Kapitel V

Checkliste

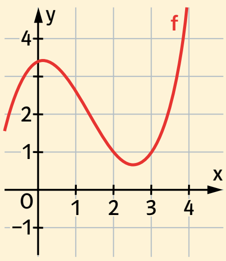
	Das kann ich gut.	Da bin ich fast sicher.	Ich bin noch unsicher.	Das kann ich noch nicht.
1. Ich kann zu einem Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren.				
2. Ich kann mithilfe des Logarithmus Exponentialgleichungen lösen.				
3. Ich kann Ableitungen mithilfe von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel berechnen.				
4. Ich kann zu Bruchtermen den maximalen Definitionsbereich bestimmen.				
5. Ich kann mithilfe von Integralen von ganzrationalen Funktionen Flächen berechnen.				
6. Ich kann die Bedeutung von Integralen im Sachzusammenhang erläutern.				
7. Ich kenne grundlegende Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion.				
8. Ich kenne grundlegende Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion.				

Aufgaben

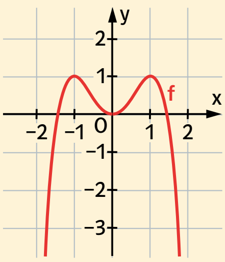
Die Aufgaben 1–8 beziehen sich auf die Punkte 1–8 der Checkliste.

1 Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Ableitungsfunktion f′ zu den gegebenen Graphen von f.

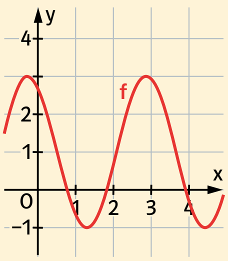
a)



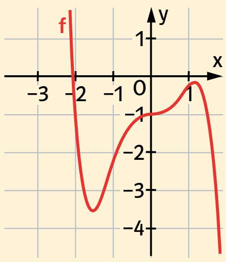
b)



c)



d)



2 Bestimmen Sie mithilfe des Logarithmus die Lösung der Gleichung.

a) $3^x = 4$ b) $2^{x+2} = 7$ c) $4 \cdot 4^{x+2} = 8$

3 Bestimmen Sie f′.

a) Produktregel

(1) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ (2) $f(x) = 2\ln(x) \cdot (x^3 - 4x)$

(3) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$ (4) $f(x) = e \cdot (x + 1) \cdot \sqrt{x}$

b) Quotientenregel

(1) $f(x) = \frac{2 + x^2}{4x}$ (2) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{5 - 2x}$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 7}$ (4) $f(x) = \left(\frac{8x - 2}{x + 1}\right)^2$

c) Kettenregel

(1) $f(x) = (2x - 5)^3$ (2) $f(x) = -\frac{2}{(x + 1)^4}$

(3) $f(x) = 3\sqrt{2x^2 + 1}$ (4) $f(x) = 7\ln\left(0{,}5x^2\right)$

4 Bestimmen Sie alle Zahlen, für die der Term nicht definiert ist.

a) $\frac{6}{x-7}$ b) $\frac{-1}{8+4x}$ c) $\frac{x-1}{(x-2)^2}$

d) $\frac{x^2}{x^2-9}$ e) $\frac{x-1}{x-1}$ f) $\frac{1}{(x^2+1)\cdot(x-1)^2}$

5 Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen werden.

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = x^3 - x^2$ c) $f(x) = 0{,}5x^3 - x$

6 Die Funktion f mit $f(t) = -0{,}03t^2 + 0{,}04t + 1$ kann für $0 \leqq t \leqq 6$ verwendet werden, um näherungsweise die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze zum Zeitpunkt t zu berechnen (t in Monaten, f(t) Höhenzuwachs in dm pro Monat). Zum Zeitpunkt t = 0 ist die Pflanze 1,5 dm hoch. Berechnen Sie, wie hoch die Pflanze nach 6 Monaten ist.

7 a) Ist die Aussage zur Funktion f mit $f(x) = e^x$ wahr oder falsch?

(1) $f(0) \approx e$.

(2) f ist streng monoton steigend.

(3) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) Es gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$.

b) Ordnen Sie jeder Funktion einen der abgebildeten Graphen zu.

$f(x) = e^x$

$g(x) = e^{-x}$

$h(x) = -e^x$

$i(x) = e^x - 1$

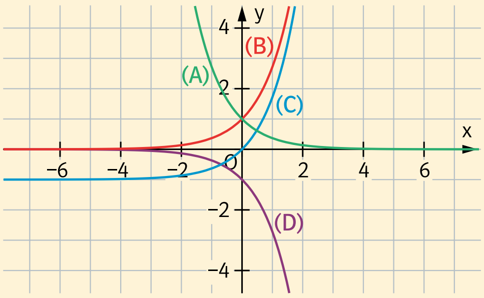


Fig. 1

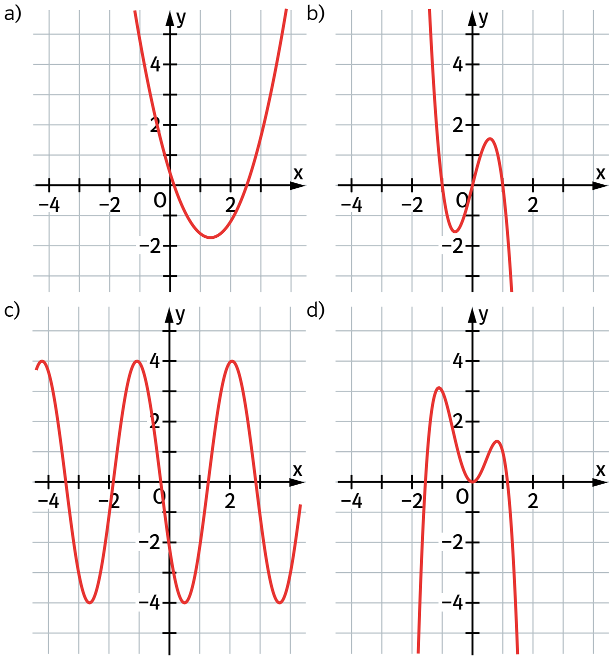
8 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$.

a) Geben Sie für die Funktionen f und g die Periodenlänge, die Amplitude, die Nullstellen im Intervall $[0;\, 2\pi]$ sowie die Ableitung an.

b) Skizzieren Sie einen Graphen von f und von g im Intervall $[-2\pi;\; 2\pi]$.

Kapitel V, Check-in

1



2

a) $x = \log_3(4) = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1{,}26$

b) $x = \log_2(7) - 2 = \frac{\log(7)}{\log(2)} - 2 \approx 0{,}807$

c) $x = \log_4(2) - 2 = 0{,}5 - 2 = -1{,}5$

3

a) (1) $f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$ (2) $f'(x) = 2x^2 - 8 + 2\ln(x) \cdot (3x^2 - 4)$

(3) $f'(x) = 3\sqrt{x}$ (4) $f'(x) = \frac{3e \cdot x + e}{2\sqrt{x}}$

b) (1) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{-2 + x^2}{4x^2}$

(2) $f'(x) = \frac{(5 - 2x) \cdot 4x \cdot (x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2}{(5 - 2x)^2} = -\frac{2(x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 10x - 1)}{(5 - 2x)^2}$

(3) $f'(x) = \frac{(3x - 7) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \sqrt{x}}{(3x - 7)^2} = -\frac{3x + 7}{2\sqrt{x} \cdot (3x - 7)^2}$

(4) $f'(x) = \frac{2 \cdot 8(8x - 2) \cdot (x + 1)^2 - (8x - 2)^2 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{40 \cdot (4x - 1)}{(x + 1)^3}$

c) (1) $u(x) = x^3$; $v(x) = 2x - 5$; $f'(x) = 6(2x - 5)^2$

(2) $u(x) = -\frac{2}{x^4}$; $v(x) = x + 1$; $f'(x) = \frac{8}{(x + 1)^5}$

(3) $u(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$; $v(x) = 2x^2 + 1$; $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(4) $u(x) = 7\ln(x)$; $v(x) = \frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = \frac{14}{x}$

4

a) 7 b) −2 c) 2

d) 3; −3 e) 1 f) 1

5

a) $10\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten b) $\frac{1}{12}$ Flächeneinheiten

c) 2 Flächen mit je 0,5 Flächeneinheiten, also insgesamt 1 Flächeneinheit.

6

$$\int_0^6 (-0{,}03t^2 + 0{,}04t + 1)\,dt = 4{,}56$$

Nach 6 Monaten ist die Pflanze 4,56 dm gewachsen, sie ist dann also 6,06 dm hoch.

7

a) (1) Falsch. $f(0) = e^0 = 1$.

(2) Wahr.

(3) Wahr.

(4) Falsch. Es gilt $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$

b) Zur Funktion $f(x) = e^x$ gehört der Graph B.

Zur Funktion $g(x) = e^{-x}$ gehört der Graph A.

Zur Funktion $h(x) = -e^x$ gehört der Graph D.

Zur Funktion $i(x) = e^x - 1$ gehört der Graph C.

8

a) $f(x) = \sin(x)$: Periodenlänge 2π; Amplitude 1; Nullstellen 0; π; 2π; Ableitung $f'(x) = \cos(x)$.

$g(x) = \cos(x)$: Periodenlänge 2π; Amplitude 1; Nullstellen $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; Ableitung $g'(x) = -\sin(x)$.

b)