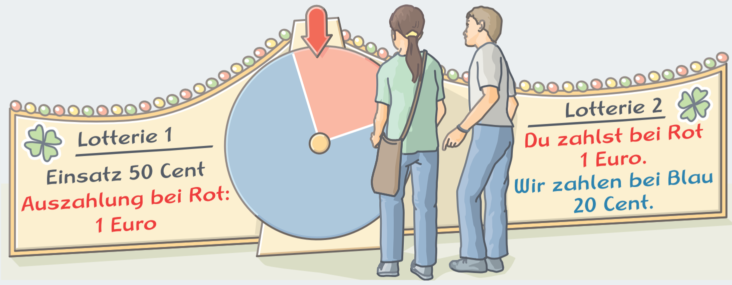
Erwartungswert und Standardabweichung bei Zufallsgrößen

Mara meint, dass Lotterie 1 günstiger ist, weil man mehr gewinnt. Jakob hält Lotterie 2 für günstiger, weil das blaue Feld bei dem Glücksrad größer ist. Anna fürchtet, dass man bei beiden Lotterien nur verlieren kann.



Datenerhebungen bzw. Zufallsexperimente liefern (relative) Häufigkeitsverteilungen, die man durch die Kenngrößen Mittelwert und (empirische) Standardabweichung kennzeichnet. Wenn man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung als Modell angeben kann, so werden entsprechende theoretische Kenngrößen festgelegt, die man **Erwartungswert** und **Standardabweichung** nennt. Sie ermöglichen eine Prognose der empirischen Kenngrößen.

Analogie:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ermöglicht eine Prognose seiner relativen Häufigkeit.

Bei einem Spiel wird zunächst 1 € Einsatz bezahlt. Dann wird das Glücksrad aus Fig. 1 dreimal gedreht. Wenn einmal blau erscheint, erhält man als Auszahlung 1 €, bei „zweimal blau“ 3 € und bei „dreimal blau“ 6 €. Gewinnt man bei dem Spiel auf lange Sicht?
Entscheidend dafür ist der Gewinn X in Euro. Die **Zufallsgröße** X kann bei dem Spiel die Werte −1, 0, 2 oder 5 annehmen. Mit einem Baumdiagramm (Fig. 2) kann man die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmen und damit die **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße** X, in einer Tabelle darstellen.

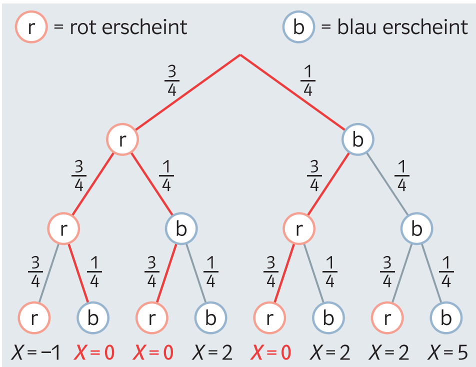


Fig. 2

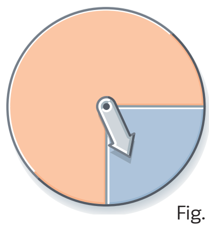


Fig. 1

Den Ergebnissen rrb, rbr und brr ist z. B. der Gewinn X = 0 zugeordnet (rot gekennzeichnete Pfade in Fig. 2).
(Gewinn = Auszahlung minus Einsatz).

g	−1	0	2	5
P(X = g)	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert 0 annimmt, ist z. B.
$P(X = 0) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

Auf lange Sicht erwartet man aufgrund der Tabelle durchschnittlich den Gewinn −1 € bei $\frac{27}{64}$ der Spiele, den Gewinn 0 € auch bei $\frac{27}{64}$ der Spiele, den Gewinn 2 € bei $\frac{9}{64}$ der Spiele und den Gewinn 5 € bei $\frac{1}{64}$ der Spiele. Somit beträgt der zu erwartende durchschnittliche Gewinn in €
$(-1)\cdot\frac{27}{64} + 0\cdot\frac{27}{64} + 2\cdot\frac{9}{64} + 5\cdot\frac{1}{64} = -\frac{1}{16} \approx -0{,}06$.

Der Erwartungswert wird wie der Mittelwert bei Daten berechnet; die relativen Häufigkeiten werden ersetzt durch entsprechende Wahrscheinlichkeiten.
Ein Spiel mit Erwartungswert 0 für den Gewinn nennt man fair.

Bei dem Spiel wird man also auf lange Sicht pro Spiel etwa 6 Cent verlieren. Man nennt diesen Wert **Erwartungswert von X**. Er wird bezeichnet mit $\mu(X)$, kurz μ (lies Mü). Der Erwartungswert μ gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperiments zu erwarten ist. Er ist also eine Prognose für den Mittelwert.

Für die empirische Standardabweichung s wird analog eine theoretische Standardabweichung σ (lies Sigma) festgelegt, welche die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert μ beschreibt und eine Prognose für s darstellt.

Seite aus: Lambacher Schweizer Stochastik
ISBN-13: 978-3-12-735710-3

Zur Unterscheidung wird bei Daten der Begriff empirische Standardabweichung verwendet – von empireia (griechisch): Erfahrung, Erfahrungswissen.

Für eine Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$ definiert man folgende Kenngrößen:

Erwartungswert von X: $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung von X: $\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$

Das Quadrat von σ wird als **Varianz** V(X) bezeichnet: $V(X) = \sigma^2$

Bei dem Glücksspiel von Seite 38 ist die Standardabweichung in €

$$\sigma = \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{27}{64} + \left(0 + \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{27}{64} + \left(2 + \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{9}{64} + \left(5 + \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{64}} \approx 1{,}17.$$

Beispiel 1

Gegeben sei die Zufallsgröße X: „Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln“.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

■ Lösung: Die Zufallsgröße kann die Werte 2, 3, 4, …, 12 annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (Graph siehe Fig. 1) erhält man aus einem Baumdiagramm.
So gilt z. B. für $P(X = 5)$:
Zum Ereignis „$X = 5$“ gehören die vier Ergebnisse 1–4, 2–3, 3–2 und 4–1.
Da alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, ist $P(X = 5) = \frac{4}{36}$.

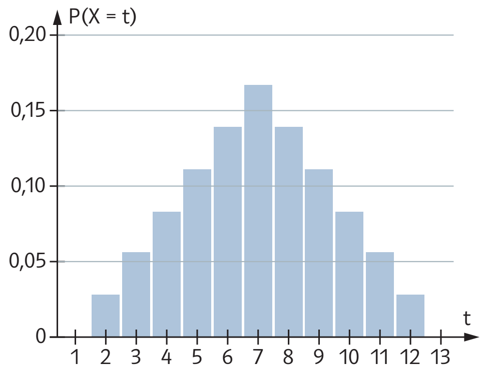


Fig. 1

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = r)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erwartungswert: $\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{(2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36}} \approx 2{,}41$

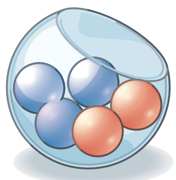


Fig. 2

Beispiel 2 Faires Spiel

Man setzt zunächst einen Euro. Dann werden aus einer Urne mit zwei roten und drei blauen Kugeln zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen (Fig. 2). Man erhält eine Auszahlung von a €, wenn zwei gleiche Kugeln gezogen werden. Wie groß ist a, wenn das Spiel fair ist?

■ Lösung: Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert für den Gewinn 0 ist. Der Gewinn ergibt sich, indem man vom Auszahlungsbetrag a den Einsatz von einem Euro abzieht: Die Zufallsgröße X: „Gewinn in €“ kann also die Werte −1 (es wurden zwei verschiedenartige Kugeln gezogen) und a − 1 (es wurden zwei gleichartige Kugeln gezogen) annehmen.

g	−1	a − 1
P(X = g)	0,6	0,4

$P(X = -1) = P(\{br, rb\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6;\quad P(X = a - 1) = 1 - P(X = -1) = 0{,}4.$

Es muss $E(X) = 0$ gelten, also $-1 \cdot 0{,}6 + (a - 1) \cdot 0{,}4 = 0$.
Lösung der Gleichung $a = 2{,}5$.
Für ein faires Spiel muss die Auszahlung 2,50 € betragen.

Seite aus: Lambacher Schweizer Stochastik
ISBN-13: 978-3-12-735710-3

Aufgaben

1 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle.

k	−10	0	5	10
P(X = k)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

2 Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Geburt eines Welpen ein Rüde erwartet werden kann, beträgt 51 %. Die Hündin Ria wird drei Junge bekommen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele Rüden Ria gebärt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 Beim Lotto „6 aus 49" ist für die Zufallsgröße „Anzahl der Richtigen pro Tipp" die Wahrscheinlichkeitsverteilung (gerundet) in der Tabelle angegeben.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der Richtigen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

r	P(X = r)
0	0,436
1	0,413
2	0,132
3	0,0177
4	0,000969
5	$1{,}85 \cdot 10^{-5}$
6	$7{,}15 \cdot 10^{-8}$

4 Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1-Euro-Münzen und acht 2-Euro-Münzen nimmt man zwei Münzen. Welchen Geldbetrag m wird man durchschnittlich herausziehen? Wie stark streuen die Geldbeträge um m?

5 Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn in Euro bei einem Glücksspiel mit einem Einsatz von 1 € an. Die Tabelle gibt ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

g	−1	0	1	4
P(X = g)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

Gewinn = Auszahlung minus Einsatz

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
c) Ändern Sie die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1 € fair ist.

6 Gegeben sei die Zufallsgröße X: „Zahl der Wappen beim dreifachen Münzwurf".
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen und markieren Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
c) Simulieren Sie mit Excel oder einem GTR 100 Würfe mit drei Münzen.
Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung ihrer Urliste.
Erstellen Sie den Graphen der Häufigkeitsverteilung. Vergleichen Sie mit den Teilaufgaben a) und b).

Zeit zu überprüfen

7 Berechnen Sie für die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle den Erwartungswert und die Standardabweichung.

k	−2	1	4	7
P(X = k)	5 %	20 %	40 %	35 %

8 Bei einer Lotterie zahlt man einen Einsatz von 50 Cent und dreht das Glücksrad in Fig. 1 zwei Mal. Bei zwei gleichen Farben wird ein Euro ausbezahlt, sonst nichts.
a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Gewinn in Euro" an.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn.
c) Kann man den Einsatz so ändern, dass die Lotterie fair ist?

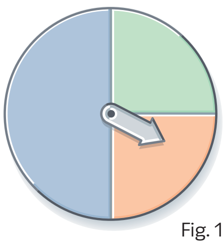


Fig. 1

Seite aus: Lambacher Schweizer Stochastik
ISBN-13: 978-3-12-735710-3

9 Beim Würfelspiel „2 & 12" werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Die Bank zahlt dem Spieler das Zehnfache der Augensumme in Cent aus, sofern diese 2 oder 12 ist.
Bei der Augensumme 3 oder 11 erhält er das Fünffache in Cent und bei der Augensumme 4 oder 10 das Doppelte in Cent. Bei den Augensummen 5 bis 9 wird so viel in Cent ausbezahlt, wie die Augensumme angibt.
a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Auszahlung der Bank" an.
b) Welchen Einsatz muss die Bank mindestens verlangen, damit sie längerfristig keinen Verlust macht?

10 Ein Medikament heilt erfahrungsgemäß eine Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Drei Patienten werden damit behandelt.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße „Anzahl der geheilten Patienten".
Hätte man das Ergebnis einfacher erhalten können?

11 Bei den Eishockeyplayoffs (Playoffs sind Ausscheidungsspiele) spielen zwei Mannschaften so oft gegeneinander, bis eine der beiden drei Spiele für sich entschieden hat (Unentschieden gibt es nicht). Mit wie vielen Spielen ist im Mittel zu rechnen, wenn man davon ausgeht, dass beide Mannschaften gleich stark sind?
Wie groß ist die zugehörige Standardabweichung?

12 Chuck-a-luck ist ein Würfelspiel aus Amerika mit folgenden Regeln:
It is played with three dice and a layout numbered from one to six upon which the players place their bets. The banker then rolls the dice by turning over an hourglassshaped wire cage in which they are contained. The payoffs are usually 1 to 1 on singles, 2 to 1 on pairs, and 3 to 1 on triples appearing on the dice; for example, if a player places a bet on six and two sixes appear on the dice, the player is paid off at 2 to 1. The game can be found in some American and European casinos and gambling houses.
Ein Spieler setzt einen Dollar auf „Sechs". Er möchte wissen, wie viel er auf lange Sicht gewinnt oder verliert.

13 Eine Zeitschrift veröffentlicht wöchentlich ein Kreuzworträtsel. Unter den Einsendern des richtigen Lösungswortes wird ein Preis zu 1000 €, vier Preise zu je 300 € und 200 Preise zu je 20 € verlost.
a) Wie groß ist der Erwartungswert für den Gewinn, wenn man von 10 000 richtig eingegangenen Lösungen ausgeht? Wie groß ist die Standardabweichung?
b) Wie viele Lösungen müssten eingehen, damit der zu erwartende Gewinn gerade dem Porto der Postkarte von 0,45 € entspricht?

Zeit zu wiederholen

14 Die Tabelle gehört zu einer proportionalen Funktion.

a	3	10	12	1,5	
b	7,5	25	30		20

a) Woran erkennt man das bei den Tabellenwerten?
b) Bestimmen Sie die fehlenden Werte und den Proportionalitätsfaktor. Geben Sie die Gleichung der Funktion an.
c) Die Werte von b werden alle um 5 erhöht. Welche Art von Funktion beschreibt die Tabelle dann? Geben Sie die Gleichung dieser Funktion an.

15 Vereinfachen Sie die Terme.
a) $(3 + 2x) \cdot (1 - x)$ b) $(2x - 1)^2$ c) $3 \cdot (a + 4b) - (4 + a) \cdot 3b$ d) $(20 + u) \cdot (20 - u)$

Statt einer Zufallszahl wird oft auch ein Intervall von Zufallszahlen zugeordnet.

Seite aus: Lambacher Schweizer Stochastik
ISBN-13: 978-3-12-735710-3