Kapitel IV

Checkliste

	Das kann ich gut.	Da bin ich fast sicher.	Ich bin noch unsicher.	Das kann ich noch nicht.
1. Ich kann die Ableitung von Funktionen, insbesondere mithilfe der Kettenregel und der Produktregel, bestimmen.				
2. Ich kann mittlere und momentane Änderungsraten bei Anwendungen interpretieren.				
3. Ich kann den Graphen von f' skizzieren, wenn der Graph von f gegeben ist und umgekehrt.				
4. Ich kann Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen der Ableitungsfunktion f' erkennen und beschreiben.				
5. Ich kann Flächeninhalte von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken berechnen.				
6. Ich kann aus einem Diagramm mit der Geschwindigkeit eines Autos, Rückschlüsse über die gefahrene Strecke ziehen.				

Aufgaben

Die Aufgaben 1–6 beziehen sich auf die Punkte 1–6 der Checkliste.

1 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x}$ c) $f(x) = 0{,}5 \cdot \cos(x) - 1$

d) $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$ e) $f(x) = 40 \cdot e^{0{,}2x - 1}$ f) $f(x) = \frac{2\sin(2x)}{(x-1)^2}$

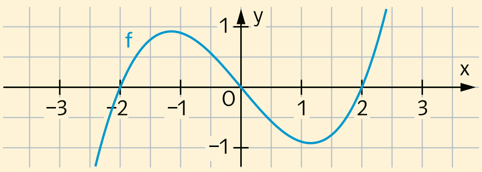
2 Ein Schlitten fährt einen Hang hinunter. Er hat nach der Zeit t die Strecke $f(t) = 0{,}1 \cdot t^2$ zurückgelegt ($t \geqq 0$ in Sekunden; f(t) in Metern).

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [2; 5] und die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$.

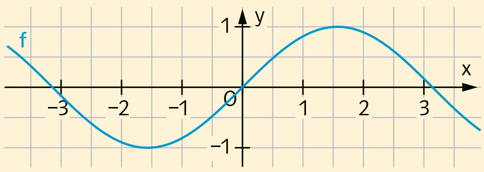
b) Erläutern Sie die Bedeutung der in Teilaufgabe a) berechneten Größen im Zusammenhang mit der Schlittenfahrt. Welche Folgerungen kann man über den Verlauf der Schlittenfahrt ziehen?

3 a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zur Funktion f.

(1)

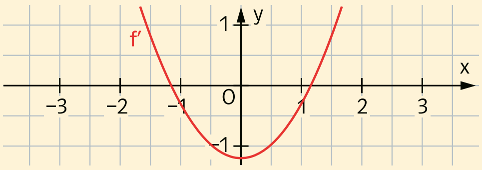


(2)

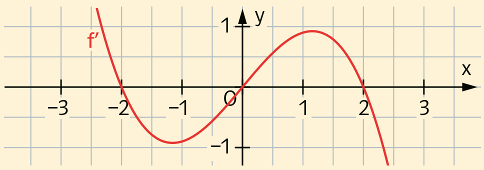


b) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Funktion f.

(3)



(4)



4 In Fig. 1 ist der Graph der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f gegeben. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie.

a) Der Graph von f hat im Intervall $[-2; -1]$ einen Hochpunkt.

b) Die Funktion f ist im Intervall $[-2; -1]$ streng monoton steigend.

c) Der Graph von f hat im abgebildeten Bereich einen Tiefpunkt bei $x_1 = -2{,}5$.

d) Es gibt an den Graph von f im Intervall $[-3; 1]$ eine Tangente, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden ist.

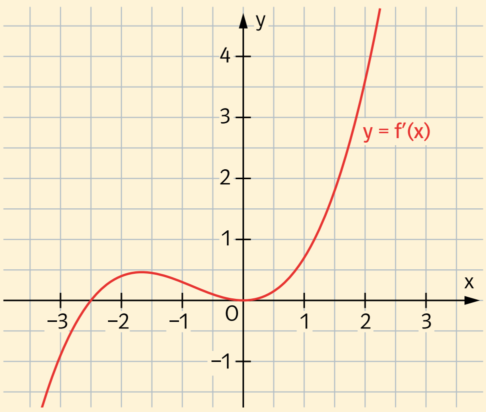


Fig. 1

5 a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der abgebildeten Figuren (Fig. 2).

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figuren, die begrenzt werden von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der Funktion

(1) $f(x) = 5 - 2x$ (2) $g(x) = \frac{1}{2}x + 6$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figuren, die begrenzt werden von der x-Achse, den Geraden $x = -1$ und $x = 2$ sowie vom Graphen der Funktion

(1) $f(x) = 5 - 2x$ (2) $g(x) = \frac{1}{2}x + 6$

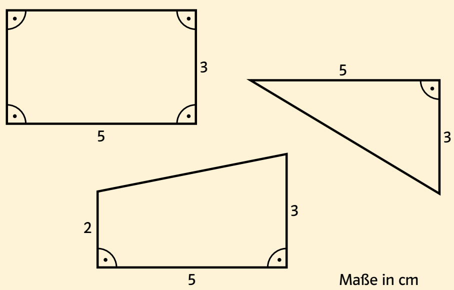
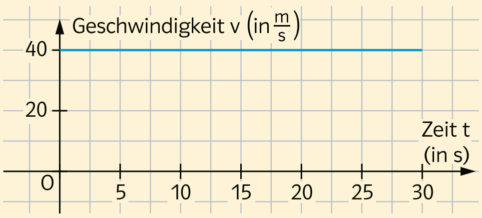
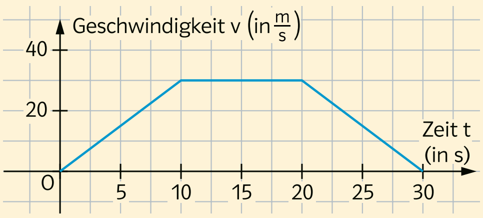


Fig. 2

6 Das Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit eines Autos in m/s (für $t \in [0;30]$ in Sekunden). Bestimmen Sie, wie weit es in dem abgebildeten Zeitraum insgesamt gefahren ist.





Kapitel IV, Check-in

1

a) $f'(x) = 9x^2 - x$

b) $f(x) = 4 \cdot x^{-1}$; $f'(x) = -4 \cdot x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$

c) $f'(x) = -0{,}5 \cdot \sin(x)$

d) Mit der Produktregel: $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$

e) Mit der Kettenregel: $f'(x) = 40 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2x-1} = 8 \cdot e^{0{,}2x-1}$

f) Mit der Quotientenregel und der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{4\cos(2x) \cdot (x-1)^2 - 2\sin(2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4\cos(2x) \cdot (x-1) - 4\sin(2x)}{(x-1)^3}$$

2

a) Mittlere Änderungsrate im Intervall [2; 5]:

$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{0{,}1 \cdot 5^2 - 0{,}1 \cdot 2^2}{5 - 2} = 0{,}7.$

Momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$:

$f'(t) = 0{,}2t$; $f'(2) = 0{,}4$.

b) Die mittlere Änderungsrate entspricht der mittleren Geschwindigkeit (oder Durchschnittsgeschwindigkeit) von $0{,}7\frac{m}{s}$ des Schlittens im Zeitraum von 2 s bis 5 s. Der Schlitten hat in diesem Zeitraum eine Strecke von $0{,}7\,m \cdot 3 = 2{,}1\,m$ zurückgelegt.

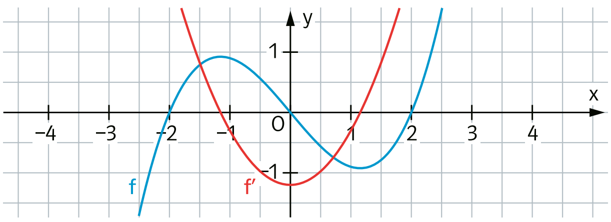
Die momentane Änderungsrate entspricht der Momentangeschwindigkeit des Schlittens zum Zeitpunkt $t = 2$ s.

Das bedeutet z. B.: Wenn der Schlitten mit dieser Geschwindigkeit eine Sekunde weitergefahren wäre, dann wäre er 0,4 m weit gekommen.

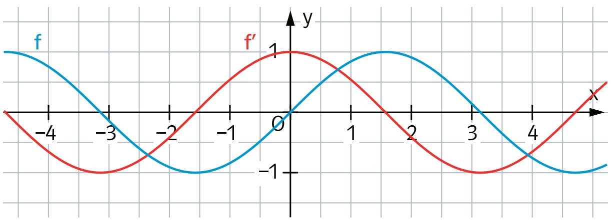
3

a)

(1)

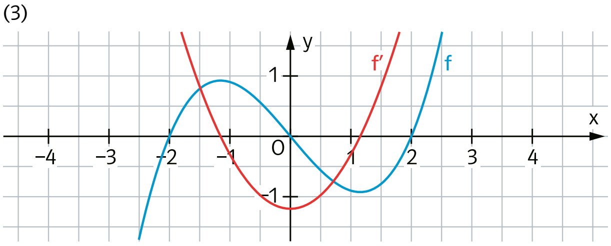


(2)

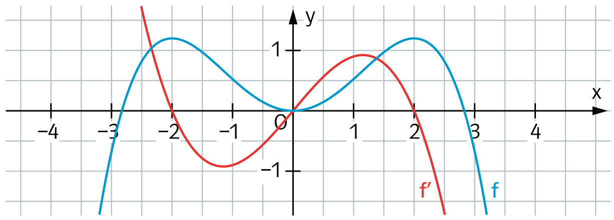


b)

(3)



(4)



4

a) Falsch. Dazu müsste für eine Stelle a aus $[-2; -1]$ gelten: $f'(a) = 0$. Dies ist nicht der Fall.

b) Wahr. Da $f'(x) > 0$ für x aus $[-2; -1]$, ist f auf diesem Intervall streng monoton steigend.

c) Wahr. An der Stelle $x_1 \approx -2{,}5$ gilt: $f'(x_1) = 0$ und f′ hat an der Stelle x_1 einen VZW von − nach +. Die Kriterien für einen Tiefpunkt des Graphen von f sind damit erfüllt.

d) Falsch. Da die erste Winkelhalbierende $y = x$ die Steigung 1 hat, müsste es im Intervall $[-3; 1]$ eine Stelle a mit $f'(a) = 1$ geben. Das ist nicht der Fall.

5

a) Rechteck: $15\,cm^2$; Dreieck: $7{,}5\,cm^2$; Trapez: $12{,}5\,cm^2$

b) (1) 6,25 (FE) (2) 36

c) (1) 12 (2) 18,75

6

Grafik links: $30\,s \cdot 40\,m/s = 1200\,m$

Grafik rechts:

$0{,}5 \cdot 10\,s \cdot 30\,m/s + 10\,s \cdot 30\,m/s + 0{,}5 \cdot 10\,s \cdot 30\,m/s = 600\,m$