4)$ und $S(6|-2)$

Begründen Sie jeweils Ihre Konstruktion.

7 Ersetzen Sie in Aufgabe 6 den Punkt P′ durch $P'(7|3)$. Führen Sie damit die in Aufgabe 6 verlangten Konstruktionen durch und begründen Sie diese.

8 Eine affine Abbildung α bildet $O(0|0)$ auf $O'(2|1)$, $E_1(1|0)$ auf $E_1'(4|2)$ und $E_2(0|1)$ auf $E_2'(3|3)$ ab. Konstruieren Sie das Bild

a) der Punkte $P(1|1)$, $Q\left(\frac{1}{2}\middle|1\right)$ und $R\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$,
b) der Geraden OQ und E_2P,
c) des Schnittpunktes S von OQ und E_2P,
d) der Punkte $T_1\left(\frac{3}{2}\middle|3\right)$ und $T_2(2|4)$,
e) der Punkte $X\left(2\middle|\frac{5}{2}\right)$ und $Y\left(\frac{3}{2}\middle|2\right)$.

9 Eine Abbildung α bildet $P(2|4)$ auf $P'(5|6)$, $Q(6|10)$ auf $Q'(7|12)$, $R(1|5)$ auf $R'(4|5)$ und $S(9|7)$ auf $S'(3|4)$ ab.
Begründen Sie, dass es sich nicht um eine affine Abbildung handeln kann.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

3 Darstellung affiner Abbildungen mithilfe von Matrizen

1 Eine affine Abbildung bildet O auf $O'(1|2)$, $E_1(1|0)$ auf $E_1'(3|1)$ und $E_2(0|1)$ auf $E_2'(5|3)$ ab. Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte von
a) $A(2|0)$; b) $B(1|1)$; c) $C(4|5)$.

Bei einer affinen Abbildung lassen sich die Koordinaten von Bildpunkten einfach berechnen, denn:
Eine affine Abbildung ist parallelentreu, daher wird das (in Fig. 1) blaue Koordinatengitter in ein Parallelogrammgitter (in Fig. 1 lila) abgebildet.
Eine affine Abbildung ist teilverhältnistreu, daher wird der Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ auf den Punkt X′ mit dem Ortsvektor

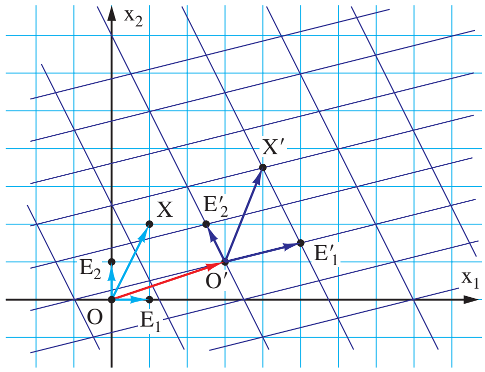


Fig. 1

$$\vec{x'} = \overrightarrow{OO'} + x_1\overrightarrow{O'E_1'} + x_2\overrightarrow{O'E_2'}$$

abgebildet. Mit $\overrightarrow{O'E_1'} = \vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{O'E_2'} = \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OO'} = \vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ erhält man die

Koordinatendarstellung einer affinen Abbildung $\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \\ x_2' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{cases}$.

Eine andere Darstellung erhält man, wenn man die Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 in einer Matrix $A = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}$ zusammenfasst. Man definiert für einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ das

Produkt der Matrix A mit dem Vektor $\vec{x}$ durch $A\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1x_1+b_1x_2\\a_2x_1+b_2x_2\end{pmatrix}$.

Betrachtet man die Zeilen der Matrix A als Vektoren, so ist die k-te Komponente des „Produktvektors“ das Skalarprodukt aus der k-ten Zeile der Matrix und dem Vektor.
Mit diesen Vereinbarungen erhält man die

Man schreibt kurz:
$\alpha: \vec{x'} = A\cdot\vec{x} + \vec{c}$

Matrixdarstellung einer affinen Abbildung:
Jede affine Abbildung α ist durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}$ und einen Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ festgelegt.
Für einen Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ und seinen Bildpunkt X′ mit dem Ortsvektor $\vec{x'} = \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ gilt:

$\vec{x'} = A\cdot\vec{x} + \vec{c}$ bzw. $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$,

bzw. $\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \\ x_2' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{cases}$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beachten Sie:

a) Es gilt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{O'E_1'}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{O'E_2'}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OO'}$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden die „Spaltenvektoren" der Matrix A. Also kann man aus der Matrixdarstellung sofort die Bilder des Ursprungs O und der Punkte $E_1(1|0)$ und $E_2(0|1)$ berechnen. Umgekehrt erhält man die Matrix A und den Vektor $\vec{c}$ aus den Bildern von O, E_1 und E_2.

Im Fall $\vec{c} = \vec{o}$ sagt man auch kurz: Die Spalten der Matrix A sind die „Bilder" der Einheitsvektoren.

b) Ist $\vec{c} = \vec{o}$, so stimmen die Spalten der Matrix A mit den Ortsvektoren der Bilder von $E_1(1|0)$ und $E_2(0|1)$ überein.

Betrachtet wird eine affine Abbildung α mit dem Fixpunkt O und der zugehörigen Matrix A. Wenn für den Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes R gilt: $\vec{r} = a\vec{p} + b\vec{q}$, dann gilt für den Ortsvektor $\vec{r'}$ des Bildpunktes R′: $\vec{r'} = a(A\cdot\vec{p}) + b(A\cdot\vec{q})$.
Dies folgt aus dem

Satz: Gegeben ist eine Matrix A und ein Vektor $\vec{x} = a\vec{v} + b\vec{w}$. Dann gilt:
$$A\cdot\vec{x} = A\cdot(a\vec{v} + b\vec{w}) = a(A\cdot\vec{v}) + b(A\cdot\vec{w}).$$

Beweis:
Man berechnet $A\cdot(a\vec{v} + b\vec{w})$ für $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} A\cdot(a\vec{v} + b\vec{w}) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\left(a\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a v_1 + b w_1 \\ a v_2 + b w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(a v_1 + b w_1) + b_1(a v_2 + b w_2) \\ a_2(a v_1 + b w_1) + b_2(a v_2 + b w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(a_1 v_1 + b_1 v_2) + b(a_1 w_1 + b_1 w_2) \\ a(a_2 v_1 + b_2 v_2) + b(a_2 w_1 + b_2 w_2) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= a(A\cdot\vec{v}) + b(A\cdot\vec{w}). \end{aligned}$$

Im Texteditor kann man Befehle (mit C gekennzeichnet) und erläuternde Texte eingeben:

Fig. 1

Eingabe der C-Zeilen aus Fig. 1 mit Taste [F4] ergibt Fig. 2.

Fig. 2

Fig. 3

Beispiel 1: (Berechnen von Bildpunkten und Bildgeraden)
Gegeben ist die affine Abbildung α: $\vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildes des Punktes $P(3|4)$.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Bildgeraden g′ von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Für den Ortsvektor $\vec{p'}$ des Bildes P′ von P gilt:

$\vec{p'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3 + 3\cdot4 \\ 6\cdot3 - 4\cdot4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ (siehe Fig. 3).

Also $P'(10|10)$.

b) Für die Bildgerade g′ von g und $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ gilt wegen obigem Satz:

$$\begin{aligned} g'\colon \vec{x} &= A\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r\left(A\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot5 + 3\cdot(-3) \\ 6\cdot5 + (-4)\cdot(-3) \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot2 + 3\cdot1 \\ 6\cdot2 + (-4)\cdot1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 42 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 50 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Fig. 3)} \end{aligned}$$

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beispiel 2: (Matrixdarstellung einer affinen Abbildung)
Bestimmen Sie jeweils die Matrixdarstellung der affinen Abbildung α:
a) α bildet $O(0|0)$ auf $O'(2|6)$, $E_1(1|0)$ auf $E_1'(8|3)$ und $E_2(0|1)$ auf $E_2'(-2|7)$ ab.
b) α bildet O auf O, $P\left(-\frac{5}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$ auf $P'(0|2)$ und $Q(2|-1)$ auf $Q'(2|1)$ ab.
Lösung:
a) Es gilt $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O'E_1'} = \overrightarrow{e_1'} - \overrightarrow{o'} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{O'E_2'} = \overrightarrow{e_2'} - \overrightarrow{o'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Also α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
b) Es müssen die Bilder von $E_1(1|0)$ und $E_2(0|1)$ bestimmt werden. Dazu stellt man die zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ als Linearkombination der Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ der Punkte P und Q dar.
Der Ansatz $\overrightarrow{e_1} = a\vec{p} + b\vec{q}$ liefert das Gleichungssystem $\begin{cases} 1 = -\frac{5}{2}a + 2b \\ 0 = \frac{3}{2}a - b \end{cases}$.
Hieraus folgt $a = 2$ und $b = 3$. Aus $\overrightarrow{e_2} = c\vec{p} + d\vec{q}$ folgt $c = 4$ und $d = 5$.
Es gilt also α: $\overrightarrow{e_1'} = 2\overrightarrow{p'} + 3\overrightarrow{q'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ und α: $\overrightarrow{e_2'} = 4\vec{p} + 5\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$.
Die Matrixdarstellung ist daher α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Aufgaben

2 Eine affine Abbildung α bildet $O(0|0)$ auf $O'(-1|2)$, $E_1(1|0)$ auf $E_1'(1|1)$ und $E_2(0|1)$ auf $E_2'(0|3)$ ab.
a) Zeichnen Sie das Gitter, auf welches das Gitter des kartesischen Koordinatensystems abgebildet wird.
b) Bestimmen Sie (an Ihrer Zeichnung) die Bildpunkte von $A(2|1)$, $B(-3|2)$, $C(1|-3)$, $D(2|2)$, $E(3|0)$ und $F(0|2)$ unter α.

3 Bestimmen Sie die Eckpunkte A′, B′, C′ des Bilddreiecks von ABC bei der angegebenen affinen Abbildung. Zeichnen Sie die Dreiecke ABC und A′B′C′.
a) $A(2|4)$, $B(-2|5)$, $C(3|7)$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$
b) $A(-2|6)$, $B(3|3)$, $C(5|-3)$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
c) $A(1|1)$, $B(7|1)$, $C(3|4)$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4 Bestimmen Sie das Bild der Geraden g unter der affinen Abbildung α.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
d) g ist die Gerade durch $P(-2|-1)$ und $Q(1|4)$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
e) g ist die Gerade durch $P(3|1)$ und $Q(-7|6)$; α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

5 Bestimmen Sie jeweils rechnerisch das Bild der Geraden g unter der Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) g ist die x_1-Achse
b) g ist die x_2-Achse
c) g: $x_1 = x_2$
d) g ist die Gerade durch P(2|1) und Q(5|2)

6 Eine affine Abbildung bildet O(0|0) auf O′(2|1), $E_1(1|0)$ auf $E_1'(4|2)$ und $E_2(0|1)$ auf $E_2'(3|3)$ ab. Stellen Sie die Abbildungsgleichungen auf, geben Sie diese auch in Matrixdarstellung an und bestimmen Sie die Bildpunkte von P(1|1), Q(0,1|1) und R(1,5|1,5).

7 Eine affine Abbildung α bildet O(0|0) auf O(0|0), P(2|4) auf P′(4|2) und Q(–2|5) auf Q′(–3|6) ab.
a) Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung für α.
b) Berechnen Sie die Eckpunkte A′, B′, C′, D′ des Bildes des Rechtecks ABCD mit A(1|0), B(5|0), C(5|4) und D(1|4). Zeichnen Sie das Rechteck ABCD und das Bildviereck in ein Koordinatensystem.

8 Bei einer affinen Abbildung wird jeder Punkt der x_1-Achse auf sich abgebildet und P(1|4) auf P′(4|1).
Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung für diese Abbildung.

9 Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung für die Scherung α.
a) Scherungsachse ist die Winkelhalbierende zwischen der x_1- und der x_2-Achse. A(4|0) wird auf A′(6|2) abgebildet.
b) Scherungsachse ist die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Punkt A(0|4) wird auf den Punkt A′(1|3) abgebildet.
c) Scherungsachse ist die Gerade $g\colon \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Bild des Punktes A(0|3) hat die x_1-Koordinate 4.

10 Eine affine Abbildung α hat den Fixpunkt O. Bestimmen Sie jeweils die Matrixdarstellung von α und das Bild des Dreiecks OBC mit O(0|0), B(5|0) und C(0|5). Zeichnen Sie das Dreieck und das Bilddreieck jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem.
a) α bildet P(1|1) auf P′(1|0) und Q(0|1) auf Q′(–1|1) ab.
b) Die Gerade g: $x_1 = x_2$ ist Fixpunktgerade von α und der Punkt P(0|1) wird auf P′(0|2) abgebildet.
c) Die x_1-Gerade ist Fixpunktgerade und der Punkt P(0|1) wird auf P′(2|1) abgebildet.
d) Jeder Punkt $P(p_1|-p_1)$ der Geraden $g\colon \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ wird auf $P'(2p_1|-2p_1)$ abgebildet.

Die Gerade $h\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Fixpunktgerade.

11 a) Welche Punkte werden durch die Abbildungsvorschrift $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\vec{x}$ auf den Ursprung abgebildet?
b) Begründen Sie: Wenn eine durch eine Abbildungsvorschrift $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\vec{x}$ gegebene Abbildung zwei verschiedene Punkte auf den gleichen Punkt abbildet, dann bildet sie mindestens einen vom Ursprung verschiedenen Punkt auf den Ursprung ab.
c) Für welche Werte von a ist die durch $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ definierte Abbildung eine affine Abbildung?

Tipp zu Aufgabe 11b):
Betrachten Sie die Differenz der Ortsvektoren der beiden Punkte, die auf den gleichen Punkt abgebildet werden.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

4 Matrixdarstellungen spezieller Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

1 a) Begründen Sie: Bei einer Drehung um 45° mit dem Ursprung als Drehzentrum wird der Punkt $E_1(1|0)$ auf den Punkt $E_1'\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und der Punkt $E_2(0|1)$ auf den Punkt $E_2'\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ abgebildet.
b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung einer Drehung mit dem Ursprung als Drehzentrum und dem Drehwinkel 45°, 135° und 60°.

Zur Bestimmung der Matrixdarstellung einer affinen Abbildung benötigt man nur die Koordinaten der Bildpunkte der Punkte $O(0|0)$, $E_1(1|0)$ und $E_2(0|1)$. Diese lassen sich für Verschiebungen, zentrische Streckungen von O aus, Drehungen um O und Spiegelungen an Ursprungsgeraden leicht bestimmen.

Zur Erinnerung:
Für jeden Winkel α gilt:
$\sin(270° + \alpha) = \sin(360° + (\alpha - 90°))$
$= \sin(\alpha - 90°)$
$= -\sin(90° - \alpha)$
$= -\cos(\alpha)$
und
$\cos(270° + \alpha)$
$= \cos(90° - \alpha)$
$= \sin(\alpha)$

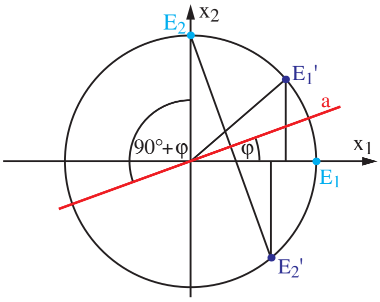


Fig. 1

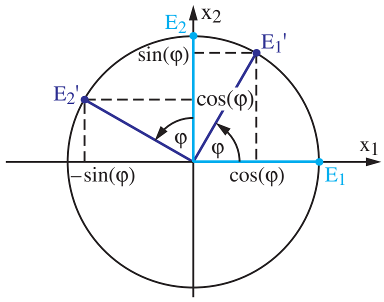


Fig. 2

Fig. 1 verdeutlicht: Bei einer Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, die mit der x-Achse den Winkel φ einschließt, wird der Punkt $E_1(1|0)$ auf den Punkt $E_1'(\cos(2\varphi)|\sin(2\varphi))$ und der Punkt $E_2(0|1)$ auf den Punkt $E_2'(\sin(2\varphi)|-\cos(2\varphi))$ abgebildet.

Fig. 2 verdeutlicht:
Bei einer Drehung um den Ursprung um den Winkel φ wird der Punkt $E_1(1|0)$ auf den Punkt $E_1'(\cos(\varphi)|\sin(\varphi))$ und der Punkt $E_2(0|1)$ auf den Punkt $E_2'(-\sin(\varphi)|\cos(\varphi))$ abgebildet.

Bei einer zentrischen Streckung von $O(0|0)$ aus mit dem Streckfaktor k wird der Punkt $E_1(1|0)$ auf $E_1'(k|0)$ und der Punkt $E_2(0|1)$ auf $E_2'(0|k)$ abgebildet.

Diese Überlegungen liefern die folgenden Matrixdarstellungen:
Ist X ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}$, dann gilt für den Ortsvektor $\vec{x'}$ des Bildpunktes X′ bei einer

Verschiebung um einen Vektor $\vec{v}$

$$\vec{x'} = \vec{x} + \vec{v}$$

zentrischen Streckung von $O(0|0)$ aus mit dem Streckfaktor k:

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Drehung um den Ursprung um einen Winkel φ:

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden a, die mit der x_1-Achse einen Winkel φ einschließt:

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

 ISBN 3-12-733120-2

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beispiel: (Matrixdarstellung einer Spiegelung)
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung einer Spiegelung α an der Geraden $g\colon x_2 = 2x_1$.
Lösung:
Die Matrixdarstellung für die Spiegelung ist: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$. Hierbei ist φ der Winkel zwischen der x_1-Achse und der Spiegelachse.
Die Steigung der Spiegelachse ist 2, daher gilt $\tan(\varphi) = 2$.
Mit der Funktion $\tan^{-1}$ wird daraus φ berechnet, und damit kann die Abbildungsmatrix aufgestellt werden. Eine Näherung erhält man auch ohne tEntwick.

Die Matrixdarstellung ist also $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

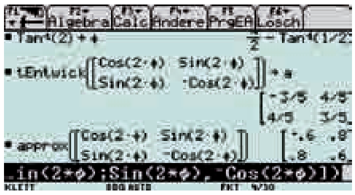


Fig. 1

Aufgaben

2 Bestimmen Sie für das Dreieck ABC mit A(–3|5), B(2|11), C(4|6) die Eckpunkte des Bilddreiecks rechnerisch und zeichnen Sie beide Dreiecke in ein Koordinatensystem bei der
a) Verschiebung um $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$;
b) Drehung um O um 30°;
c) Spiegelung an der Geraden $g\colon \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;
d) zentrischen Streckung von O aus um den Streckfaktor $-\frac{1}{2}$.

3 Konstruieren Sie jeweils das Bild des Dreiecks ABC mit A(1|2), B(5|3), C(3|5) bei einer Spiegelung an der Achse a und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Bestimmung der Bildpunkte, wenn gilt:
a) a ist die x_1-Achse,
b) a ist die x_2-Achse,
c) a ist die Gerade $g\colon x_2 = -x_1$,
d) a ist die Gerade mit $x_2 = 3x_1$.

4 a) Gegeben ist die Matrixdarstellung $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ einer affinen Abbildung.
Weisen Sie nach, dass es sich bei der Abbildung um eine Drehung handelt, und bestimmen Sie den Drehwinkel rechnerisch. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an einer Zeichnung.
b) Gegeben ist ein 2×2-Matrix A. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ stellt genau dann eine Drehung um den Ursprung dar, wenn gilt:
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für geeignete Zahlen a, b und $a^2 + b^2 = 1$.

5 a) Gegeben ist die Matrixdarstellung $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ einer affinen Abbildung.
Weisen Sie nach, dass es sich bei der Abbildung um eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden handelt, und bestimmen Sie die Spiegelachse rechnerisch. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an einer Zeichnung.
b) Gegeben ist eine 2×2-Matrix A. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ stellt genau dann eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden dar, wenn gilt:
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ für geeignete Zahlen a, b und $a^2 + b^2 = 1$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

5 Verketten von affinen Abbildungen, Multiplikation von Matrizen

1 a) Der Punkt P wurde zuerst an der Geraden g gespiegelt, dann wurde sein Bildpunkt P′ an der Geraden h auf den Punkt P″ gespiegelt. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass eine Punktspiegelung um den Schnittpunkt der beiden Geraden den Punkt P ebenfalls auf P″ abbildet.
b) Untersuchen Sie auch den Fall, dass ein Punkt nacheinander an zwei zueinander parallelen Spiegelachsen gespiegelt wird. Durch welche Abbildung kann man diese zwei Spiegelungen ersetzen?

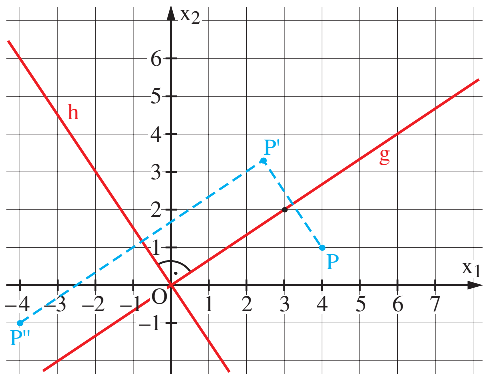


Fig. 1

Das Hintereinanderausführen von Abbildungen nennt man auch **Verketten**. Die Verkettung zweier affiner Abbildungen ist wieder eine affine Abbildung, denn Geradentreue und Umkehrbarkeit bleiben beim Verketten erhalten.

Die Matrixdarstellung einer verketteten Abbildung lässt sich berechnen, wenn man die Matrixdarstellungen der zu verkettenden Abbildungen kennt, denn:

Aus $\alpha\colon \overrightarrow{x''} = A\cdot\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{c_\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{c_\alpha}$ und $\beta\colon \overrightarrow{x'} = B\cdot\vec{x} + \overrightarrow{c_\beta} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \overrightarrow{c_\beta}$ folgt

$\overrightarrow{x''} = A\cdot(B\cdot\vec{x} + \overrightarrow{c_\beta}) + \overrightarrow{c_\alpha} = A\cdot(B\cdot\vec{x}) + A\cdot\overrightarrow{c_\beta} + \overrightarrow{c_\alpha}$.

Für $A\cdot(B\cdot\vec{x})$ ergibt sich:

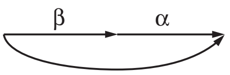
$$A\cdot(B\cdot\vec{x}) = A\cdot\begin{pmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 \\ u_2x_1 + v_2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(u_1x_1 + v_1x_2) + b_1(u_2x_1 + v_2x_2) \\ a_2(u_1x_1 + v_1x_2) + b_2(u_2x_1 + v_2x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1u_1 + b_1u_2)x_1 + (a_1v_1 + b_1v_2)x_2 \\ (a_2u_1 + b_2u_2)x_1 + (a_2v_1 + b_2v_2)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 & a_2v_1 + b_2v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Verkettung nennt man das Produkt der Matrizen A und B.
Unter dem **Produkt** $A\cdot B$ **der Matrizen** $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ versteht man also die Matrix $A\cdot B = \begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 & a_2v_1 + b_2v_2 \end{pmatrix}$.
Mithilfe des Matrizenproduktes kann man also die Abbildungsgleichung der Verkettung affiner Abbildungen (mit dem Fixpunkt O) allgemein angeben:

Merkregel zum Matrizenprodukt:
In der Produktmatrix $A\cdot B$ steht in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das Skalarprodukt der i-ten Zeilen von A und der j-ten Spalte von B.

	$B = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 & a_2v_1 + b_2v_2 \end{pmatrix}$



Verkettung „erst β, dann α“

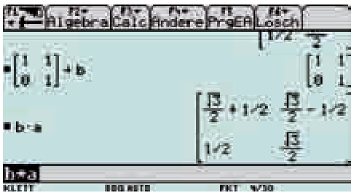
Satz: Sind durch $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A\cdot\vec{x}$ und $\beta\colon \overrightarrow{x'} = B\cdot\vec{x}$ zwei affine Abbildungen gegeben, so gilt für ihre Verkettung in der Reihenfolge „erst β, dann α“:

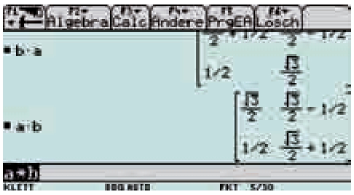
$$\overrightarrow{x'} = A\cdot B\cdot\vec{x}.$$

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beachten Sie:
Das Verketten von affinen Abbildungen bzw. das Multiplizieren von Matrizen ist **nicht kommutativ** (d. h. für zwei Matrizen A und B gilt nicht immer $A \cdot B = B \cdot A$). Dagegen ist das Verketten von Abbildungen assoziativ (d. h. für drei Matrizen A, B, C gilt: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$).

Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Verketten von Abbildungen bzw. die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist.





Beispiel: (Matrixdarstellung einer Verkettung)
Gegeben sind die Drehung α um 30° mit dem Ursprung als Drehzentrum und die Scherung β mit der x_1-Achse als Scherungsachse und dem Scherungswinkel 45°.
Geben Sie die Matrixdarstellung für die verkettete Abbildung an.

a) γ_1: erst α, dann β b) γ_2: erst β, dann α

Lösung:

Abbildungsmatrix zu α ist $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, zu β die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} & 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Also gilt $\gamma_1\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

b) Mit dem Matrixprodukt $A \cdot B$ erhält man $\gamma_2\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Aufgaben

2 Berechnen Sie die Matrizenprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

3 Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der Verkettungen „erst α, dann β“ und „erst β, dann α“.

a) $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$; $\beta\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$; $\beta\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

4 Bestimmen Sie jeweils eine Matrixdarstellung der Abbildungen. Berechnen Sie dann auch die Matrixdarstellung für die zusammengesetzte Abbildung. Beschreiben Sie diese Abbildung geometrisch.

a) Erst um $O(0|0)$ um 45° drehen, dann an $g\colon \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ spiegeln.

b) Erst Streckung von O aus um den Faktor 2, dann Spiegelung an der x_2-Achse.

c) Erst Spiegelung an der x_1-Achse, dann Scherung mit der x_1-Achse als Scherungsachse und dem Scherungswinkel $\alpha = 45°$.

5 Eine affine Abbildung ist festgelegt durch die Bildpunkte der Ecken eines Dreiecks ABC.
Erläutern Sie an Fig. 1, dass man jede affine Abbildung in eine Verschiebung und eine affine Abbildung mit einem Fixpunkt zerlegen kann.

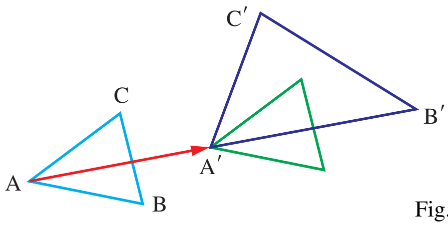


Fig. 1

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

6 Umkehrabbildungen – Determinanten von Abbildungen

1 Gegeben sind die Punkte $O(0|0)$, $E_1(1|0)$, $E_2(0|1)$, $P(4|1)$ und $Q(2|5)$.
a) Geben Sie eine Matrixdarstellung für die affine Abbildung α mit $O' = O$, $E_1' = P$ und $E_2' = Q$ an.
b) Geben Sie eine Matrixdarstellung für die affine Abbildung β mit $O' = O$, $P' = E_1$ und $Q' = E_2$ an.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Abbildungen α und β?

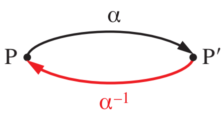


Fig. 1

Eine affine Abbildung α ist umkehrbar. Ordnet α dem Punkt P den Punkt P′ zu, dann ordnet die **Umkehrabbildung** α^{-1} dem Punkt P′ den Punkt P zu.

Satz 1: Die Umkehrabbildung α^{-1} einer affinen Abbildung α ist eine affine Abbildung.

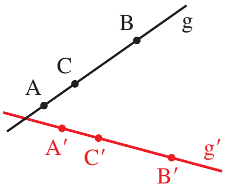


Fig. 2

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass α^{-1} geradentreu ist.
Dazu überlegt man: Wenn g′ eine Gerade durch die Punkte A′ und B′ ist und C′ ein weiterer Punkt auf der Gerade g′ ist, dann liegt das Urbild von C′, also das Bild von C′ unter α^{-1} auf der Geraden AB, denn:
α ist geraden- und teilverhältnistreu. Also bildet α denjenigen Punkt C auf der Geraden AB, der die Strecke $\overline{AB}$ im gleichen Verhältnis teilt wie C′ die Strecke $\overline{A'B'}$, auf C′ ab.

Ist α eine durch $\alpha\colon \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ definierte affine Abbildung mit dem Fixpunkt O, dann ist auch die Umkehrabbildung α^{-1} eine affine Abbildung mit dem Fixpunkt O.
Es gibt also eine Matrix, die man mit A^{-1} bezeichnet, so dass gilt: $\alpha^{-1}\colon \vec{x'} = A^{-1} \cdot \vec{x}$.

determinare (lat.) = abgrenzen

Die Matrix A^{-1} zur Umkehrabbildung α^{-1} wird mit dem CAS berechnet (Fig. 3). Man erkennt, dass die Koeffizienten von A^{-1} alle den Nenner $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$ haben. D kann bei einer affinen Abbildung nicht 0 sein, weil man sonst A^{-1} nicht berechnen könnte. Man nennt D **Determinante** von α bzw. A. Mithilfe von D lässt sich entscheiden, ob eine Abbildung invertierbar ist. Man erhält so:

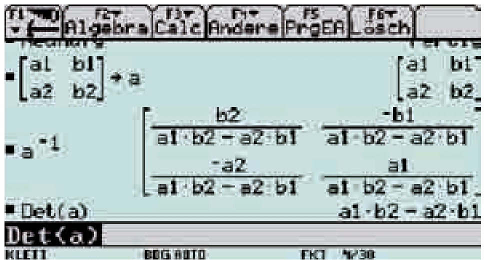


Fig. 3

Gibt es zu einer Matrix A eine inverse Matrix, so sagt man: A ist ***invertierbar****.*

Satz 2: Eine Abbildung $\alpha\colon \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann umkehrbar, wenn die Determinante $D = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ von Null verschieden ist.
Zur Umkehrabbildung α^{-1} gehört dann
die zu A inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{D} & -\frac{b_1}{D} \\ \frac{-a_2}{D} & \frac{a_1}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Sind zwei affine Abbildungen α und β gegeben, so schreibt man für die durch die Verkettung „erst β, dann α“ definierte Abbildung γ (vgl. S. 354) $\gamma = \alpha \circ \beta$.

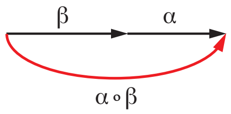


Fig. 1

Bemerkungen:
a) Wenn $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ eine affine Abbildung ist, dann ist $\alpha_1\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ auch eine affine Abbildung; die Matrix A ist also invertierbar.
$\alpha^{-1}\colon \overrightarrow{x'} = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{c}$ ist dann eine Matrixdarstellung für die Umkehrabbildung.
b) Bezeichnet man mit id die „identische Abbildung“, d. h. die Abbildung, die jeden Punkt P auf sich selbst abbildet, so gilt für jede affine Abbildung α:
(1) $\alpha \circ \text{id} = \alpha$ und $\text{id} \circ \alpha = \alpha$ (2) $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}$
Aus diesen Eigenschaften lässt sich folgern, dass es zu je zwei affinen Abbildungen α und β stets genau eine Lösung γ der Gleichung $\alpha \circ \gamma = \beta$ gibt:
Eine Lösung ist auf jeden Fall $\gamma = \alpha^{-1} \circ \beta$.
Gilt $\alpha \circ \gamma_1 = \beta$ und $\alpha \circ \gamma_2 = \beta$, so folgt $\alpha^{-1} \circ (\alpha \circ \gamma_1) = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ \gamma_2)$ und damit $\gamma_1 = \gamma_2$.
Ebenso lässt sich zeigen, dass $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$ die einzige Lösung der Gleichung $\gamma \circ \alpha = \beta$ ist.

Man nennt eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung $*$, die jedem Paar (a, b) von Elementen a und b aus M ein Element $c = a * b$ zuordnet, eine **Gruppe**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gilt das Assoziativgesetz, d. h. $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c aus M.

(2) Es gibt ein „neutrales“ Element e, d. h. es gibt ein e aus M, so dass $a * e = e * a$ für alle a aus M.

(3) Zu jedem a aus M gibt es ein „inverses“ Element a^{-1} aus M, für das gilt: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Die affinen Abbildungen bilden also mit der Verkettung $\circ$ als Verknüpfung eine Gruppe. Ebenso bilden die Kongruenzabbildungen, die Ähnlichkeitsabbildungen, die zentrischen Streckungen mit gleichem Zentrum und die Drehungen mit gleichem Zentrum jeweils zusammen mit der Verkettung als Verknüpfung eine Gruppe.

Die Spiegelungen bilden hingegen mit der Verkettung als Verknüpfung keine Gruppe, denn die Verkettung zweier Spiegelungen ist nicht wieder eine Spiegelung.

Die Determinante einer affinen Abbildung hat eine geometrische Bedeutung:
Fig. 2 verdeutlicht, dass für den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt:
$A = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin(\varphi)|$, wenn φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Man erhält:

$$\begin{aligned} A^2 &= \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} \sin^2(\varphi) \\ &= \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} (1 - \cos^2(\varphi)) \\ &= \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} \left(1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)^2\right) \\ &= \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

Also: $A = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

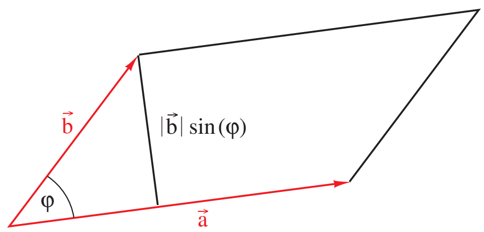


Fig. 2

Aus Satz 3 folgt, dass der Betrag der Determinante einer affinen Abbildung das Verhältnis der Flächeninhalte von Figur und Bildfigur angibt.
Ist der Betrag der Determinante 1, dann ist die affine Abbildung ***flächeninhaltstreu****.*

Hieraus ergibt sich:

Satz 3: Ist A eine 2×2-Matrix, dann ist der Betrag der Determinante von A gleich dem Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelogramms.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beachten Sie:
In Beispiel 1 gilt $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Beispiel 1: (Lösen einer „Matrizengleichung“)
Die affine Abbildung α ist die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden; die Abbildung β die Drehung um O um 30°.
Bestimmen Sie Matrixdarstellungen für affine Abbildungen γ_1 und γ_2, so dass gilt:
$\alpha \circ \gamma_1 = \beta$ und $\gamma_2 \circ \alpha = \beta$.
Lösung:
Wenn A die Matrix zu α, B die Matrix zu β, C_1 die Matrix zu γ_1 und C_2 die Matrix zu γ_2 ist, dann muss gelten: $C_1 = A^{-1}B$ (Fig. 1) und $C_2 = B\,A^{-1}$ (Fig. 2).

Mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ergibt sich $C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Fig. 1

Fig. 2

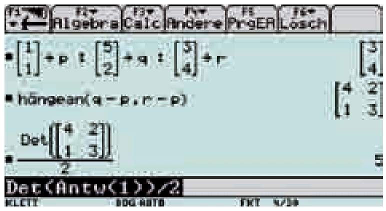


Fig. 3

Die Funktion „hängean“ in Fig. 3 findet man im Menü MATH*-Matrix.*

Beachten Sie, dass bei Fig. 3 p, q, r als Spaltenvektoren einzugeben sind (vgl. S. 349).

Die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ *und* $\overrightarrow{PR}$ *kann man als Ortsvektoren der Bilder der Punkte* $E_1(1|0)$ *und* $E_2(0|1)$ *bei einer affinen Abbildung auffassen.*

Beispiel 2: (Flächenberechnung)
Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR in Fig. 4.
Lösung:
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt des durch die Vektoren $\vec{q} - \vec{p}$ und $\vec{r} - \vec{p}$ aufgespannten Parallelogramms. Es gilt also (Fig. 3):
$A = \frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 2 \cdot 1| = 5.$

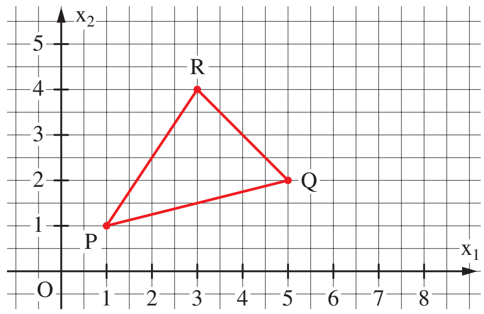


Fig. 4

Aufgaben

2 Berechnen Sie die zu A inverse Matrix.
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3 Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von α^{-1}.
a) $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\alpha: \vec{x}' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ c) $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

4 Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von α^{-1}.
a) $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

5 Es sind gegeben $\alpha\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und $\beta\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen für
a) α^{-1} b) β^{-1} c) $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ d) $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ e) $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$ f) $\beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$

6 Begründen Sie: Für zwei affine Abbildungen α und β gilt: $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

7 Bestimmen Sie das Bild g' der Geraden g und das Urbild der Geraden h' bei der affinen Abbildung $\alpha\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) $g\colon 2x_1 + 7x_2 - 4 = 0$; $h'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h'\colon 2x_1 - x_2 + 3 = 0$

8 a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung für die Umkehrabbildung einer Scherung α mit der Scherungsachse $a\colon x_1 + x_2 = 0$, die $A(0|2)$ auf $A'(3|-1)$ abbildet.
b) Begründen Sie: Die Umkehrabbildung einer Scherung ist eine Scherung.
c) Begründen Sie ohne Rechnung: Der Betrag der Determinante einer Scherung ist 1.

Zu Aufgabe 10:

Aufgabe 10 in Kurzform: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

9 Bestimmen Sie für $\alpha\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und $\beta\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ die Matrixdarstellung der affinen Abbildung γ, so dass gilt:
a) $\alpha \circ \gamma = \beta$ b) $\beta \circ \gamma = \alpha$ c) $\gamma \circ \alpha = \beta$ d) $\gamma \circ \beta = \alpha$
e) $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \beta$ f) $\alpha \circ \gamma \circ \beta = \beta$ g) $\alpha \circ \beta \circ \gamma = \alpha$ h) $\alpha^{-1} \circ \gamma \circ \beta = \alpha$

10 Beweisen Sie mit und ohne CAS, dass die Determinante des Produktes zweier Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Matrizen ist.

Tipp zu den Aufgaben 11 b) und 11 c):
Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 10 und nutzen Sie Gruppeneigenschaften aus.

11 Begründen Sie:
a) Die Determinante einer Drehung ist 1 und die Determinante einer Spiegelung ist –1.
b) Wenn α eine Drehung, β eine Spiegelung und $\alpha \circ \gamma = \beta$, dann ist γ eine Spiegelung.
c) Wenn α eine Spiegelung, β eine Drehung und $\alpha \circ \gamma = \beta$, dann ist γ eine Spiegelung.

12 Bestimmen Sie die Flächeninhalte der Figuren.

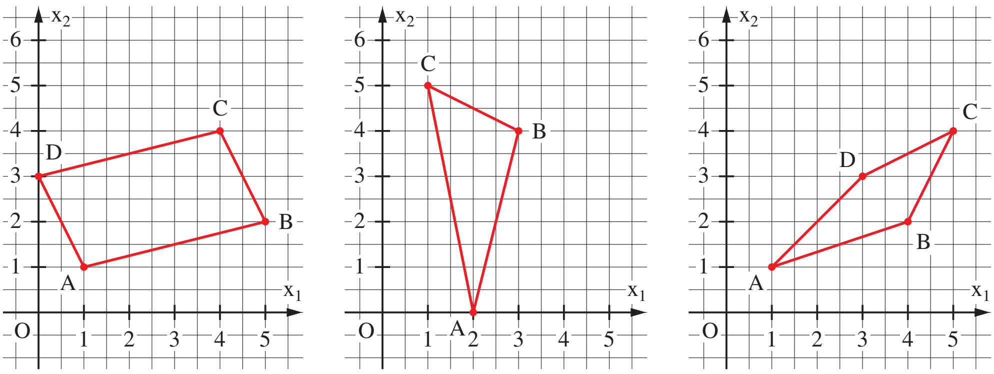


Fig. 1

13 Die affine Abbildung $\alpha\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ bildet das Rechteck ABCD mit $A(3|1)$, $B(7|3)$, $C(6|5)$, $D(2|3)$ auf ein Parallelogramm ab. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

1 Bestimmen Sie für die affine Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ alle Fixgeraden durch den Ursprung.

Fixgeraden spielen bei der Untersuchung von affinen Abbildungen eine wichtige Rolle. Hier werden jetzt affine Abbildungen mit dem Fixpunkt O auf Fixgeraden untersucht.

Gegeben sind eine affine Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$
und eine Ursprungsgerade $g\colon \vec{x} = t\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$.

Ist $g\colon \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ mit $\vec{p} \neq \vec{o}$ Fixgerade einer affinen Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$, so muss auch $\vec{u}$ ein Eigenvektor von α sein. In diesem Fall sind sogar alle zu g parallelen Geraden Fixgeraden von α: Es gibt nämlich eine reelle Zahl t_0, für die gilt: $\overrightarrow{p'} = A \cdot \vec{p} = \vec{p} + t_0\vec{u}$, weil g Fixgerade ist und deswegen P′ auch auf g liegen muss. Zu jeder zu g parallelen Gerade h gibt es eine Zahl r, so dass gilt: $h\colon \vec{x} = r\vec{p} + t\vec{u}$. Aus $A \cdot (r\vec{p} + t\vec{u})$ $= rA \cdot \vec{p} + tA \cdot \vec{u}$ $= r(\vec{p} + t_0\vec{u}) + tA \cdot \vec{u}$ $= r\vec{p} + rt_0\vec{u} + tA\vec{u}$ folgt, dass auch h Fixgerade ist.

Dann ist $A \cdot \vec{u}$ ein Richtungsvektor für die Bildgerade g′. Ist g Fixgerade, so muss $A \cdot \vec{u}$ ein Vielfaches von $\vec{u}$ sein. In diesem Fall gibt es also eine reelle Zahl λ, so dass
$A \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u}$ bzw. $A \cdot \vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{o}$.
Das ist gleichbedeutend mit $\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{cases} (a_1 - \lambda)u_1 + b_1 u_2 = 0 \\ a_2 u_1 + (b_2 - \lambda)u_2 = 0 \end{cases}$.
Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine von $(0|0)$ verschiedene Lösung, wenn $(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$.

Die Abbildung α besitzt also genau dann eine Fixgerade durch O, wenn es eine reelle Zahl λ gibt, mit $(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$.

Definition: Gegeben ist eine Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.
Die Gleichung $(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$ bzw. $\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ heißt **charakteristische Gleichung** von α.
Die Lösungen dieser Gleichung nennt man **Eigenwerte** von α.
Ist λ_0 ein Eigenwert von α und ist $\vec{u} \neq \vec{o}$ ein Vektor mit $A \cdot \vec{u} = \lambda_0 \cdot \vec{u}$, dann nennt man $\vec{u}$ einen **Eigenvektor** von α zum Eigenwert λ_0.

Die Eigenvektoren einer affinen Abbildung mit Fixpunkt O legen die Richtungen aller Fixgeraden fest.

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Eigenvektoren einer Abbildung α mit der Matrix A zum Eigenwert λ, dann gilt dies auch für $\vec{u} + \vec{v}$ und $r\vec{u}$ $(r \neq 0)$,
denn:
$A(\vec{u} + \vec{v}) = A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$
und $A(r\vec{u}) = r(A \cdot \vec{u}) = r(\lambda\vec{u}) = \lambda(r\vec{u})$.
Die Menge der Eigenvektoren einer Abbildung α zu einem Eigenwert λ besteht also entweder aus allen von $\vec{o}$ verschiedenen Vielfachen eines Vektors $\vec{u} \neq \vec{o}$ oder aus allen Vektoren der Ebene.

Die charakteristische Gleichung einer affinen Abbildung ist eine quadratische Gleichung. Quadratische Gleichungen haben keine, eine oder zwei Lösungen. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte. Die Abbildung kann also höchstens zwei verschiedene Eigenwerte besitzen. Dass es affine Abbildungen ohne, mit einem oder mit zwei Eigenwerten gibt, zeigen die Beispiele.

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Beispiel 1: (Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen)
a) Bestimmen Sie mithilfe der charakteristischen Gleichung alle Eigenwerte und Eigenvektoren der affinen Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Fig. 1

b) Welche Fixgeraden hat α?
Lösung:
Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Sie hat genau eine Lösung, nämlich $\lambda = 2$ (Fig. 1).
Mit der Gleichung $A\,x = \lambda\,x$ ergibt sich jeder Vektor der Form $\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \neq 0$ als Eigenvektor, z. B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Fig. 2).

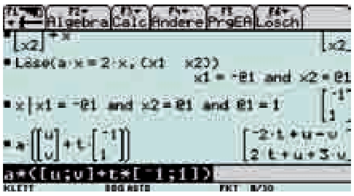


Fig. 2

b) Die Gerade g mit der Gleichung
$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, ist Fixgerade (setze $u = v = 0$ in Fig. 2).

Beachten Sie den Randtext auf Seite 360.

Die Bildgerade einer zu g parallelen Geraden durch den Stützpunkt $P(u\,|\,v)$ verläuft parallel zu g (Fig. 2). Aber der Bildpunkt $P'(u - v\,|\,u + 3v)$ kann nicht auf g liegen, weil der Vektor $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -v \\ u + 2v \end{pmatrix}$ nicht zum Richtungsvektor von g parallel ist, außer wenn $u = -v$ ist. Dann liegt aber P auf g. Also gibt es keine weiteren Fixgeraden.

Beispiel 2: (Untersuchen von Abbildungen auf Fixgeraden durch den Ursprung)
Bestimmen Sie jeweils alle Fixgeraden durch den Ursprung bei der Abbildung $\alpha\colon \overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fig. 3

Lösung:

Die Funktionen EigWert *und* EigVek *findet man im Menü* MATH*-Matrix.*

Das CAS ermöglicht, Eigenwerte und Eigenvektoren unmittelbar zu berechnen. Bei der Berechnung der Eigenvektoren wird eine Matrix ausgegeben; jede Spalte dieser Matrix liefert einen Eigenvektor mit Betrag 1. Man erkennt damit:

Fig. 4

a) (Fig. 3) Eigenwerte sind 2 bzw. –1; Eigenvektoren dazu sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, die hier als Vielfache des Rechnerergebnisses mit ganzzahligen Koeffizienten angegeben sind. Die beiden Geraden $g\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind daher die einzigen Fixgeraden durch den Ursprung.
b) (Fig. 4) Es gibt nur den Eigenwert 5 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Einzige Fixgerade durch den Ursprung ist daher die Gerade $g\colon x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fig. 5

c) (Fig. 5) Es gibt nur den Eigenwert 4, aber alle von $\vec{o}$ verschiedenen Vektoren der Ebene sind Eigenvektoren. Daher sind alle Geraden durch den Ursprung Fixgeraden.

Die Fehlermeldung bei Fig. 6 erscheint, weil die charakteristische Gleichung keine Lösung hat.

d) (Fig. 6) Da es keine Eigenwerte gibt, hat α auch keine Fixgeraden.

Fig. 6

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Aufgaben

2 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 Bestimmen Sie die Geraden, die bei einer affinen Abbildung mit Matrix A und Fixpunkt O parallel zu ihrer Bildgeraden verlaufen.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

4 Die affine Abbildung $\alpha\colon \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ hat nur eine Fixgerade g.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von g.
b) Untersuchen Sie, ob g auch eine Fixpunktgerade ist.

5 Bestimmen Sie jeweils alle Fixgeraden durch den Ursprung bei der Abbildung α.

a) $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ c) $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

6 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der affinen Abbildung:

a) Spiegelung an der x_1-Achse,
b) Spiegelung an $a\colon x_2 = x_1$,
c) Drehung um O um 90°,
d) Zentrische Streckung von O aus mit Streckfaktor $k = 2$,
e) Scherung mit der Achse $a\colon x_2 = 0$, der Punkt $P(0|3)$ wird auf $P'(4|3)$ abgebildet.

7 Geben Sie eine Matrix an,

a) welche die Eigenwerte 1 und 2 hat
b) die nur den Eigenwert 2 hat
c) die nur den Eigenwert 2 hat, aber bei der nicht jeder von $\vec{o}$ verschiedene Vektor ein Eigenvektor ist
d) die keine Eigenwerte hat.

8 Eine affine Abbildung hat die Fixgeraden $g\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P(1|-1)$ wird auf $P'(-2|2)$ und $Q(1|2)$ wird auf $Q'(3|6)$ abgebildet.

a) Welche Eigenwerte und welche Eigenvektoren besitzt die Abbildung?
b) Stellen Sie die Matrixgleichung der Abbildung auf.

9 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist durch $\alpha_t\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & t \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ eine affine Abbildung definiert.

a) Untersuchen Sie die Anzahl der Eigenwerte in Abhängigkeit von t.
b) Für welchen Wert von t hat α_t den Eigenwert -1?
c) Gibt es einen Wert für t, so dass α_t eine Spiegelung ist?

10 Zeigen Sie:

a) Hat die affine Abbildung α den Eigenwert λ, dann hat die Umkehrabbildung α^{-1} den Eigenwert λ^{-1}.
b) Haben die Abbildungen α und β den Eigenvektor $\vec{v}$, dann haben auch die Abbildungen $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$ den Eigenvektor $\vec{v}$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

8 Parallelprojektionen

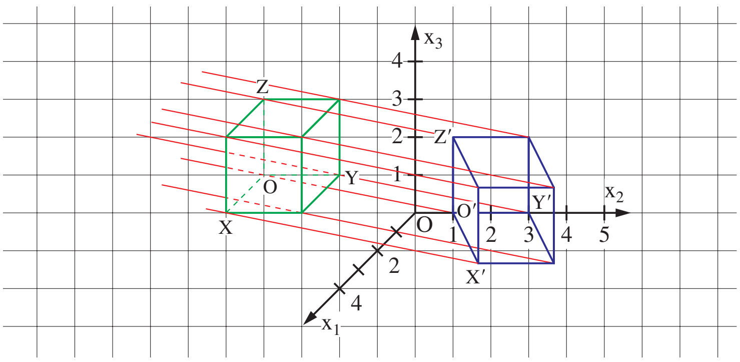


Fig. 1

1 Fig. 1 zeigt das Schattenbild eines Kantenmodells eines Würfels mit den Eckpunkten $O(6|-1|4)$, $X(8|-1|4)$, $Y(6|1|4)$ und $Z(6|-1|6)$ in der x_2x_3-Ebene.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schattenpunkte, wenn paralleles Licht in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ einfällt. Geben Sie Abbildungsgleichungen an, die für jeden Punkt P des Raumes den Schnittpunkt der Geraden durch P in Richtung von $\vec{v}$ mit der x_2x_3-Ebene liefern.

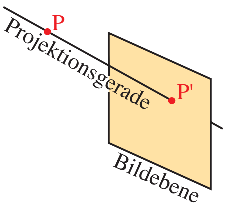


Fig. 2

Eine **Projektion** ist eine Abbildung des Raumes in eine Ebene E, die so genannte **Projektionsebene**. Die Gerade zwischen einem Punkt und seinem Bildpunkt bei einer Projektion nennt man eine **Projektionsgerade**.
Wenn bei einer Projektion alle Projektionsgeraden zueinander parallel sind, spricht man von einer **Parallelprojektion**. Ist $\vec{v}$ ein Richtungsvektor einer Projektionsgeraden bei einer Parallelprojektion, so wird jedem Punkt P des Raumes der Schnittpunkt der Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ durch P und der Ebene E als Bildpunkt zugeordnet.

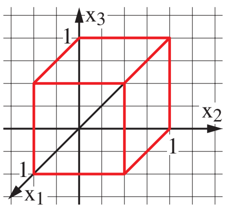


Fig. 3

Fig. 3 zeigt das Bild des Einheitswürfels unter einer Parallelprojektion in die x_2x_3-Ebene mit der durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gegebenen Projektionsrichtung. Das Bild E_1' des Punktes $E_1(1|0|0)$ erhält man durch Lösen der Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Man erhält $t = -1$, $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$; also $E_1'\left(0\middle|-\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)$. Die Punkte $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ werden auf sich selbst abgebildet.
Das Bild eines Punktes P mit $\vec{p} = p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}$ erhält man nun, indem man die Gleichung $\vec{p} + t\vec{v} = x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ löst. Man erhält $t = -p_1$, $x_2 = p_2 - \frac{1}{2}p_1$, $x_3 = p_3 - \frac{1}{2}p_1$.
Für den Bildpunkt P′ gilt also

$$\vec{p'} = \left(p_2 - \tfrac{1}{2}p_1\right)\vec{e_2} + \left(p_3 - \tfrac{1}{2}p_1\right)\vec{e_3} = p_1\left(-\tfrac{1}{2}\vec{e_2} - \tfrac{1}{2}\vec{e_3}\right) + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3} = p_1\vec{e_1'} + p_2\vec{e_2'} + p_3\vec{e_3'}.$$

Hieraus folgt, dass sich die Projektion durch die Matrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben lässt.

*Diese häufig bei räumlichen Darstellungen (auch in diesem Buch) benutzte Projektion nennt man eine **Kavalierprojektion**.*

Diese Feststellung lässt sich verallgemeinern. Es gilt der

Satz: Eine Parallelprojektion in eine Ebene E durch den Ursprung O lässt sich durch eine 3×3-Matrix A beschreiben. Die Spalten der Matrix sind die Ortsvektoren der Bilder der Punkte $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$.

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Dem praktischen Zeichnen liegt eine axonometrische Abbildung zugrunde, wie z. B. das folgende Zitat aus einem älteren Buch über darstellende Geometrie zeigt.
*„**Zeichenregel für Kavalierprojektion:***
Alle Breiten und Höhen werden in wahrer Größe, alle Tiefen unter 45° nach hinten fliehend um die Hälfte verkürzt gezeichnet.“

Ein Satz des Mathematikers POHLKE besagt, dass man jedes Bild eines räumlichen Gegenstandes, das man durch eine axonometrische Abbildung erhalten kann, auch durch eine Parallelprojektion erhalten kann.

Statt Abbildungen des Raumes in sich zu betrachten, kann man Abbildungen des Raumes in die Ebene betrachten, um räumliche Darstellungen zu erhalten. Man gibt dann häufig die Bilder der Punkte $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ vor und verlangt, dass sich die Abbildung mithilfe einer 2×3-Matrix beschreiben lässt. Eine solche Abbildung nennt man eine **axonometrische Abbildung**.

Beim technischen Zeichnen benutzt man häufig folgende Darstellung:
$E_1(1|0|0)$ wird auf $F_1\left(\frac{1}{2}\cos(41{,}5°)\middle|\frac{1}{2}\sin(41{,}5°)\right)$,
$E_2(0|1|0)$ auf $F_2(\cos(173°)|\sin(173°))$ und
$E_3(0|0|1)$ auf $F_3(0|1)$ abgebildet.
Als zugehörige Abbildungsmatrix A ergibt sich also $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(41{,}5°) & \cos(173°) & 0 \\ \frac{1}{2}\sin(41{,}5°) & \sin(173°) & 1 \end{pmatrix}$.

Die Strecke $\overline{OE_1}$ erscheint also unter einem Winkel von 41,5° zur x_1-Achse um den Faktor 0,5 verkürzt; die Strecke $\overline{OE_2}$ unter einem Winkel von 173° zur x_1-Achse unverkürzt, und die Strecke $\overline{OE_3}$ wird unverkürzt auf die x_2-Achse abgebildet.

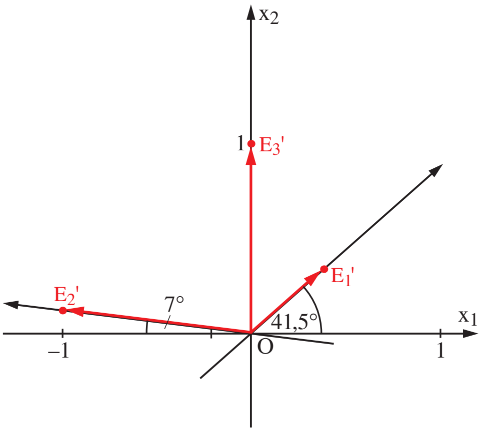


Fig. 1

Beispiel 1: (Projektionsebene und Projektionsrichtung sind gegeben)
Betrachtet wird eine Parallelprojektion in die x_2x_3-Ebene mit der durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$ gegebenen Projektionsrichtung.
a) Bestimmen Sie die Projektionsmatrix P.
b) Bestimmen Sie die Matrix A für eine axonometrische Darstellung.
c) Der Einheitswürfel mit den Ecken $O(0|0|0)$, $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ wird abgebildet. Zeichnen Sie das Bild.
Lösung:
a) Die Bilder der Punkte $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ liegen fest. Es muss das Bild von $E_1(1|0|0)$ als Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \vec{e_1} + t\vec{v}$ mit der x_2x_3-Ebene bestimmt werden. Der Ansatz
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liefert:
$t = 1,\ x_2 = -0{,}5$ und $x_3 = -0{,}4$.
Man erhält: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Als Matrix A ergibt sich $A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Um das Bild zeichnen zu können, benötigt man z. B. noch das Bild des Punktes $H(1|1|0)$. Man berechnet
$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$.
Die fehlenden Bildpunkte erhält man, indem man die Bildpunkte von E_1, E_2 und H in die Zeichenebene um $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschiebt.

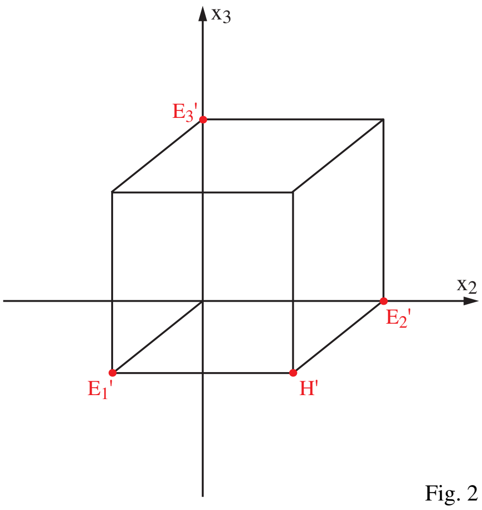


Fig. 2

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

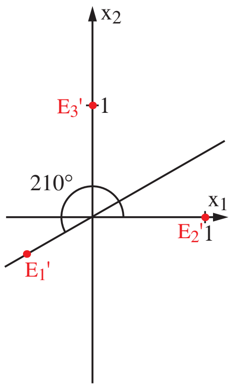


Fig. 1

Beispiel 2: (Bestimmung von Projektionsmatrix und Projektionsrichtung; Bildebene und Bild der x_1-Achse sind vorgegeben)
Bei einer Parallelprojektion in die x_2x_3-Ebene erscheint die x_1-Achse unter einem Winkel von 210° zur x_2-Achse und um den Faktor $\frac{2}{3}$ verkürzt.
a) Bestimmen Sie eine Projektionsmatrix P.
b) Bestimmen Sie die Projektionsrichtung.
Lösung:
a) Der Punkt $E_1(1|0|0)$ wird auf $E_1'\left(0\middle|\frac{2}{3}\cos(210°)\middle|\frac{2}{3}\sin(210°)\right) = \left(0\middle|-\frac{\sqrt{3}}{3}\middle|-\frac{1}{3}\right)$ abgebildet; die Punkte $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ werden auf sich selbst abgebildet. Für die Projektionsmatrix P erhält man somit: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Eine Gerade in Projektionsrichtung durch den Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet; ihr Richtungsvektor muss also auf $\vec{o}$ abgebildet werden. Der Ansatz $P \cdot \vec{v} = \vec{o}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ führt zu dem Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}v_1 + v_2 = 0 \\ -\frac{1}{3}v_1 + v_3 = 0 \end{array}\right.$. Eine Lösung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

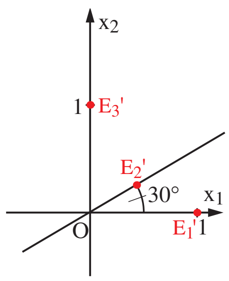


Fig. 2

Beispiel 3: (Bestimmung der Abbildungsmatrix für eine axonometrische Darstellung)
Fig. 2 zeigt die Bilder der Punkte $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ bei einer axonometrischen Abbildung. $\overline{OE_1'}$ und $\overline{OE_3'}$ haben die Länge 1, $\overline{OE_2'}$ hat die Länge 0,5.
Bestimmen Sie die Projektionsmatrix.
Lösung:
Es ist $E_1'(1|0)$, $E_3'(0|1)$ und $E_2'\left(\frac{1}{2}\cos(30°)\middle|\frac{1}{2}\sin(30°)\right)$; also $E_2'\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\middle|\frac{1}{4}\right)$.
Für die Projektionsmatrix A erhält man $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgaben

2 Gegeben ist jeweils eine Projektionsebene E und eine durch einen Richtungsvektor $\vec{v}$ gegebene Projektionsrichtung. Ermitteln Sie die Projektionsmatrix und zeichnen Sie jeweils das Bild des Einheitswürfels mit den Eckpunkten $E_0(0|0|0)$, $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ in der Projektionsebene E.
a) E ist die x_2x_3-Ebene; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) E ist die x_1x_3-Ebene; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Fig. 3 zeigt das Bild eines Turms. Berechnen Sie die Bilder der Eckpunkte und zeichnen Sie das Bild unter der angegebenen Projektion.
a) Projektionsebene ist die x_2x_3-Ebene. Die Projektionsrichtung ist senkrecht zur Projektionsebene.
b) Projektionsebene ist die x_1x_2-Ebene. Die Projektionsrichtung ist dadurch gegeben, dass der Punkt $P(1|1|1)$ auf O abgebildet wird.

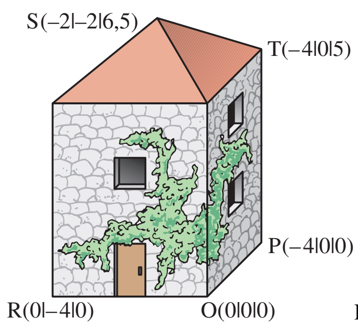


Fig. 3

 ISBN 3-12-733120-2
aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Fig. 1

4 Bei Bildstadtplänen wird häufig die Projektion in die x_1x_2-Ebene mit der durch

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ gegebenen Projektionsrichtung

verwendet.

a) Aufgrund der Anschaulichkeit ist es üblich, das Bild der x_3-Achse auf dem Zeichenblatt „senkrecht“ zu zeichnen. Wie müssen dann die Bilder der beiden anderen Achsen eingezeichnet werden?

b) Begründen Sie, dass man einer so hergestellten Zeichnung viele Längen maßstabsgetreu entnehmen kann.

c) Zeichnen Sie das Bild einer „Rampe“ (Fig. 2) mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F mithilfe der in dieser Aufgabe gesuchten Projektion.

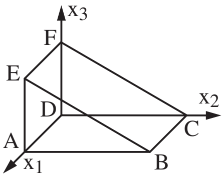


Fig. 2

5 In den Fig. 3 bis Fig. 5 stellen die Punkte E_1', E_2', E_3' jeweils die Bilder der Punkte $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ dar. Bestimmen Sie jeweils die Matrix einer axonometrischen Abbildung, die die Punkte wie angegeben abbildet. Zeichnen Sie jeweils das Bild der Rampe aus Aufgabe 4.

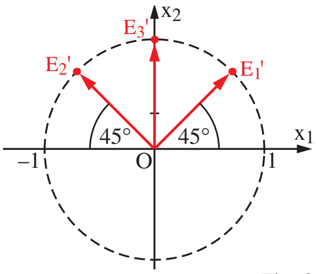


Fig. 3

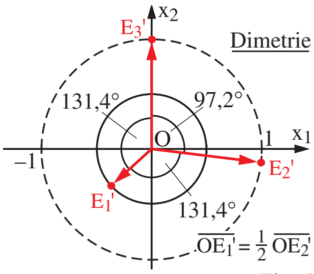


Fig. 4

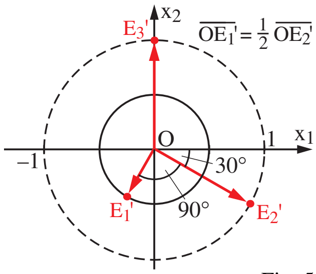


Fig. 5

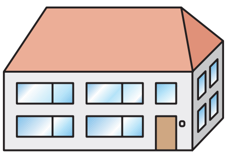


Fig. 6

6 Ein quaderförmiges Haus mit Walmdach (Fig. 6) hat eine Dachfirsthöhe über Grund von 12 m. Die Länge des symmetrisch verlaufenden Firsts ist 7 m. Der quaderförmige Hauskörper ist 13 m lang, 6 m breit und 8 m hoch. Das Koordinatensystem sei so gelegt, dass die Eckpunkte der Grundfläche die Koordinaten $(0|0|0)$, $(13|0|0)$, $(13|6|0)$ und $(0|6|0)$ haben.

a) Zeichnen Sie das Bild des Hauses unter der Projektion aus Beispiel 1.

b) Zeichnen Sie das Bild unter den axonometrischen Abbildungen aus Aufgabe 5.

7 Gegeben ist die Ebene E_1: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen.

b) Unter den Spurgeraden einer Ebene versteht man die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen. Veranschaulichen Sie die Ebene E_1 durch Zeichnen der Bilder der Spurgeraden unter den Projektionen der Aufgabe 3.

c) Zeichnen Sie jeweils auch das Bild einer zur Ebene E_1 senkrechten Ursprungsgerade ein.

d) Die Ebene E_2 sei die zu E_1 parallele Ebene durch den Ursprung. Es wird senkrecht auf E_2 projiziert. Berechnen Sie die Bilder der Spurgeraden von E_1 unter dieser Projektion.

e) Berechnen Sie die Längen der Bilder von $\overline{OE_1}$, $\overline{OE_2}$ und $\overline{OE_3}$ bei der Projektion aus d).

f) Berechnen Sie die Winkel, die die Bilder dieser Strecken miteinander einschließen.

g) Geben Sie eine axonometrische Abbildung an, die das gleiche Bild liefert wie die Parallelprojektion aus d).

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Rückblick

Eine Abbildung, die jedem Punkt der Ebene einen Bildpunkt zuordnet, ist eine **geometrische Abbildung**. Punkte, die bei einer geometrischen Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, nennt man **Fixpunkte**. Geraden, die auf sich selbst abgebildet werden, heißen **Fixgeraden**. Eine Gerade, die aus Fixpunkten einer Abbildung besteht, nennt man eine **Fixpunktgerade**.

Scherungen sind Beispiele für affine Abbildungen.
Eine Scherung an der x_1-Achse mit dem Scherungswinkel 45° hat die x_1-Achse als Fixpunktgerade.
Für einen Punkt P, der nicht auf der x_1-Achse liegt, gilt:
(1) PP′ ist parallel zur x_1-Achse.
(2) Ist A der Fußpunkt des Lotes von P auf die x_1-Achse, so ist $\sphericalangle P'AP = 45°$.

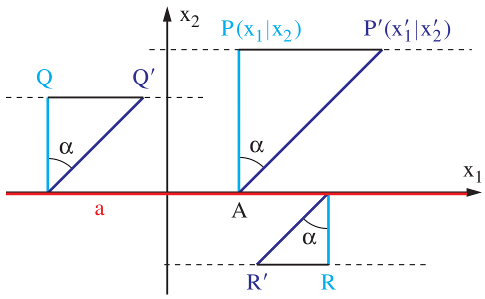


Fig. 1

$E_1(1|0)$ ist Fixpunkt; das Bild von $E_2(0|1)$ ist $E_2'(1|1)$; die Matrixdarstellung der Scherung ist $\vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Affine Abbildungen
Eine geradentreue und umkehrbare geometrische Abbildung der Ebene auf sich selbst nennt man eine **affine Abbildung** oder **Affinität**.
Affine Abbildungen sind parallelentreu und teilverhältnistreu.
Jede affine Abbildung ist festgelegt durch die Angabe von drei Punkten A, B, C und ihren Bildpunkten A′, B′, C′. Dabei dürfen allerdings die drei Punkte A, B, C und die Punkte A′, B′, C′ nicht auf einer Geraden liegen.

Matrizen und affine Abbildungen
Das Produkt der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist definiert durch $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{pmatrix}$.
Jede affine Abbildung α ist durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ und einen Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ festgelegt. Für einen Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und seinen Bildpunkt X′ mit $\vec{x'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ gilt:
$\vec{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
Sind $\alpha\colon \vec{x'} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und $\beta\colon \vec{x'} = B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ affine Abbildungen, so gilt:
Die Matrixdarstellung der Umkehrabbildung α^{-1} ist $\alpha^{-1}\colon \vec{x'} = A^{-1} \cdot \vec{x}$ mit $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ und $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$.
D heißt die **Determinante von A**.
Zur Verkettung $\alpha \circ \beta$ („erst β, dann α“) gehört das **Produkt** $A \cdot B$ **der Matrizen** mit $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 u_1 + b_1 u_2 & a_1 v_1 + b_1 v_2 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 & a_2 v_1 + b_2 v_2 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren, Eigenwerte und charakteristische Gleichung
Ist $\alpha\colon \vec{x'} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ eine affine Abbildung, so heißt ein Vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$ ein **Eigenvektor** von α, wenn es eine reelle Zahl λ mit $A \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}$ gibt. λ ist in diesem Fall ein **Eigenwert** von α.
Eigenwerte sind die Lösungen der **charakteristischen Gleichung** $(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$.

Eigenvektoren geben die Richtungen von Fixgeraden an.

Die affine Abbildung $\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ *hat die charakteristische Gleichung*
$(7 - \lambda) \cdot (8 - \lambda) - (-2)(-1) = 0$.
Die Lösungen $\lambda_1 = 6$ *und* $\lambda_2 = 9$ *sind die Eigenwerte von* α.
Eigenvektoren z. B. zum Eigenwert 6 findet man mit dem Ansatz:
$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 - x_2 = 6x_1 \\ -2x_1 + 8x_2 = 6x_2 \end{array} \right.$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$
Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 6 sind also die Vektoren
$t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *mit* $t \neq 0$.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

Üben und Wiederholen ohne Hilfsmittel

1 Eine geometrische Abbildung bildet A(2|2) auf A′(2|0), B(3|1) auf B′(4|0), C(4|4) auf C′(0|4) und D(6|2) auf D′(6|6) ab. Begründen Sie, dass es sich nicht um eine affine Abbildung handeln kann.

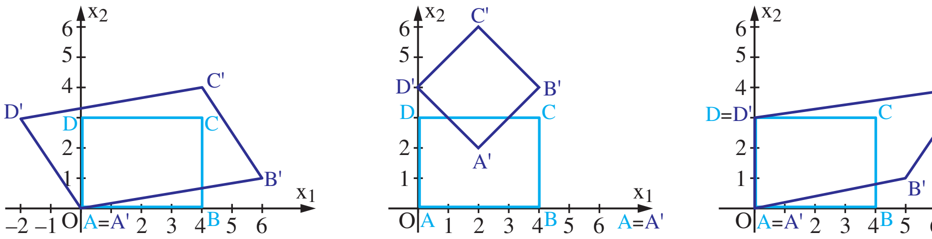


Fig. 1

2 Fig. 1 zeigt die Bilder des Rechtecks mit den Eckpunkten A(0|0), B(4|0), C(4|3), D(0|3) bei geometrischen Abbildungen.

a) Bei welchen Abbildungen kann es sich um affine Abbildungen handeln? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

b) Geben Sie in den Fällen, bei denen es sich um affine Abbildungen handelt, Abbildungsgleichungen an.

3 a) Geben Sie die Matrixdarstellung der Punktspiegelung σ_A am Punkt A(3|4) an.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Verkettung von σ_A und der Punktspiegelung σ_B am Punkt B(0|0) eine Verschiebung ist.

4 Gegeben ist die Spiegelung S an der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Konstruieren Sie das Bild P′ des Punktes P(4|0) bei dieser Spiegelung.

b) Stellen Sie eine Matrixdarstellung für diese Abbildung auf.

c) Berechnen Sie das Bild von P und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus a).

5 Die Figur zeigt das Bild einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Höhe 4 unter der Parallelprojektion in die x_2x_3-Ebene mit der durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ gegebenen Projektionsrichtung.

a) Bestimmen Sie das Bild der Pyramide bei der durch $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegebenen Projektionsrichtung in die x_1x_2-Ebene und zeichnen Sie das Bild der Pyramide unter dieser Projektion.

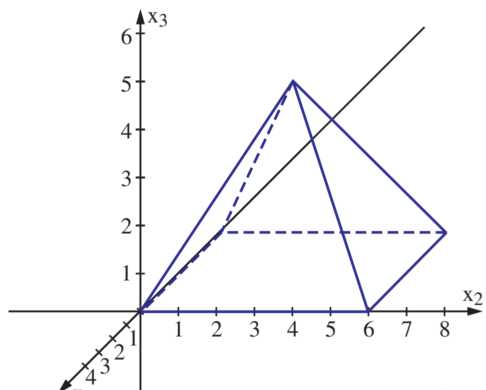


Fig. 2

b) Bestimmen Sie das Bild der Pyramide unter einer Parallelprojektion in die Ebene $E\colon x_1 + x_2 + x_3 = 0$, wenn die Projektionsrichtung senkrecht zu E ist.

6 Gegeben ist die affine Abbildung $\alpha\colon \vec{x'} = A \cdot \vec{x}$. Zeigen Sie:

a) Wenn $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$, dann hat α keinen Eigenwert.

b) Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann hat α zwei verschiedene Eigenwerte.

c) Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, dann besitzt α ein Paar zueinander orthogonaler Eigenvektoren.

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B

1 Gegeben ist die affine Abbildung α: $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A′, B′, C′ des Bilddreiecks von ABC mit A(1|1), B(3|5), C(7|–1).

b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie das Bild der Geraden durch P(3|4) und Q(–2|5).

d) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von α.

e) Zeigen Sie, dass die Geraden g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Fixgeraden von α sind.

2 Eine affine Abbildung bildet das Dreieck ABC auf das Dreieck A′B′C′ ab. Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung der Abbildung.

a) A(0|0), A′(0|0), B(1|2), B′(5|4), C(–1|2), C′(1|0)

b) A(0|0), A′(1|2), B(2|0), B′(1|4), C(0|2), C′(3|6)

c) A(2|0), A′(1|2), B(0|2), B′(3|4), C(4|3), C′(4|0)

3 Geben Sie jeweils eine Matrixdarstellung für die Abbildung α mit dem Fixpunkt O an.

a) α ist die Drehung um den Ursprung um 120°.

b) α ist die Spiegelung an der Geraden g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) α ist eine Scherung mit der Geraden g: $x_1 = x_2$ als Scherungsachse, die den Punkt P(0|5) auf P′(2|7) abbildet.

4 Gegeben sind die affinen Abbildungen

α: $\overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und β: $\overrightarrow{x'} = B \cdot \vec{x}$ mit $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Typ der affinen Abbildungen α und β. Beschreiben Sie die Abbildungen möglichst genau.

b) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Bestimmen Sie den Typ der durch die Verkettungen „erst β, dann α“ und „erst α, dann β“ beschriebenen affinen Abbildungen.

5 Eine Verkettung einer Drehung und einer zentrischen Streckung nennt man Drehstreckung. Geben Sie die Matrixdarstellung einer Drehstreckung mit dem Dreh- und Streckzentrum S(1|2), dem Streckfaktor 2 und dem Drehwinkel 45° an.

6 Durch die affine Abbildung α mit der Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ wird der Punkt P auf den Punkt P′ mit $\overrightarrow{p'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ abgebildet.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

b) Begründen Sie, dass es zu jedem Punkt R′ der Ebene einen Urbildpunkt R gibt, der durch α auf R′ abgebildet wird.

c) Begründen Sie, dass die Abbildung β, die jedem Punkt seinen Urbildpunkt zuordnet, affin ist, und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix B von β.

d) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

7 Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der affinen Abbildung und geben Sie ihre Fixgeraden durch den Ursprung an.

a) $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ c) $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

aus Lambacher Schweizer Oberstufe
mit CAS-Einsatz, Ausgabe B