6 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Von der linearen Gleichung zum linearen Gleichungssystem

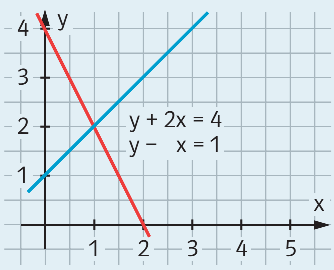
Eine Gleichung, die sich auf die Form $Ax + By = C$ (A und B nicht beide null) bringen lässt, heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen**.
Durch das Zusammenkoppeln von mehreren linearen Gleichungen entsteht ein **lineares Gleichungssystem** oder kurz **LGS**. Ein Zahlenpaar (x; y) heißt **Lösung eines LGS** mit zwei Variablen, falls das Paar **jede Gleichung** des Systems erfüllt.
Da die Lösungsmenge jeder einzelnen Gleichung durch die Punkte einer Geraden veranschaulicht werden kann, wird die Lösung eines LGS durch diejenigen Punkte repräsentiert, die sowohl auf der einen als auch auf der anderen Geraden liegen.

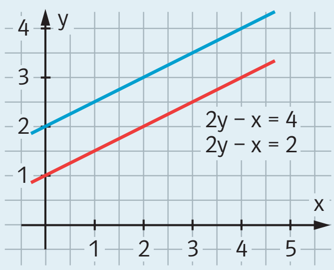
Für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen ergeben sich anhand der Veranschaulichung folgende drei Möglichkeiten:

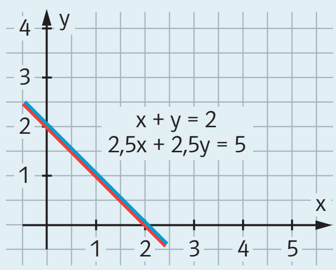
Die Geraden schneiden sich in einem Punkt; das Gleichungssystem hat **genau eine** Lösung.

Die Geraden sind parallel und verschieden; das Gleichungssystem hat **keine** Lösung.

Die Geraden fallen zusammen; das Gleichungssystem hat **unendlich viele** Lösungen.







Aufgaben

1 Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichung in einem Koordinatensystem. Geben Sie – falls möglich – die Steigung und den y-Achsenabschnitt der zugehörigen Geraden an.

a) $y = -x - 2$ b) $2y - x = 2$ c) $x - 3y = 4$ d) $3x = 2 - 4y$
e) $0 = 4x - 10y - 5$ f) $2x - 4 = 0$ g) $9 = -3y$ h) $5 = 2(x + y)$
i) $y - \frac{x-1}{4} = 0$ j) $3(x - y) = 5 - 3y$ k) $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{3}{8} = 0$ l) $-\frac{2-y}{3} = 2x$

2 Prüfen Sie, ob das Zahlenpaar eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist.

a) $x + y = 10$
$x - y = 9$; $\left(9\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

b) $2x + y = -1$
$x + 2y = 5$; $(-2; 3)$

c) $4x - 3y = 10$
$6x + y = 0$; $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$

d) $2x - 5y + 2{,}5 = 0$
$60x + 140y + 17 = 0$ $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{5}\right)$

3 Lösen Sie das LGS zeichnerisch. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen.

a) $y = 2x - 3$
$y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) $2x + 5y = -4$
$5x + 2y = 11$

c) $2x = 3y - 3$
$4x - 5y + 7 = 0$

4 Entscheiden Sie zeichnerisch, wie viele Lösungen das System hat.

a) $2y - x = 1$
$y - 0{,}5x = -4$

b) $2y - 3x = -2$
$4y + x = 7$

c) $y - 2x = 1{,}5$
$2y - 4x = 3$

d) $x - 1 = 0$
$y - 1 = 0$

Das Additionsverfahren

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen kann rechnerisch nach dem **Additionsverfahren** gelöst werden:

1) Jede Gleichung wird so umgeformt, dass der x- oder y-Koeffizient der ersten Gleichung und der entsprechende Koeffizient in der zweiten Gleichung Gegenzahlen sind.
2) Die zweite Gleichung wird durch die Summe beider Gleichungen ersetzt. Dabei wird eine Variable **eliminiert**.
3) Aus der erhaltenen **Stufenform** wird die Lösungsmenge des Systems bestimmt.

Beispiele

a)

$5x - 2y = 24$	(I)	Die Koeffizienten von x sollen Gegenzahlen werden.
$x + 3y = -2$	(II)	
$5x - 2y = 24$	(I)	1. Schritt: Man schreibt (I) ab; durch Multiplikation von
$-5x - 15y = 10$	(III)	(II) mit −5 erhält man Gleichung (III).
$5x - 2y = 24$	(I)	2. Schritt: Man ersetzt (III) durch die „Summe“ der
$-17y = 34$	(IV)	Gleichungen: (IV) = (I) + (III).
$y = -2$		3. Schritt: Aus (IV) berechnet man den y-Wert und durch
$5x - 2 \cdot (-2) = 24$		Einsetzen in (I) auch den x-Wert.

Lösung:
(4; −2)

b)

$6x + 5y = -36$	(I)	
$-7x + 3y = -11$	(II)	
$42x + 35y = -252$	(III)	$\mid$ (I) · 7
$-42x + 18y = -66$	(IV)	$\mid$ (II) · 6
$6x + 5y = -36$	(I)	
$53y = -318$	(V)	$\mid$ (III) + (IV)
$y = -6$	(VI)	$\mid$ (V) : 53
$x = -1$		$\mid$ (VI) in (I)

Lösung:
(−1; −6)

c)

$4x - y = -23$	(I)	
$3x + 4y = -3$	(II)	
$16x - 4y = -92$	(III)	$\mid$ (I) · 4
$3x + 4y = -3$	(II)	
$4x - y = -23$	(I)	
$19x = -95$	(IV)	$\mid$ (II) + (III)
$x = -5$	(V)	$\mid$ (IV) : 19
$y = 3$		$\mid$ (V) in (I)

Lösung:
(−5; 3)

Bemerkung:
In Beispiel c) wird anders als bei a) und b) nicht die Variable x, sondern y eliminiert. Je nach Art der Koeffizienten kann dies schneller zum Ziel führen.

Aufgaben

5 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Additionsverfahren.

a) $4x - 4y = 28$; $-2x - 3y = -4$
b) $2x - 3y = 2$; $x - 4y = -4$
c) $5x - 6y = 8$; $2x + 3y = 5$
d) $3x + 2y = 0$; $7x + 10y = 4$

6
a) $4x + 7y = 21$; $3x - 4y = 25$
b) $2x - 6y = 3$; $3x - 4y = 11$
c) $7x + 3y = 69$; $5x - 2y = 12$
d) $-5x + 2y = 25$; $3x - 5y = 23$

7 Bestimmen Sie zunächst die Gleichungen so, dass die Koeffizienten ganzzahlig werden, und lösen Sie dann das Gleichungssystem.

a) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = -2$; $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y = 3$; $x - \frac{3}{2}y = 2$
c) $0{,}4x + 0{,}5y = -0{,}2$; $1{,}5x - 0{,}2y = 3{,}4$

Basiswissen

$y = \boxed{-5x + 7}$

$2x + y = 4$

Das Einsetzungsverfahren

Beispiel

$$
\begin{aligned}
y &= -5x + 7\\
2x + y &= 4\\
\hline
2x + (-5x + 7) &= 4\\
-3x &= -3\\
x &= 1\\
y &= -5 \cdot 1 + 7 = 2
\end{aligned}
$$

■ Lösung:
(1; 2)

Die erste Gleichung des LGS weist die besondere Form auf, dass sie nach y aufgelöst ist. Somit kann die rechte Seite der ersten Gleichung in die zweite Gleichung eingesetzt werden. Es ergibt sich dann eine Gleichung für die Variable x.
Durch Einsetzen des berechneten x-Wertes in die erste Gleichung erhält man den y-Wert.

Das Gleichsetzungsverfahren

Beispiel

$$
\begin{aligned}
y &= 3x + 4\\
y &= -2x - 1\\
\hline
3x + 4 &= -2x - 1\\
5x &= -5\\
x &= -1\\
y &= 3 \cdot (-1) + 4 = 1
\end{aligned}
$$

■ Lösung:
(−1; 1)

Sind beide Gleichungen nach y aufgelöst, können die rechten Seiten einander gleichgesetzt werden.
Man erhält somit eine Gleichung für die Variable x.
Wie beim Einsetzungsverfahren erhält man durch Einsetzen des berechneten x-Wertes in eine der beiden Gleichungen den y-Wert.

Bemerkungen:
- Das Einsetzungsverfahren ist dann vorteilhaft, wenn eine Gleichung des linearen Gleichungssystems bereits nach y aufgelöst ist.
- Alternativ könnte eine Gleichung auch nach x aufgelöst sein. Dann wären gewissermaßen die Rollen von x und y vertauscht, das heißt nach dem Einsetzen würde sich eine Gleichung für die Variable y ergeben.
- Das Gleichsetzungsverfahren ist günstig, wenn beide Gleichungen des linearen Gleichungssystems nach y aufgelöst sind.
- Das Gleichsetzungsverfahren wird auch verwendet, wenn der Schnittpunkt zweier Geraden rechnerisch bestimmt werden soll und beide Geraden in der Hauptform gegeben sind.

Aufgaben

8 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren.

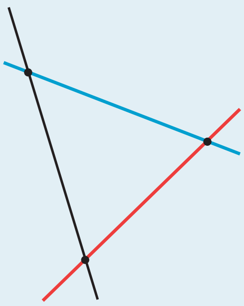
a) $y = 2x + 6$; $3x + y = 1$
b) $3x - y = 9$; $y = 2x - 6$
c) $4x - 2y = 12$; $y = 3x + 1$
d) $y = 2x + 5$; $-4x + 2y = 12$

9 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $y = 2x + 10$; $y = -x + 1$
b) $y = -3x + 6$; $y = 2x + 4$
c) $y = 12$; $y = 3x - 3$
d) $y = 3x - 2$; $y = -5x + 2$

10 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

a) $3x - 4y = 9$; $-x - 2y = -8$
b) $y = 4x - 7$; $-8x + 2y = -14$
c) $y = -4x + 2$; $y = 2x - 0{,}5$
d) $x = 3y - 1$; $2x - y = 3$



11 Die zu den drei Gleichungen gehörenden Geraden bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

a) $13y + 2x = 32$; $5x + 4y = 80$; $5y = 8x - 14$
b) $15y = -3x + 15$; $y + 2x + 3{,}5 = 0$; $7y = -5x + 25$