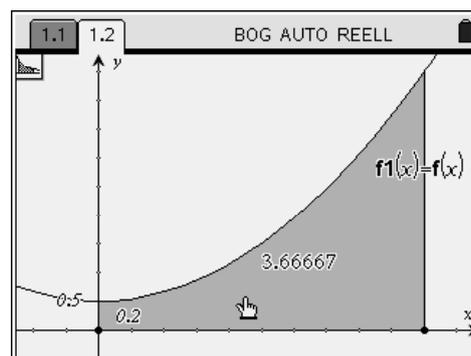


Aufgabe: Berechnung einer krummlinigen Fläche

Lösungsvorschlag:

Als Beispiel wird die Fläche „unter“ einer um 0,5 nach oben verschobenen Normalparabel (Gleichung $f(x) = x^2 + 0,5$) gewählt, wie sie in der Abbildung dargestellt ist. Sie wird links von der y-Achse, unten von der x-Achse und rechts von der Geraden $x = 2$ begrenzt.



Grundidee:

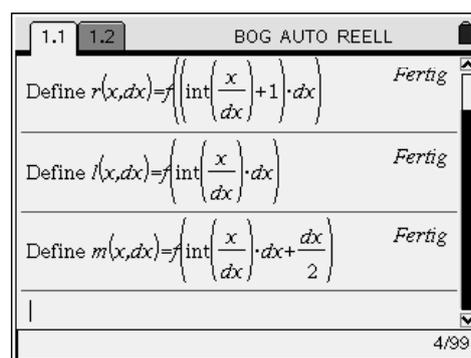
Die Fläche wird angenähert durch einfach zu berechnende Flächen. Der folgende Weg kann interaktiv mit dem Rechner durchgeführt werden.

Es gibt zahlreiche Variationsmöglichkeiten, auf einige wird hingewiesen.

Zunächst werden einige Hilfsfunktionen definiert.

Mit der Funktion $r(x, dx)$ wird die x-Achse in Intervalle der Länge dx zerlegt und jeweils der Funktionswert von f an der rechten Stelle des Intervalls berechnet.

$l(x, dx)$ entsprechend, $m(x, dx)$ berechnet den Funktionswert in der Mitte des Intervalls.

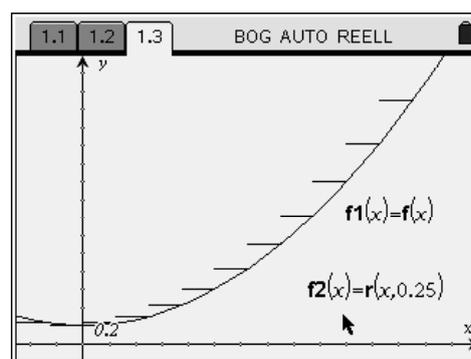


Die Funktion f kann durch diese Treppenfunktionen approximiert werden.

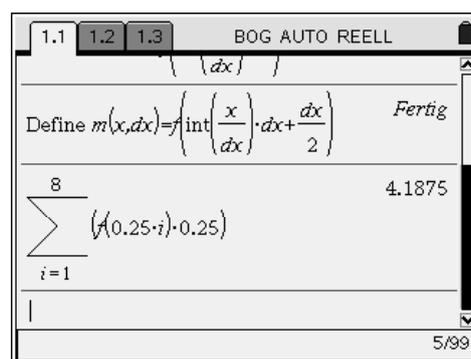
In der Abb. rechts ist die Approximation durch die Funktion $r(x, 0.25)$ dargestellt.

Der Flächeninhalt unter der Treppenfunktion approximiert bei kleinem dx den Flächeninhalt unter der Kurve für $f(x)$.

Er lässt sich leicht berechnen, weil es sich dabei um eine Summe von Rechtecksinhalten handelt.



Mit der Summenfunktion kann diese Rechteck-Summe schnell berechnet werden:



Aufgabe: Berechnung einer krummlinigen Fläche

Verallgemeinerung:

Es werden mehr Teilintervalle verwendet, z. B. 20, 200, 2000.

Es kann eine Vermutung über den gesuchten Flächeninhalt angestellt werden, weil die Näherung schon recht gut ist.

BOG AUTO REELL

$\sum_{i=1}^{20} (f(0.1 \cdot i) \cdot 0.1)$	3.87
$\sum_{i=1}^{200} (f(0.01 \cdot i) \cdot 0.01)$	3.6867

BOG AUTO REELL

$\sum_{i=1}^{2000} (f(0.001 \cdot i) \cdot 0.001)$	3.66867
$\sum_{i=1}^{20000} (f(1.E-4 \cdot i) \cdot 1.E-4)$	3.66687

Zerlegt man das Intervall von 0 bis 2 in n Intervalle, so gilt $dx = \frac{2}{n}$.

Wenn man die Ersetzung weglässt, berechnet der Rechner sogar eine Termdarstellung der Summe in Abhängigkeit von n.

BOG EXAKT REELL

$\sum_{i=1}^n \left(f\left(\frac{2}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{2}{n} \right)$	$\frac{11 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{3 \cdot n^2}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{3 \cdot n^2} \right)$	$\frac{11}{3}$

Man erkennt, dass der Flächeninhalt für $n \rightarrow \infty$ den Grenzwert $\frac{11}{3}$ hat.

Das ergibt sich auch mit der limes-Funktion des Rechners.

Nun gibt es zahlreiche Variationen:

- a) Man kann mit einer anderen Approximation arbeiten, z. B. mit Trapezen zur Annäherung der Fläche.
- b) Man kann andere Funktionen untersuchen.
- c) Man kann andere Bereiche als $[0; 2]$ untersuchen.

Variante c) kann z. B. auf folgende Verallgemeinerung für die obige Summe führen:

DelVar f sorgt dafür, dass die Formel auch für andere Funktionen als $f(x) = x^2$ einsetzbar ist.

Es wird ein „Baustein“ rsum definiert, der von a und b (den Intervallgrenzen) sowie von der Zahl n der Teilintervalle abhängt.

BOG AUTO REELL

DelVar f Fertig

Define $rsum(a,b,n) = \sum_{i=1}^n \left(f\left(\frac{b-a}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b-a}{n} \right)$ Fertig

Define $f(x) = x^3$ Fertig

Aufgabe: Berechnung einer krummlinigen Fläche

Damit ergeben sich z. B. für $f(x) = x^3$ für

$$a = 0, b = 2, n = 100$$

$$a = 0, b = 2, n \rightarrow \infty$$

$$a = 0, b = x, n \rightarrow \infty$$

die abgebildeten Rechnerausgaben.

BOG AUTO REELL	
$rsum(0,2,100)$	10201 2500
$rsum(0,2,100)$	4.0804
$\lim_{n \rightarrow \infty} (rsum(0,2,n))$	4
$\lim_{n \rightarrow \infty} (rsum(0,x,n))$	$\frac{x^4}{4}$
5/23	

Variation des letzten Falles mit verschiedenen Potenzfunktionen ergibt die folgende Abbildung.

Das führt auf die Vermutung, dass ein einfacher

$$f(x) = x^n \text{ und dem Flächeninhalt } F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für das Intervall $[0, x]$ besteht.

Das ist im wesentlichen die Vermutung des Hauptsatzes, den man nun wie üblich beweisen kann.

BOG AUTO REELL	
Define $f(x)=x^4$	Fertig
$\lim_{n \rightarrow \infty} (rsum(0,x,n))$	$\frac{x^5}{5}$
Define $f(x)=x^5$	Fertig
$\lim_{n \rightarrow \infty} (rsum(0,x,n))$	$\frac{x^6}{6}$
4/23	