Zielwerfen: Praxis und Theorie der Gaußschen Glockenfunktion

Simone scheint mit Tobias' Zielgenauigkeit nicht zufrieden...

... ob sie besser ist?

Die Hypothese von C. F. Gauß

Beim Zielwerfen auf den Ursprung (0;0) eines Koordinatensystems sind die Koordinaten x und y der Treffer M(x,y) normalverteilt mit Erwartungswert μ=0 und Standardabweichung σ, d. h es gilt für die x- (und analog die y-) Koordinaten :

$$P(a < x \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2} dx \, .$$

Dabei hängt der Parameter σ von der Zielgenauigkeit ab. Er kann durch die empirische Standardabweichung geschätzt werden. Im Folgenden soll

1. diese Hypothese *experimentell* geprüft werden
2. der Term der Gauß'schen Glockenfunktion aus zwei plausiblen Annahmen analytisch hergeleitet werden und zusätzlich
3. untersucht werden, wie sich der Abstand d der Treffer vom Ursprung verteilt

Wer die beim Experimentieren anfallenden Routinerechnungen an einen Rechner delegieren möchte, nutzt das Kalkulationsblatt zielscheibe.xls.

1 Pfeilewerfen

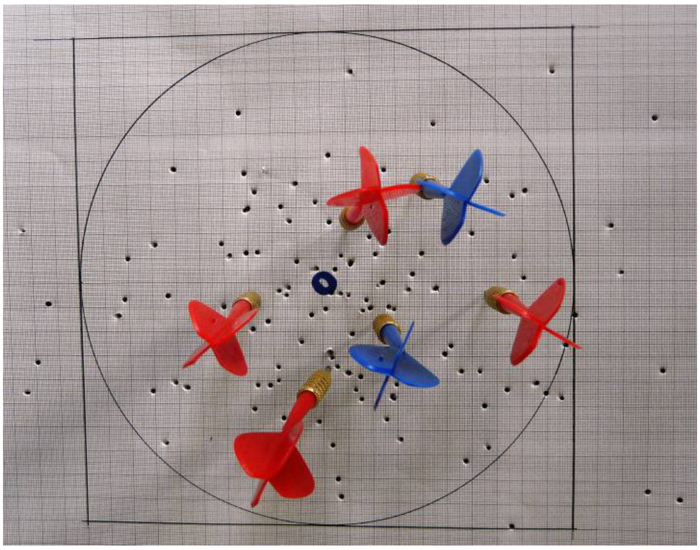


Abb. 1: Darts auf Millimeterpapier-Zielscheibe.
Das Ziel ☼ ist in der Mitte markiert.

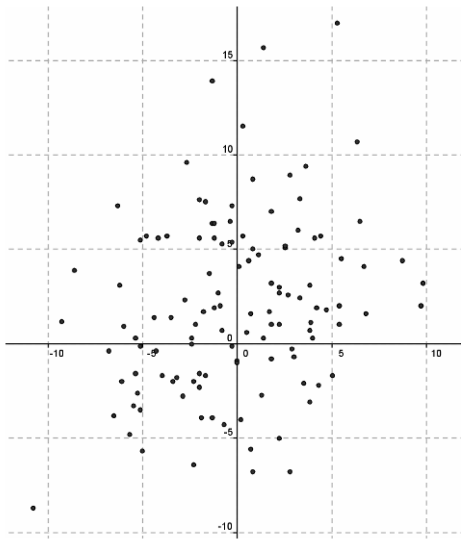
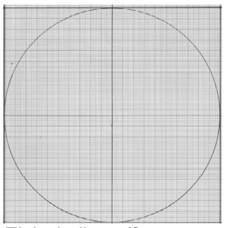


Abb. 2: Die Einstichpunkte in eine Tabellenkalkulation übertragen.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2012 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.



Zielscheibe.pdf

1.1 Vorbereitung des Experiments

Der Kurs wird in mehrere Teams aufgeteilt. Jedes Team bekommt eine Korkplatte (oder eine Pinwand) mit einer Millimeterpapier-Zielscheibe (zielscheibe.pdf). Für Kontrollauswertungen durch andere Gruppen werden 3 Zielscheiben passgenau übereinander gelegt.

1.2 Durchführung

Die Team-Mitglieder zielen nacheinander je mit 10 Darts aus 2 m Entfernung auf den Mittelpunkt der Zielscheibe. Das Wurffeld wird durch Tische, die der Absperrung dienen, gesichert. Damit die Darts sich nicht gegenseitig stören, werden sie nach je 10 Würfen eingesammelt. Die Einstichpunkte zählen, auch wenn ein Pfeil nicht stecken bleibt.

1.3 Auswertung

Die übrigen Team-Mitglieder kontrollieren die Ergebnisse anderer Gruppen durch Auswertung der durchlöcherte Zielscheiben-Kopien Oder sie studieren /eklären die in den Auswertungsvorlagen verwendeten Befehle

Zwei Mitglieder eines jeden Teams übertragen die Einstichkoordinaten der eigenen Zielscheibe in ein Tabellenkalkulationsblatt (zielscheibe.xls). Dabei entstehen digitale Kopien der Zielscheiben wie in Fig. 2 und die Verteilungen

- der x-Koordinaten (Zufallsgröße X, Fig. 3)
- der y-Koordinaten (Zufallsgröße Y, Fig. 4)
- der Abstände $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Ursprung (Zufallsgröße D, Fig. 5) zusammen mit den Mittelwerten und den Standardabweichungen.
- Die Wahrscheinlichkeiten, die sich damit aus der Gauss-Hypothese ergeben, werden durch das Kalkulationsblatt berechnet und (als Punkte wie in Fig. 3 bis Fig. 5) dargestellt. Man vergleicht sie mit den relativen Häufigkeiten.
- Wenn man das Zielscheibenwerfen als Wettkampf ausführen möchte, hat die Gruppe gewonnen, bei welcher die mittlere Abweichung $\overline{d}$ am kleinsten ist, s. u.

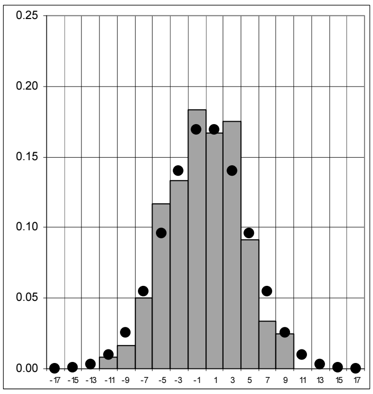


Fig. 3 x-Koordinaten $s_X = 4{,}02$

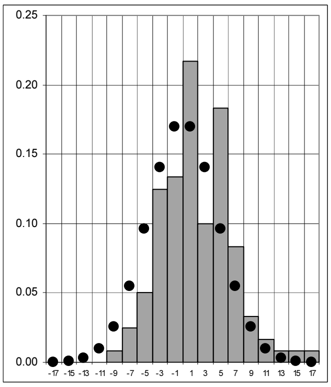


Fig. 4 y-Koordinaten $s_Y = 5{,}05$

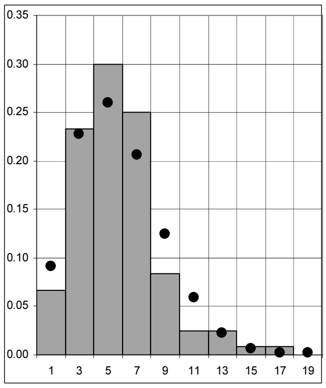


Fig. 5: Abstand D von der Kreismitte

Anmerkung: Wenn man für die x- und y- Koordinaten eine gemeinsame Standardabweichung berechnet, ergibt sich in Fig. 3 und 4 $s_{X-Y} = 4{,}56$. Wie gut Theorie und Wirklichkeit zusammenpassen, wenn man diesen Schätzwert für die Standardabweichung verwendet, zeigen die folgenden Tabellen, die durch die Kalkulationstabellen geliefert werden.

Mitte	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
x	0%	0%	0%	1%	2%	5%	12%	13%	18%	17%	18%	9%	3%	3%	0%	0%	0%	0%
y	0%	0%	0%	0%	1%	3%	5%	13%	13%	22%	10%	18%	8%	3%	2%	1%	1%	1%
Wk.	0%	0%	0%	1%	3%	5%	10%	14%	17%	17%	14%	10%	5%	3%	1%	0%	0%	0%

Relative Häufigkeiten der Abweichungen in x-, y-Richtung und Normalverteilung

Mitte	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
d	7%	23%	30%	25%	8%	3%	3%	1%	1%	0%
Wk.	9%	23%	26%	21%	12%	6%	2%	1%	0%	0%

Relative Häufigkeiten der Entfernung zu Ursprung und Wahrscheinlichkeitsmodell

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2012 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

2 Wie Gauß seine Normalverteilung entdeckt haben könnte

Ihre Aufgabe besteht darin, die folgenden Ausführungen in einer Kleingruppe so zu diskutieren, dass Sie die Gedanken und Zwischenrechnungen in eigenen Worten frei vortragen können.

2.1 Die Struktur des Terms der Gauß'schen Glockenfunktion

Das Dartspiel, bei dem man versucht, den Ursprung (0;0) der Zielscheibe zu treffen, hilft bei der Suche nach einer Formel für die Gauß'sche Normalverteilung: Man macht die folgenden plausiblen Annahmen:

- Die x- und die y-Koordinaten der Einschläge sind unabhängig voneinander und besitzen gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit der unbekannten Dichte f,
- die Verteilung ist rotationssymmetrisch um den Ursprung.

Aus der ersten Annahme folgt: Die Wahrscheinlichkeit, P dass ein Punkt in einem Quadrat mit Mittelpunkt M$(x;y)$ und Fläche $dx \cdot dy$ liegt, ist $P = f(x) \cdot dx \cdot f(y) \cdot dy$.
Wenn man das Koordinatensystem so um den Ursprung dreht, dass M auf der (neuen) x-Achse, aber nun im Abstand $\sqrt{x^2+y^2}$ vom Ursprung zu liegen kommt, erhält man $P = f(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot dx \cdot f(0) \cdot dy$.
Folglich muss für die gesuchte Dichte f gelten

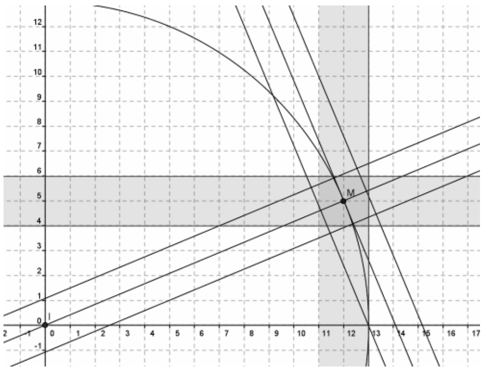


Abb. 5

$$f(x) \cdot f(y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot f(0) \text{ oder } \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{f(0)}.$$

Mit $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$ ergibt sich daraus $\bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y) = \bar{f}(\sqrt{x^2+y^2})$.

Setzt man y=x, so erhält man $\bar{f}(\sqrt{2} \cdot x) = \bar{f}(x)^2$.

Mit $\bar{f}(1) = a$ folgt $\bar{f}(\sqrt{2}) = a^2$, $\bar{f}(2) = a^4$, $\bar{f}(\sqrt{2} \cdot 2) = a^8$, $\bar{f}(4) = a^{16}$

und allgemein $\bar{f}(x) = a^{x^2}$.

Damit hat f tatsächlich die Struktur der Gauß-Funktion $f(x) = f(0) \cdot a^{x^2}$

Wenn man a als Potenz der Eulerschen Zahl e schreibt:: $a = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$, indem man $\sigma = \sqrt{\frac{-1}{2\ln(a)}}$ setzt, erhält man $f_{0;\sigma}(x) = f(0) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}$.

2.2 Der Normierungsfaktor

Mann kann das Dartspiel nutzen; um den Wert der Konstante f(0) durch Integrieren über Kreisringe zu bestimmen: Aus

$$1 = f(0)^2 \cdot \int_0^\infty 2\pi r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr = f(0)^2 \cdot 2\pi\sigma^2 \left[-e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} \right]_0^\infty = f(0)^2 \cdot \sigma^2 \cdot 2\pi$$

folgt nämlich $f(0) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$, also $f_{0;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}$.

Damit ist die Dichte der Verteilung der x- und y-Koordinaten beim Pfeilwerfen gefunden. Den Nachweis, dass der Parameter σ tatsächlich die Standardabweichung ist, dass also gilt

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 \cdot \varphi_{0;\sigma}(x) dx} = \sigma$$

führt man durch partielle Integration oder an Beispielen numerisch.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2012 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

3 Die Dichte des Abstandes D

Die Dichte der Zufallsgröße D (Abstand vom Ursprung) ergibt sich wie folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfeil in einer kleinen Fläche mit Inhalt dF im Abstand r vom Ursprung einschlägt, ist, wie oben ausgeführt

$$f(r)\cdot f(0)\cdot dF = \frac{1}{2\pi\cdot\sigma^2}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}\,dF \ .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil im Kreisring mit Radius r und Breite dr landet, erhält man mit der Kreisringfläche $2\pi\cdot r dr$ zu $2\pi\cdot r\cdot\frac{1}{2\pi\cdot\sigma^2}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma}r^2}dr = \frac{1}{\sigma^2}\cdot r\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}dr$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte von D ist damit

$$g(r) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot r\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2} \ .$$

Sie hat ihr Maximum an der Stelle $r=\sigma$. Am wahrscheinlichsten schlägt der Pfeil also in der Nähe des Kreisringes mit Radius σ ein. Der Erwartungswert von D ist aber etwas größer.

Man erhält $\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty r^2\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma$.

4 Das Pfeilewerfen als Wettkampf

Wenn man das Pfeilewerfen als Team-Wettkampf ausführt, interessiert der Gewinner. Als Qualitätsmaßstab für die Treffgenauigkeit bietet sich die gemeinsame empirische Standardabweichung der x- und y- Koordinaten $s_{X\text{-}Y}$ an - oder der mittlere Abstand $\overline{d}$ der Einstiche vom Ursprung. Die folgende Tabelle zeigt, welche Genauigkeiten man bei einer Wurfweite von 2 m erwarten kann.

Gruppe (Wurfzahl)	$s_{X\text{-}Y}$	$\overline{d}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot s_{X-Y}$
Nils (120)	4.56	5.67	5.72
Matthias (135)	6.24	7.33	7.82
Tobias (99)	5.01	6.11	6.28

Die Gruppe von Nils besaß die höchste, die von Tobias die geringste Treffergenauigkeit. Auch die bei Vorliegen der Normalverteilung gültige theoretische Beziehung

$\mu(D) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma_{X-Y}$ spiegelt sich in den experimentellen Daten wieder.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2012 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.