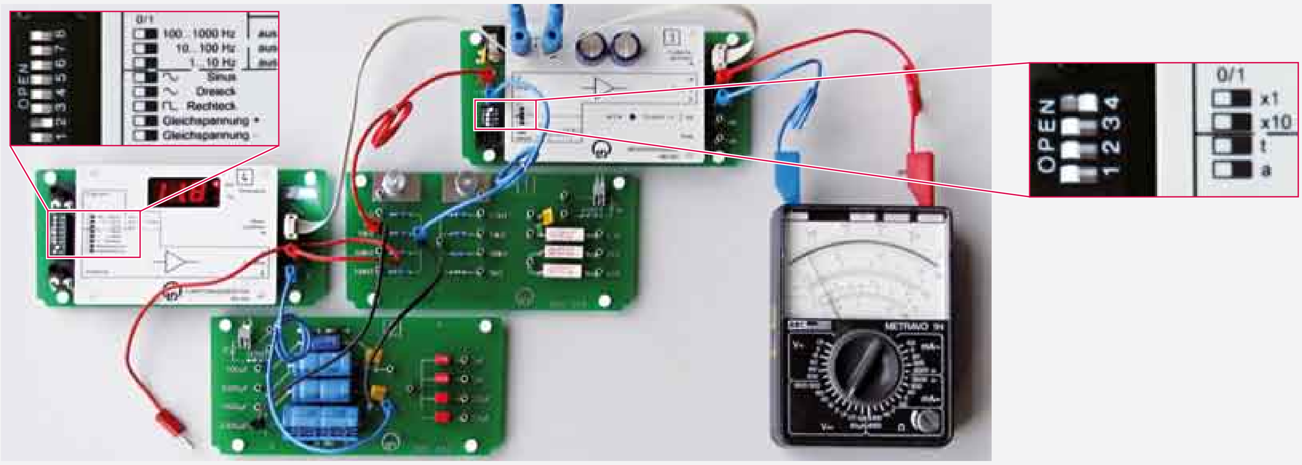
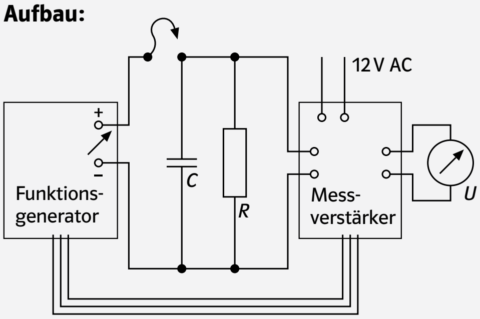
Die Entladung eines Kondensators



Auftrag: Ermitteln Sie Entladekurven von Kondensatoren (t-U-Diagramme).

Geräte: Kondensatoren (C_1 = 1000 µF, C_2 = 3300 µF), Widerstände (R_1 = 10 kΩ, R_2 = 33 kΩ), Funktionsgenerator, Messverstärker, Spannungsmessgerät, Stoppuhr, elektrische Versorgung 12 V AC

Aufbau:

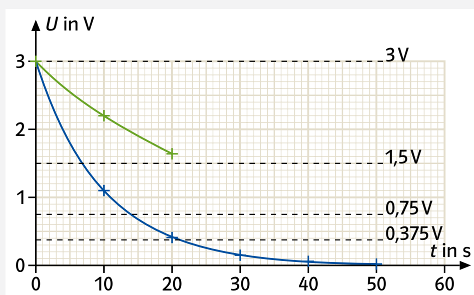


Durchführung: Schließen Sie die Versorgungsspannung (12 V AC) an den Messverstärker an. Verbinden Sie den Messverstärker über das sechspolige Kabel mit dem Funktionsgenerator. Wählen Sie am Funktionsgenerator mit den Miniaturschaltern „Gleichspannung +" aus. Messen Sie die Spannung des Funktionsgenerators und korrigieren Sie den Wert mit dem Amplituden-Regler auf 3 V. Bauen Sie die weitere Schaltung entsprechend dem Schaltplan und dem Foto des Versuchsaufbaus auf und stellen Sie den Miniaturschalter auf die Verstärkung „×1". Achten Sie auf die richtige Polung des Kondensators. Messen Sie für die Kombinationen R_1C_1, R_2C_2, R_1C_2 und R_2C_1 die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit.

Messwerte:

	t in s	0	10	20	30	40	50	60	70
R_1C_1	U in V	3	1,1	0,41	0,15	0,06	0,02	…	…
R_2C_2		3	2,2	1,64	…	…	…	…	…
R_1C_2		3	2,4	…	…	…	…	…	…
R_2C_1		3	…	…	…	…	…	…	…

Auswertung:



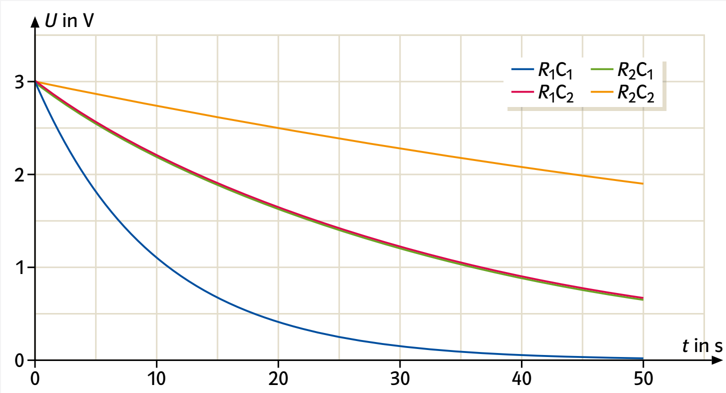
■ **A1** Machen Sie Aussagen zum Verlauf der Spannungen und begründen Sie dies physikalisch.

■ **A2** Bestimmen Sie die Zeiten, nach denen die Spannungen auf U = 1,5 V, U = 0,75 V und U = 0,375 V abgesunken sind.
Fassen Sie die Ergebnisse zusammen.

■ **A3** Es ist $I = U/R$. Rechnen Sie die Messwerte auf die Stromstärke I um und zeichnen Sie die Graphen $I(t)$ für die vier angegebenen RC-Kombinationen.

Bildquelle: B1a–B1c Klett-Archiv (Manfred Grote)

Die mathematische Beschreibung der Kondensatorentladung



B1 Entladekurven eines Kondensators

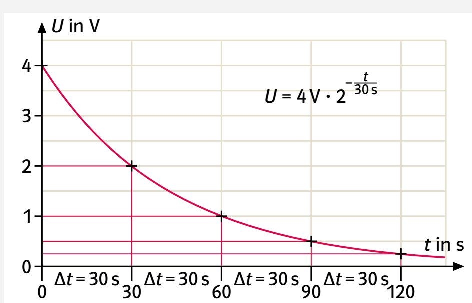
Formulieren Sie Hypothesen zur Funktionsgleichung $U(t)$ der Kondensatorentladung. Für die Kombination R_1C_1 (siehe vorangehende Seite) könnte z. B. eine lineare Funktion, eine quadratische Funktion oder eine exponentielle Funktion eine Beschreibung liefern.

Bemerkung:
Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit der Basis e.

Die Form der Kurve lässt eine lineare Funktion ungeeignet erscheinen.
Die Halbparabel wäre eine mögliche Beschreibung. Dagegen spricht aber die Beobachtung, dass die Spannung in jeweils gleichen Zeitspannen von 3 V auf 1,5 V, von 1,5 V auf 0,75 V und von 0,75 V auf 0,375 V abfällt. Dies lässt auf einen exponentiellen Verlauf schließen.

● **Bei exponentiell abfallenden Funktionen halbiert sich der Funktionswert nach jeweils gleichen Zeitspannen. Diese Zeitspannen heißen Halbwertszeit.**

Beispiel:



B2 Exponentieller Abfall

■ **A1** Beschreiben Sie die t-U-Diagramme für die Kombinationen R_1C_1, R_2C_2, R_1C_2 und R_2C_1 (siehe vorangehende Seite) in gleicher Weise mittels der Halbwertszeiten: $U(t) = 3\,\text{V} \cdot 2^{-t/\ldots}$

Die e-Funktion in der Physik Größen $f(t)$, die sich in gleichen Zeitspannen Δt (z. B. alle 30 s) verdoppeln oder halbieren, beschreiben exponentielle Zusammenhänge. Sie lassen sich erfassen durch Funktionen

$f(t) = a \cdot 2^{\pm t/\Delta t};\ a \in \mathbb{R}$

(„+“-Zeichen bedeutet: Verdopplung, „–“-Zeichen bedeutet: Halbierung nach der Zeit Δt)

In der Physik benutzt man zur mathematischen Beschreibung Exponentialfunktionen mit der Basis e = 2,718 … Diese Zahl heißt **Euler'sche Zahl**.

Die Funktion $U(t) = 4\,\text{V} \cdot 2^{-t/30\,\text{s}}$ beschreibt den exponentiellen Abfall der Spannung U bei der Entladung eines Kondensators. Um diese Funktion mit der Basis e auszudrücken, wird die Beziehung $2 = \mathrm{e}^{\ln(2)}$ benutzt. Damit ergibt sich:

$U(t) = 4\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2) \cdot t/30\,\text{s}}$

ln (2) ist der Logarithmus zur Basis e von 2. ln (2) wird natürlicher Logarithmus von 2 genannt. Entsprechend lassen sich alle Exponentialfunktionen auf die Basis e umrechnen.

■ **A2** Rechnen Sie auf die Basis e um:
$U(t) = 4\,\text{V} \cdot 1{,}5^{-t/10\text{s}}$
$U(t) = 3\,\text{V} \cdot 0{,}91^{-t/\text{s}}$

■ **A3** Geben Sie die Gleichungen der Messkurven mit der Basis e an:
R_1C_1: $U(t) = 3\,\text{V} \cdot 0{,}91^{-t/\text{s}}$
$U(t) = 3\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\ln(0{,}91) \cdot t/\text{s}}$
$U(t) = 3\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-(0{,}094 \cdot 1)/(\text{s} \cdot t)}$
$U(t) = 3\,\text{V} \cdot \mathrm{e}^{-t/10{,}6\,\text{s}}$
R_2C_2: $U(t)$ …

Allgemein gilt für die Entladung eines Kondensators die Zeit-Spannungs-Funktion

$U(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/(R \cdot C)}$

Daraus kann man eine Formel für die Halbwertszeit der Entladung des Kondensators ableiten. Die Halbwertszeit ist die Zeitspanne t_H, in der die Spannung auf den halben Wert absinkt.
Also ist $U(t_H) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-t_H/(R \cdot C)} = \frac{U_0}{2}$
Division durch U_0 ergibt $\mathrm{e}^{-t_H/(R \cdot C)} = \frac{1}{2}$.
Das Logarithmieren dieser Gleichung liefert die Beziehung $-t_H/(R \cdot C) = \ln(1/2) = -\ln(2)$.
Für die Halbwertszeit t_H der Entladung des Kondensators gilt $t_H = \ln(2) \cdot R \cdot C$.