Flächeninhaltsbestimmung vor der Entdeckung des Hauptsatzes

Wenn man wie im Folgenden von stetigen Funktionen ausgeht, existieren alle diese Grenzwerte und sind gleich. Es genügt somit, lediglich einen Grenzwert zu bestimmen.

Der Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen ist als Grenzwert definiert (siehe Seite 71).

$A = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$.

Die dabei auftretenden Grenzwerte unendlicher Summen sind i. Allg. nur sehr schwer oder gar nicht bestimmbar. Die Bedeutung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung liegt darin, dass man mit seiner Hilfe diese Grenzwerte auf ganz andere und einfache Weise mithilfe von Stammfunktionen bestimmen kann.

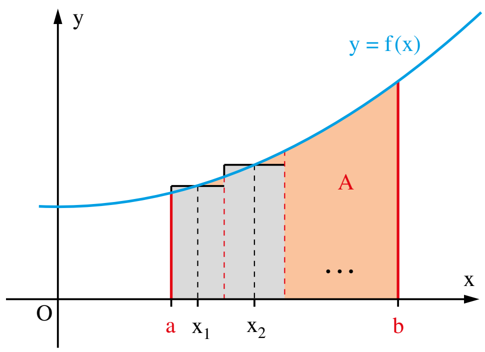


Fig. 1

Für die Mathematiker, die sich vor der Entdeckung des Hauptsatzes mit dem Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen beschäftigten, stellte die Bestimmung des Grenzwertes der dabei auftretenden unendlichen Summe ein großes Hindernis dar. Im Folgenden wird beschrieben, wie Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) und Fermat (1601 – 1665) jeweils durch einen geschickten Ansatz Flächeninhalte bestimmen konnten.

Exhaustion (lat.): Ausschöpfung

Die archimedische Exhaustion

Archimedes werden legendäre Sprüche zugeschrieben. Nach seiner Erfindung des Flaschenzugs: „Gebt mir einen festen Punkt und ich hebe die Welt aus den Angeln“. Zu einem plündernden römischen Soldaten, der ihn anschließend erschlagen haben soll: „Zerstöre meine Kreise nicht“.

Archimedes lebte in Syrakus auf Sizilien. Er wurde schon von seinen Zeitgenossen als bedeutender Gelehrter anerkannt. Während einer Reise nach Ägypten studierte er am berühmten Museion in Alexandria und lernte dort die Mathematiker Dositheos und Eratosthenes kennen. Sein überliefertes Werk „Die Quadratur der Parabel“ sind Briefe an Dositheos. Es heißt dort:

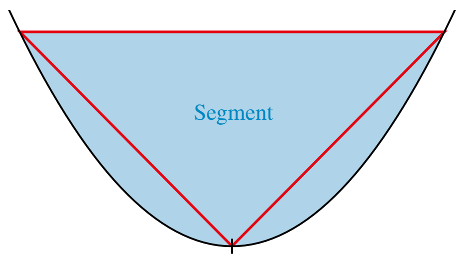


Fig. 2

> *Archimedes grüßt den Dositheos.*
> *. . . Von den Forschern, die sich früher mit Geometrie beschäftigten, versuchten einige zu zeigen, dass es möglich sei, eine geradlinig begrenzte Fläche zu konstruieren, die mit einem Kreis flächengleich ist . . . Dass aber je ein Mathematiker versucht hätte, die Fläche eines Parabelsegments zu quadrieren, wie es mir gelungen ist, ist mir nicht bekannt. Ich zeige nämlich, dass der Inhalt jedes Parabelsegments um ein Drittel größer ist als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.*

1 Was bedeutet im Text der Ausdruck „die Fläche eines Parabelsegments quadrieren“? Ist das Problem der Quadratur des Kreises heute gelöst?

2 Bestätigen Sie mit den Mitteln der Integralrechnung die Behauptung von Archimedes über den Flächeninhalt eines Parabelsegments. Führen Sie dazu ein geeignetes Koordinatensystem ein.

Im Folgenden soll das Ergebnis von Archimedes mit der von ihm verwendeten Methode, also ohne Verwendung der Integralrechnung, hergeleitet werden. Das Besondere dabei ist, dass man nicht auf die für die Streifenmethode typischen komplizierten Potenzsummen geführt wird, sondern lediglich auf eine geometrische Reihe. Dasselbe gilt für das anschließend beschriebene Vorgehen von Fermat.

Autor: Dieter Brandt, Hans Freudigmann u.a.
Quellen: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, ISBN-13: 978-3-12-733120-2
Seite aus: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS ISBN-13: 978-3-12-733120-2

Die Idee von ARCHIMEDES besteht darin, das Parabelsegment mit einer Folge von Dreiecken „auszuschöpfen“ (blau, grün, rot, usw. in Fig. 1). Aus Symmetriegründen kann man sich auf das halbe Segment beschränken. Zur Berechnung des Inhalts A des halben Parabelsegments muss der Grenzwert $A = \lim\limits_{n\to\infty}[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n]$ bestimmt werden. Die Behauptung von ARCHIMEDES lautet dann: $A = \frac{4}{3}A_1$.

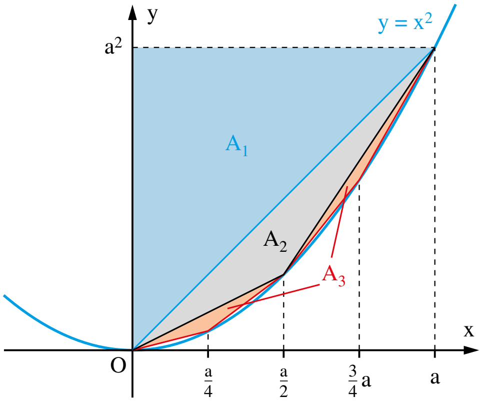


Fig. 1

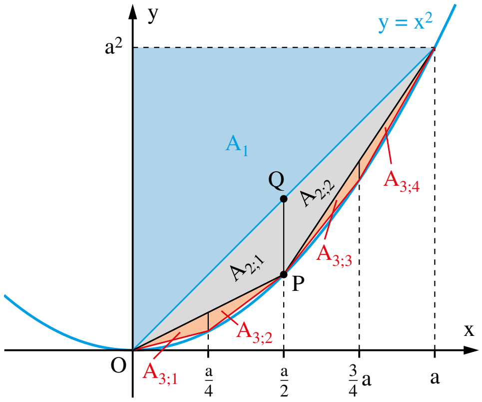
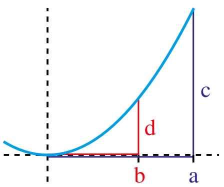


Fig. 2

ARCHIMEDES hatte natürlich kein Koordinatensystem zur Verfügung, das uns die Rechnung wesentlich vereinfacht. Er arbeitete mit den für die Parabel gültigen Verhältnisgleichungen, z. B. $c : d = a^2 : b^2$.



$A_1 = \frac{a^3}{2}$; $A_2 = \frac{a^3}{8}$; $A_3 = \frac{a^3}{32}$; $A_4 = ?$

Zur Bestimmung des Grenzwertes werden zunächst die Flächeninhalte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ berechnet.
Für A_1 gilt: $A_1 = \frac{1}{2}a^3$.
Zur Bestimmung von A_2 unterteilt man das grün gefärbte Dreieck in zwei Dreiecke mit gleicher Grundseite PQ und gleicher Höhe der Länge $\frac{a}{2}$ (Fig. 2). Für die y-Werte von P und Q gilt:
$y_P = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ und $y_Q = \frac{1}{2}a^2$.
Für $\overline{PQ}$ gilt damit: $\overline{PQ} = \frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.
Für den Inhalt eines grünen Teildreiecks ergibt sich: $A_{2;1} = A_{2;2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{16}a^3$.
Also ist $A_2 = \frac{1}{8}a^3$.

3 a) Zeigen Sie: $A_3 = A_{3;1} + A_{3;2} + A_{3;3} + A_{3;4} = 4\cdot\frac{1}{128}a^3 = \frac{1}{32}a^3$.
b) Formulieren Sie eine Vermutung über die Flächeninhalte A_4, A_5, und A_n.

Hier liegt formal ein Beweis mit vollständiger Induktion vor.

Behauptung:
$A_n = \frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Induktionsanfang:
$A_1 = \frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{a^3}{2}$ ist richtig.

Induktionsschritt:
Aus $A_n = \frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ folgt $A_{n+1} = \frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ wird nebenstehend gezeigt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die formale Durchführung verzichtet.

Eine entscheidende Stelle im Gedankengang von ARCHIMEDES ist der Nachweis der Beziehung $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$. Dazu zeigt man anhand von Fig. 3: $A_{PSQ} + A_{QTR} = \frac{1}{4}A_{PQR}$.

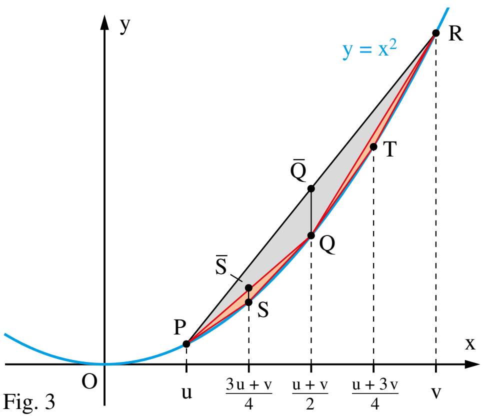


Fig. 3

Bestimmung von A_{PQR}:
$\overline{Q}$ hat den y-Wert $\frac{u^2+v^2}{2}$,
Q hat den y-Wert $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$. Also gilt
$A_{PQR} = \left[\frac{u^2+v^2}{2} - \left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{v-u}{2}$. (*)
Bestimmung von A_{PSQ}:
$\overline{S}$ hat den y-Wert $\frac{u^2 + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2}{2}$,
S hat den y-Wert $\left(\frac{3u+v}{4}\right)^2$. Also gilt
$A_{PSQ} = \left[\frac{u^2 + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{3u+v}{4}\right)^2\right]\cdot\frac{v-u}{4}$. (*)

Autor: Dieter Brandt, Hans Freudigmann u.a.
Quellen: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, ISBN-13: 978-3-12-733120-2
Seite aus: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS
ISBN-13: 978-3-12-733120-2

4 a) Zeigen Sie durch Umformung der Terme (*): $A_{PQR} = \frac{(v-u)^3}{8}$ und $A_{PSQ} = \frac{(v-u)^3}{64}$.
b) Weisen Sie entsprechend nach: $A_{QTR} = \frac{(u-v)^3}{64}$.
c) Wie folgt aus a) und b) die Behauptung $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$?

Summenformel für geometrische Reihen:
$(1+q+q^2+q^3+\ldots) = \frac{1}{1-q}$
für $0 \leqq q < 1$.

5 a) Zeigen Sie, dass für die unendliche Summe A der Dreiecksinhalte gilt:
$A = \frac{1}{2}a^3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)$ und $A = \frac{2}{3}a^3$.
b) Wie folgt daraus die Behauptung des ARCHIMEDES: $A = \frac{4}{3}A_1$?

FERMAT kannte das $\int$-Zeichen nicht. Es wird hier nur wegen der einfachen Formulierung verwendet.

Die FERMAT'sche Berechnung des Integrals $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

Das Ziel von FERMAT war es, die Inhalte von Flächen unter dem Graphen der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^2}$ zu bestimmen. Er hat dieses Ziel mit der Idee von ARCHIMEDES erreicht. Dieser hatte das Parabelsegment mit Dreiecken „ausgeschöpft", um bei der Grenzwertbestimmung auf eine geometrische Reihe zu kommen, deren Grenzwert bekannt war. Entsprechend suchte FERMAT nach einer „Ausschöpfung", bei der die Grenzwertbestimmung ebenfalls auf eine geometrische Reihe führt. Dazu nähert er die nach rechts unbegrenzte Fläche unter dem Graphen der Hyperbel durch Rechtecke verschiedener Breite an (Fig. 1).

FERMAT (1601–1665) lebte fast 2000 Jahre nach ARCHIMEDES. Während dieser Zeit, dem Mittelalter, gab es in Europa keine wesentlichen mathematischen Entdeckungen. Das wird durch die beiden dargestellten Methoden bestätigt. Die großen Fortschritte in den Wissenschaften begannen erst im 17. Jahrhundert mit dem Zeitalter des Rationalismus und der Aufklärung.

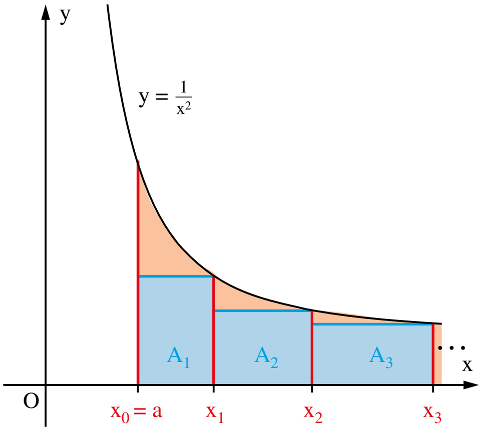


Fig. 1

Die Breite der Rechtecke wird mit $h > 1$ so festgelegt:
$x_0 = a;\ x_1 = ah;\ x_2 = ah^2$ usw.
Für den Inhalt der Rechtecke gilt:
$A_1 = (ah - a)\frac{1}{(ah)^2} = \frac{h-1}{ah^2}$
$A_2 = (ah^2 - ah)\frac{1}{(ah^2)^2} = \frac{h-1}{ah^3}$
$A_3 = (ah^3 - ah^2)\frac{1}{(ah^3)^2} = \frac{h-1}{ah^4}$ usw.

Für die unendliche Summe der Rechteckinhalte gilt für festes $h > 1$:
$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \frac{h-1}{ah^2}\left(1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \ldots\right)$
$= \frac{h-1}{ah^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{h}} = \frac{h-1}{ah^2} \cdot \frac{h}{h-1} = \frac{1}{ah}.$

Daraus folgt: $\lim\limits_{h \to 1}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = \lim\limits_{h \to 1}\frac{1}{ah} = \frac{1}{a}$.
Damit hat die von $x_0 = a$ nach rechts hin unbegrenzte Fläche den Inhalt $\frac{1}{a}$. Für den Inhalt der Fläche über dem Intervall [a; b] gilt somit $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

6 Zeigen Sie mit der Methode von FERMAT für $0 < a < b$:
a) $\int_a^b \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}$ b) $\int_a^b \frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3}$ c) $\int_a^b \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{(k-1)\cdot a^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)\cdot b^{k-1}}$ mit $k > 1$.

Bei Aufgabe 7 kostet es viel Mühe, bis der Inhalt A des Parabelsegments bestimmt ist:
$A = \frac{3}{4}a^4$.
Mithilfe der Integralrechnung ist das eine Kleinigkeit.

7 Mit der Methode von ARCHIMEDES kann man auch den Inhalt A des Parabelsegments für die Parabel mit der Gleichung $y = x^3$ bestimmen.
a) Zeigen Sie: $A_1 = \frac{1}{2}a^4$; $A_2 = \frac{3}{16}a^4$; $A_3 = \frac{3}{64}a^4$; $A_4 = \frac{3}{256}a^4$.
b) Weisen Sie nach: Für $n \geqq 2$ gilt: $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$.
Zeigen Sie damit: $\lim\limits_{n \to \infty}(A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = \frac{1}{4}a^4$ und $A = \frac{3}{4}a^4$.

Autor: Dieter Brandt, Hans Freudigmann u.a.
Quellen: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, ISBN-13: 978-3-12-733120-2
Seite aus: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS ISBN-13: 978-3-12-733120-2