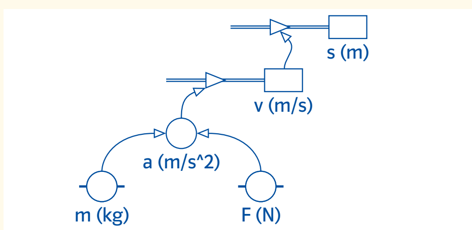
Kräfte bewegen Körper – Ein einfaches Beispiel (1)

Ein Wagen der Masse $m = 200\,\text{g}$ wird von einer konstanten Kraft $F = 0{,}098\,\text{N}$ auf einer horizontalen Luftkissenbahn gezogen. Gesucht sind der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit v und des Weges s.

Die Geschwindigkeit v und der Weg s sind die Zustandsgrößen. Auf den Wagen wirkt die Kraft F. Sie und die Masse m des Wagens sind die Einflussgrößen für die Beschleunigung a des Wagens. Die Beschleunigung $a = \Delta v/\Delta t$ ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit v. Die Geschwindigkeit v wiederum ist die Änderungsrate des Weges, also $v = \Delta s/\Delta t$. Damit ergibt sich folgendes Wirkungsgefüge mit folgenden Gleichungen:
$v(t + \Delta t) = v(t) + a \cdot \Delta t$ (1) und
$s(t + \Delta t) = s(t) + v \cdot \Delta t$ (2).

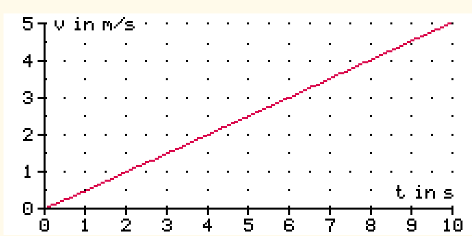


B3

Die Startwerte sind $s(0) = 0$ und $v(0) = 0$. Damit und mit $\Delta t = 1\,\text{s}$ erhält man **B1** und den entsprechenden Graphen (→ **B4**).

t in s	v in m/s
0	0,00
1	0,49
2	0,98
3	1,47
4	1,96
5	2,45
6	2,94
7	3,43
8	3,92
9	4,41
10	4,90

B1

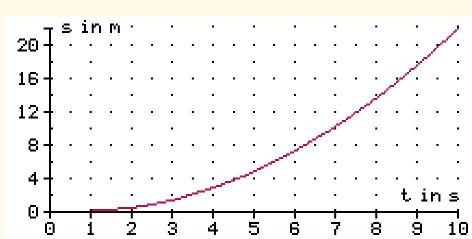


B4

Für den Weg s ergeben sich folgende Tabelle (→ **B2**) und Graph (→ **B5**):

t in s	s in m
0	0,00
1	0,00
2	0,49
3	1,47
4	2,94
5	4,90
6	7,35
7	10,29
8	13,72
9	17,64
10	22,05

B2



B5

Zunächst erscheinen diese Ergebnisse korrekt zu sein. Die Geschwindigkeit ändert sich linear und der Weg quadratisch mit der Zeit.

Wird der Weg jedoch mit der Formel $s_b = ½ \cdot a \cdot t^2$ berechnet, so ergeben sich beträchtliche Abweichungen (→ **B6**):

t in s	s in m	s_b in m
0	0,00	0,00
1	0,00	0,25
2	0,49	0,98
3	1,47	2,21
4	2,94	3,92
5	4,90	6,13
6	7,35	8,82
7	10,29	12,01
8	13,72	15,68
9	17,64	19,85
10	22,05	24,50

B6

Diese Abweichungen sind nicht auf ein fehlerhaftes Modell zurückzuführen, sondern auf eine Ungenauigkeit, die durch eine zu große Schrittweite verursacht wird.

In der folgenden Tabelle wurde die Schrittweite für Δt von 0,1 s über 0,01 s auf 0,001 s verringert und jeweils das Modell neu berechnet.

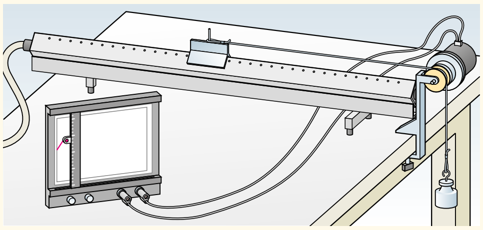
Die gegenüber vorher verbesserten Werte sind in **B7** deutlich zu erkennen. Bei $\Delta t = 0{,}001\,\text{s}$ sind (bei der gegebenen Genauigkeit) bereits keine Abweichungen von den nach der Gleichung $s_b = ½ \cdot a \cdot t^2$ berechneten Werten zu erkennen.

s_b in m	s in m		
	0,1 s	0,01 s	0,001 s
0,00	0,00	0,00	0
0,25	0,22	0,24	0,25
0,98	0,93	0,98	0,98
2,21	2,13	2,20	2,21
3,92	3,82	3,91	3,92
6,13	6,00	6,11	6,13
8,82	8,67	8,81	8,82
12,01	11,83	11,99	12,01
15,68	15,48	15,66	15,68
19,85	19,62	19,82	19,85
24,50	24,26	24,48	24,50

B7

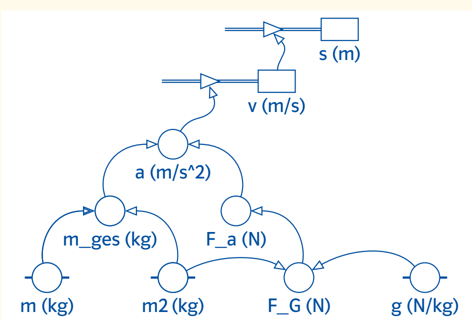
Kräfte bewegen Körper – Ein einfaches Beispiel (2)

Derselbe Wagen wie auf der linken Seite (m = 200 g) wird wieder auf einer horizontalen Luftkissenfahrbahn gezogen. Diesmal soll die Kraft F jedoch durch ein fallendes Gewichtstück der Masse $m_2 = 10\,\text{g}$ erzeugt werden (→ **B1**).



B1 Gleiter mit Masse

Da die Masse $m_2 = 10\,\text{g}$ beträgt, ergibt sich für $F_G = m_2 \cdot g = 0{,}098\,\text{N}$, so dass man meinen könnte, es handelt sich um dieselbe Situation wie oben. Dies ist jedoch nicht der Fall!
Die beschleunigende Kraft F_a wird tatsächlich von der Gewichtskraft der Masse m_2 erzeugt. Insgesamt aber muss nicht nur die Masse m des Gleiters, sondern die gesamte Masse, gebildet aus der Masse m des Gleiters und der Masse m_2 des fallenden Gewichtstücks, beschleunigt werden. In dem Wirkungsgefüge ist dies deutlich zu erkennen:



B2

Die Kraft F_G wird aus Masse m_2 und der Erdbeschleunigung g berechnet. $F_G = m_2 \cdot g$ ist die beschleunigende Kraft F_a. Aus dieser Kraft berechnet man die Beschleunigung $a = F_a/m_{ges}$, wobei $m_{ges} = m + m_2$ ist.

Der Weg s und die Geschwindigkeit v des Gleiters werden wieder mit den Iterationsformeln (1) und (2) bestimmt:

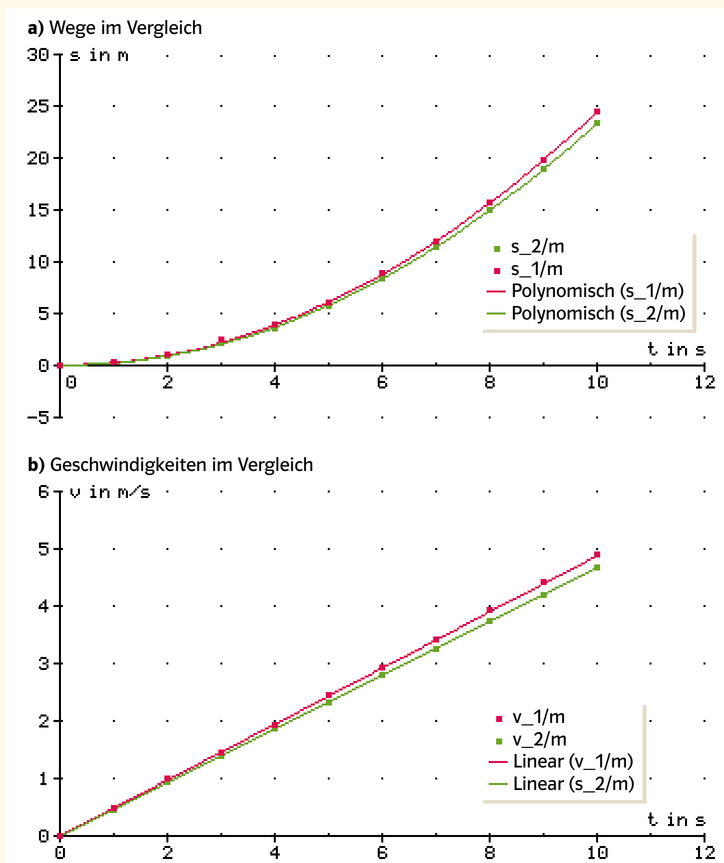
$v(t + \Delta t) = v(t) + a \cdot \Delta t$ (1) und
$s(t + \Delta t) = s(t) + v \cdot \Delta t$ (2) mit den Startwerten $v(0) = 0$ und $s(0) = 0$.

Die Ergebnisse zeigt **B3**, wobei v_b bzw. s_b die Werte sind, die man aus den Bewegungsgleichungen erhält. Als Schrittweite für Δt wurde 0,001 s gewählt.

t in s	v in m/s	v_b in m/s	s in m	s_b in m
0	0	0,00	0,00	0,00
1	0,47	0,47	0,23	0,23
2	0,93	0,93	0,93	0,93
3	1,40	1,40	2,10	2,10
4	1,87	1,87	3,74	3,74
5	2,34	2,34	5,84	5,84
6	2,80	2,80	8,41	8,41
7	0,27	0,27	11,44	11,45
8	3,74	3,74	14,95	14,95
9	4,20	4,20	18,92	18,92
10	4,67	4,67	23,35	23,36

B3

Deutlich ist zu erkennen, dass die Werte der grünen Kurve für v und s erwartungsgemäß unter denen des ersten Beispiels (rot) liegen.



B4