Kapitel XV

Checkliste

	Das kann ich gut.	Da bin ich fast sicher.	Ich bin noch unsicher.	Das kann ich noch nicht.
1. Ich kann „geometrische Wahrscheinlichkeiten" bestimmen und den Bezug zu relativen Häufigkeiten herstellen.				
2. Ich kann Wahrscheinlichkeiten durch Flächenvergleiche berechnen.				
3. Ich kann mit Integralen rechnen.				
4. Ich kann Mittelwerte und empirische Standardabweichungen sowohl aus Urlisten als auch aus Häufigkeitsverteilungen berechnen.				

Aufgaben

Die Aufgaben 1–4 beziehen sich auf die Punkte 1–4 der Checkliste.

1 Fig. 1 zeigt das Einheitsquadrat, den Graphen P der Normalparabel mit $f(x) = x^2$ und den Kreis K mit Durchmesser 1 und Mittelpunkt $M(0{,}5\,|\,0{,}5)$.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Einheitsquadrat liegender „Zufallpunkt" $Z(x\,|\,y)$
(1) innerhalb des Kreises K liegt.
(2) unterhalb der Normalparabel liegt.
b) Mit einem Zufallsgenerator wurden 1000 Zufallspunkte Z im Einheitsquadrat erzeugt.
788 der 1000 Punkte liegen innerhalb des Kreises K und 321 der 1000 Punkte liegen „unter" der Normalparabel mit $f(x) = x^2$.
Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den Rechnungen aus a) und kommentieren Sie.

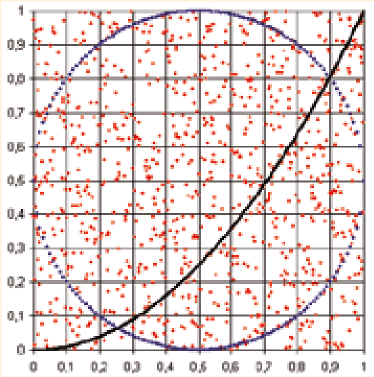

Fig. 1

Online-Code ha2ui2
kreisparabel.xls enthält eine Simulation zu dieser Aufgabe.

2 Eine 2-€-Münze (Durchmesser 2,6 cm) wird zufällig auf einen quadratischen Bierdeckel (Kantenlänge 9 cm) platziert.
a) Wie interpretieren Sie das Wort „zufällig"?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überdeckt die Münze den Mittelpunkt des Bierdeckels?

3 a) Berechnen Sie $\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx$ und $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$.
b) Mit welchem Faktor müssen Sie den Integranden multiplizieren, damit das Integral den Wert 1 bekommt?
c) Lösen Sie die Gleichung $\int_0^t e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$ nach t auf.

4 Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung der nebenstehenden
a) Urliste.
b) Häufigkeitsverteilung.

Urliste	Häufigkeitsverteilung	
38,08	1	8 %
46,89	2	9 %
67,94	3	26 %
81,24	4	23 %
0,71	5	16 %
1,43	6	12 %
3,73	7	5 %
42,25	8	1 %
93,89	9	0 %
85,35	10	0 %

Kapitel XV, Check-in

1

a) (1) Der Kreis hat die Fläche $0{,}5^2 \cdot \pi \approx 0{,}785$, also etwa 78,5 % der Fläche des Einheitsquadrates. Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 78,5 %.
(2) Unter der Parabel liegt die Fläche $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, dies sind ca. 33,3 % der Fläche des Einheitsquadrats. Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 33,3 %.
b) Die relativen Häufigkeiten entsprechen (bis auf Zufallsschwankungen) den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten.

2

a) „Zufällig" bedeutet hier: Der Mittelpunkt der Münze befindet sich überall auf dem Bierdeckel mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
b) Der Mittelpunkt der Münze muss in einem Kreis mit Radius 1,3 cm um den Mittelpunkt des Bierdeckels liegen, damit die Münze den Mittelpunkt überdeckt. Dieser Kreis hat eine Fläche von $5{,}31\,\text{cm}^2$. Das entspricht 6,55 % der Bierdeckelfläche von $81\,\text{cm}^2$.

3

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \approx 0{,}29$

$\int_1^t \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{3}$

b) Man multipliziert den Integranden mit $\frac{24}{7}$ bzw. mit 3, dann erhält das jeweilige Integral den Wert 1.
c) Es gilt $\int_0^t e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$.
Man löst $1 - e^{-t} = \frac{1}{2}$ nach t auf und erhält $t = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}693$.

4

a) Der Mittelwert ist $\overline{x} = \frac{38{,}08 + \ldots + 85{,}35}{10} \approx 46{,}15$
die Standardabweichung ist $s = \sqrt{\frac{(38{,}08 - \overline{x})^2 + \ldots + (85{,}35 - \overline{x})^2}{10}} \approx 33{,}89$
b) Der Mittelwert ist $\overline{x} = 0{,}08 \cdot 1 + \ldots + 0{,}01 \cdot 8 = 3{,}91$
die Standardabweichung ist
$s = \sqrt{0{,}08 \cdot (1 - \overline{x})^2 + \ldots + 0{,}01(8 - \overline{x})^2} \approx 1{,}61$