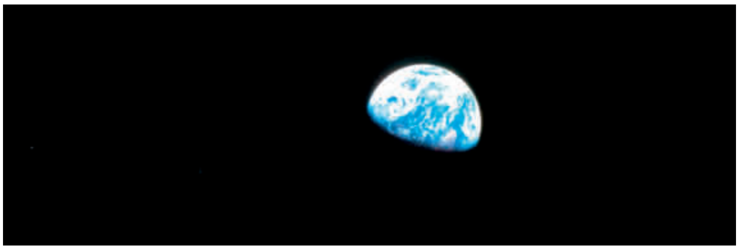
1 Exponentialfunktionen



Ein Blatt Papier ist ungefähr 0,1 mm dick. Faltet man das Blatt einmal, so ist es doppelt so dick. Wie oft müsste man es theoretisch falten, damit die Dicke der Entfernung von der Erde zum Mond entspräche (≈ 384 000 km)?

Explizite Darstellung:
$B(n) = B(0) \cdot a^n$ mit $a = 1 + p$.

$p = 80\,\%$
$a = 1 + 0,8 = 1,8$

Mithilfe der Mathematik kann man bestimmte Wachstumsformen beschreiben. Gilt bei einem Bestand B für jeden Zeitschritt die rekursive Darstellung $B(n + 1) = a \cdot B(n)$ mit einer festen Zahl a, so spricht man von exponentiellem Wachstum. Die Zahl a heißt Wachstumsfaktor. Bei einer Bakterienkultur wächst die Anzahl der Bakterien stündlich um $p = 80\,\%$. Zu Beginn der Beobachtung wurden 50 Millionen Bakterien gezählt. Die Zahl der Bakterien (in Millionen) nach n Stunden lässt sich also mit der Formel $B(n) = 50 \cdot 1,8^n$ berechnen. Lässt man bei der Berechnung nicht nur natürliche Zahlen, sondern beliebige reelle Zahlen zu, so führt dies auf die **Exponentialfunktion** f mit $f(x) = 50 \cdot 1,8^x$. Damit lässt sich z. B. auch der Bestand 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn oder eine Stunde vor Beobachtungsbeginn berechnen.

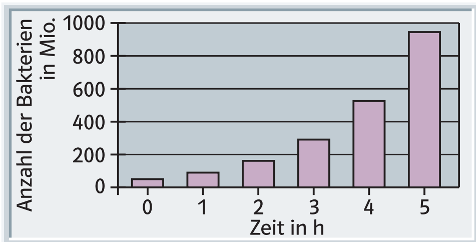


Fig. 1

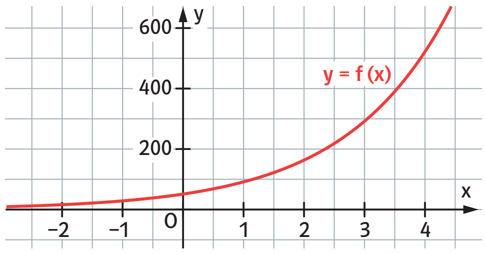
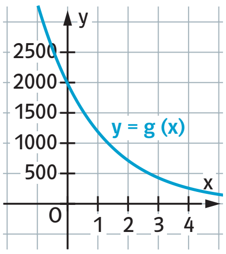


Fig. 2

$B(n) = 50 \cdot 1,8^n$
Bestand nach 1 h: $B(1) = 90$ (Mio.)
Bestand nach 2 h: $B(2) = 162$ (Mio.)

$f(x) = 50 \cdot 1,8^x$
Bestand nach 20 min: $f\left(\frac{1}{3}\right) = 60,822$ (Mio.)
Bestand vor 1 h: $f(-1) = 27,778$ (Mio.)



$g(x) = 2000 \cdot 0,6^x$

Fig. 3

Nimmt ein Bestand jede Minute um 40 % ab, so spricht man von exponentieller Abnahme. Der Wachstumsfaktor ist in diesem Fall kleiner als 1. Wenn etwa zu Beobachtungsbeginn 2000 Exemplare eines Bestands vorhanden sind, wird der Vorgang durch die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 2000 \cdot 0,6^x$ (x in Minuten) beschrieben.

Definition
Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$; $a > 0$; $a \neq 1$; heißt **Exponentialfunktion**.

Wird eine Exponentialfunktion zur Beschreibung eines Wachstums verwendet, dann handelt es sich für $a > 1$ um exponentielles Wachstum und für $a < 1$ um exponentiellen Zerfall. Der Faktor c entspricht dem Anfangsbestand $f(0)$ zum Zeitpunkt $x = 0$.

Quelle: gemeinfrei (NASA/Apollo 8 crewmember Bill Anders)
Seite aus: Lambacher Schweizer 10 Baden-Württemberg
ISBN: 978-3-12-734301-4

Eigenschaften von Exponentialfunktionen des Typs $f(x) = c \cdot a^x$; $c > 0$:
- Solche Exponentialfunktionen besitzen keine Nullstellen. Ihr Graph verläuft immer oberhalb der x-Achse.
- Alle Graphen gehen durch $A(0|c)$.
- Die x-Achse ist waagerechte Asymptote des Graphen von f, denn
  - für $a < 1$ und $x \to \infty$ gilt $a^x \to 0$,
  - für $a > 1$ und $x \to -\infty$ gilt $a^x \to 0$.

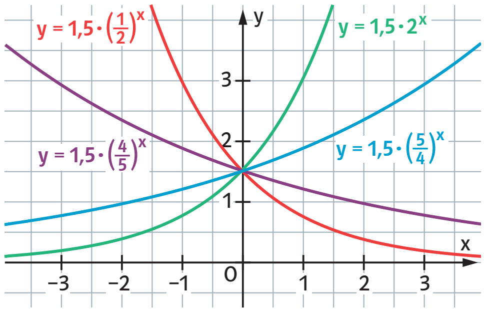


Fig. 1

Beispiel 1 Funktionsgleichung bestimmen
Zwischen 2002 und 2006 hat sich die Zahl der DSL-Anschlüsse näherungsweise exponentiell entwickelt. 2003 gab es 4,7 Millionen Zugänge, zwei Jahre später doppelt so viele.
a) Bestimme die jährliche prozentuale Zunahme.
b) Wie viele Anschlüsse gab es mit diesem Modell im Jahre 2002?
Lösung:
a) Ansatz: $A(t) = 4{,}7 \cdot a^t$ (A in Mio., t in Jahren);
Einsetzen der Information: $A(2) = 4{,}7 \cdot a^2 = 9{,}4$. Es ergibt sich $a^2 = 2$ und damit $a \approx 1{,}41$.
Die Zahl der DSL-Zugänge wächst jährlich um ca. 41%.
b) $A(t) = 4{,}7 \cdot 1{,}41^t$. $A(-1) = 4{,}7 \cdot 1{,}41^{-1} \approx 3{,}3$.
Im Jahr 2002 gab es ungefähr 3,3 Millionen DSL-Anschlüsse.

$a = 1 + p$
$p = 41\%$
$a = 1{,}41$

Beispiel 2 Gleichung lösen
Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten sinkt von anfänglich 10 mg pro Liter stündlich um 4%. Wann ist die Konzentration auf 1 mg/l gesunken?
Lösung:
Für die Wirkstoffkonzentration k in mg/l nach t Stunden gilt: $k(t) = 10 \cdot 0{,}96^t$.
Gesucht ist diejenige Zahl t, für die gilt: $k(t) = 1$.

$$10 \cdot 0{,}96^t = 1 \quad | :10$$
$$0{,}96^t = 0{,}1 \quad | \log$$
$$t = \frac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}96)} \approx 56{,}4$$

Nach etwa zwei Tagen und acht Stunden sinkt die Wirkstoffkonzentration unter 1 mg/l.

$a = 1 + p$
$p = -4\%$
$a = 0{,}96$

Erinnerung:
$a^t = b$
$t = \log_a(b)$
$t = \frac{\log(b)}{\log(a)}$
log: Logarithmus zur Basis 10

Aufgaben

1 Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ geht durch den Punkt P. Bestimme a und gib an, ob die Funktion monoton zu- oder abnimmt.
a) $P(1|3)$ b) $P(1|0{,}25)$ c) $P(2|6)$ d) $P(-1|3)$

2 Eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ nimmt für $x = 3$ den Funktionswert 5 an. Welche Funktionswerte liefert sie für die x-Werte 0,8 und −1,25.

3 Ein Bestand kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 20 \cdot 0{,}95^t$ (t in Tagen) beschrieben werden.
a) Wie groß ist der Bestand nach 3; 4; 8; 16 bzw. 24 Stunden?
b) Wie groß war der Bestand vor einem, zwei bzw. drei Tag(en)?
c) Gib die tägliche und die wöchentliche Abnahme in Prozent an.

Seite aus: Lambacher Schweizer 10 Baden-Württemberg
ISBN: 978-3-12-734301-4

4 Fig. 1 bis Fig. 4 zeigen die Graphen von Exponentialfunktionen. Bestimme die zugehörigen Funktionsgleichungen.

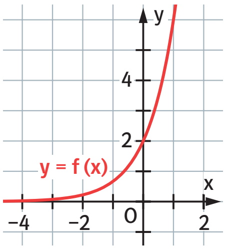


Fig. 1

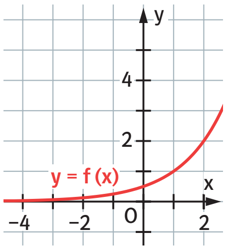


Fig. 2

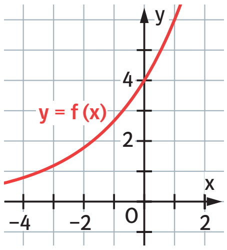


Fig. 3

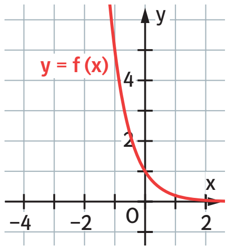


Fig. 4

Bist du sicher?

1 Ägypten hatte im Jahr 2000 eine Einwohnerzahl von 71,1 Millionen. Für die nächsten Jahre erwartet man ebenso wie seit 1990 ein Bevölkerungswachstum von jährlich 1,75 %.
a) Bestimme die zugehörige Wachstumsfunktion und damit die erwarteten Einwohnerzahlen für die Jahre 2010 bzw. 2020.
b) Berechne die Einwohnerzahl aus den Jahren 1995 und 1990.
c) Wann wird Ägypten mehr als 90 Millionen Einwohner haben?

In welchen Staaten der Erde wächst die Bevölkerung exponentiell? Recherchiere!

2 Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ geht durch die Punkte P und Q. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm und prüfe, ob R auf dem Graphen liegt.
a) $P(0|\frac{1}{2})$; $Q(1|5)$; $R(2|10)$ b) $P(0|3)$; $Q(3|24)$; $R(2|12)$ c) $P(0|9)$; $Q(5|\frac{1}{9})$; $R(-2|27)$

5 Ein Kaufmann hat im 16. Jahrhundert den Gegenwert von 3000 US-$ angelegt.
a) Auf welchen Betrag ist diese Summe nach rund 500 Jahren angewachsen, wenn man von einem jährlichen Wertzuwachs von 4 % ausgeht?
b) Nach wie vielen Jahren erreichte das Guthaben die Millionengrenze?
c) Innerhalb welchen Zeitraums verdoppelt sich jeweils das Kapital des Kaufmanns?

Das Ergebnis aus a) ist der Titel eines Buchs von Andreas Eschbach.

6 Hannah legt 1000 € auf einem Sparbuch zu einem Zinssatz von 2,5 % an.
a) Gib eine Funktion K an, mit der man das Kapital K (t) nach t Jahren berechnen kann.
b) Bestimme das Kapital nach einem, zwei bzw. dreieinhalb Jahr(en).

Nach dreieinhalb Jahren hebt Hannah das ganze Geld ab und erhält 1090,36 €. Vergleiche mit deinem Ergebnis aus b).

7 In Fig. 5 sind die Graphen von drei Exponentialfunktionen abgebildet.
a) Bei welcher Funktion ist der Wachstumsfaktor a am größten, bei welcher am kleinsten?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wachstumsfaktoren, die zum grünen und zum blauen Graphen gehören?
c) Welche Aussagen kann man über die Anfangswerte bei $x = 0$ machen?

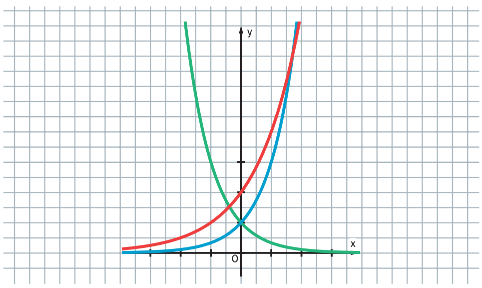


Fig. 5

8 Anfang 2003 umfasste der deutsche Ableger der Online-Enzyklopädie Wikipedia rund 12 000 Artikel. In den folgenden Jahren hat sich die Zahl pro Jahr etwa vervierfacht.
a) Wie viele Artikel waren in etwa im April 2004 online?
b) Wann hat Wikipedia in etwa die Grenze von 100 000 Artikeln durchbrochen?

Seite aus: Lambacher Schweizer 10 Baden-Württemberg
ISBN: 978-3-12-734301-4