Kapitel III

Checkliste

	Das kann ich gut.	Da bin ich fast sicher.	Ich bin noch unsicher.	Das kann ich noch nicht.
1. Ich kann mit Potenzen rechnen.				
2. Ich kann Gleichungen wie $x^{11} = 2$ lösen.				
3. Ich kann die Nullstellen einer Funktion durch Ausklammern, Ablesen und Anwenden einer Formel für quadratische Gleichungen bestimmen.				
4. Ich kann eine Funktion mithilfe der Summenregel, der Faktorregel oder der Potenzregel ableiten.				
5. Ich kann zu einer Funktion die 1., 2. und 3. Abeitungsfunktion bilden.				
6. Ich kann mithilfe der Ableitungsfunktion Extrem- und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen berechnen.				
7. Ich kann bei Funktionen mit Parameter Ableitungen sowie Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit vom Parameter berechnen.				
8. Ich kann den Verlauf einer Funktion f mit $f(x) = a^x$ (für $a > 0$) skizzieren.				

Aufgaben

Die Aufgaben 1–8 beziehen sich auf die Punkte 1–8 der Checkliste.

1 Vereinfachen Sie.

a) $(-3)^4$ b) $(-x)^5$ mit $x = 2$ c) $(-2)^n = -32$; $n = ?$

d) $3^5 \cdot 3^8$ e) $3^{2x} \cdot 3^{x+1}$ f) $(3^5)^8$ g) $\frac{3^5}{3^8}$ h) $\frac{x^5}{x^7}$ i) $\frac{a^3 \cdot a^2}{a^8}$

2 Geben Sie die Lösung als Wurzel an. Bestimmen Sie ggf. einen Näherungswert.

a) $x^3 = -27$ b) $-x^3 = 64$ c) $x^2 = \frac{1}{169}$ d) $x^4 = 0{,}0016$

e) $-0{,}343 = -x^3$ f) $-0{,}027 + x^3 = 0$ g) $0 = \frac{1}{16} - x^4$ h) $x^2 = 13{,}5$

i) $x^4 + 12 = 100$ j) $x^7 - 11 = -53$ k) $4x^4 = 18$ l) $1{,}2x^4 = 6$

3 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen durch Ablesen oder Anwendung einer Formel für eine quadratische Gleichung. Bei einigen Funktionen müssen Sie zuvor ggf. ausklammern.

a) $f(x) = (x-3)(x-1)(x+2{,}2)$ b) $f(x) = x(x-3)^2(2x-8)$

c) $f(x) = (3-2x)(5x+15)$ d) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

e) $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ f) $f(x) = (x-1)(x^2 - 10x + 9)$

g) $f(x) = x^5 + 4x^4$ h) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x$

4 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 5x^8$ b) $f(x) = -2x^3 + 8x$ c) $f(t) = 0{,}5t^3 + 5t^2 - 3t$

d) $f(x) = \frac{2}{x} + 5$ e) $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ f) $f_a(x) = ax^3 + 2x^2$

5 Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = -0{,}1x^3 + 3x^4 + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = 2 \cdot x^{-4}$

6 Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.
a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = x^4 - 4x^2$

7 Gegeben ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = 2x^3 - 3tx^2$, $t > 0$. Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte der Graphen von f_t in Abhängigkeit von t.

8 a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h mit $f(x) = 2^x$, $g(x) = 0{,}5^x$ und $h(x) = -2^x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen.
b) Ordnen Sie Fig. 1 bis Fig. 4 den Funktionsgleichungen zu. Begründen Sie.
$f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f_2(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f_3(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $f_4(x) = 3^x$

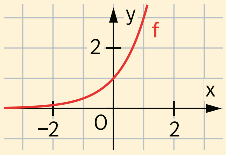


Fig. 1

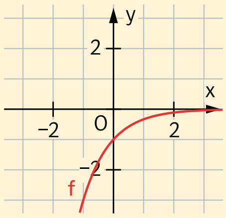


Fig. 2

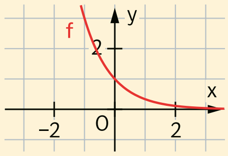


Fig. 3

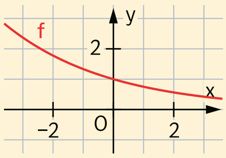


Fig. 4

Kapitel III, Check-in

1

a) $(-3)^4 = 81$

b) $(-x)^5$ mit $x = 2$, also $(-2)^5 = -32$

c) $(-2)^n = -32$; $n = ?$, $(-2)^5 = -32$, also $n = 5$

d) $3^5 \cdot 3^8 = 3^{5+8} = 3^{13}$

e) $3^{2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{2x+x+1} = 3^{3x+1}$

f) $(3^5)^8 = 3^{5 \cdot 8} = 3^{40}$

g) $\frac{3^5}{3^8} = 3^{5-8} = 3^{-3}$

h) $\frac{x^5}{x^7} = x^{5-7} = x^{-2}$

i) $\frac{a^3 \cdot a^2}{a^8} = \frac{a^{3+2}}{a^8} = \frac{a^5}{a^8} = a^{-3}$

2

a) $x = -\sqrt[3]{27} = -3$

b) $x = -\sqrt[3]{64} = -4$

c) $x = \pm\sqrt{\frac{1}{169}} = \pm\frac{1}{13}$

d) $x = \pm\sqrt[4]{0{,}0016} = \pm 0{,}2$

e) $x = \sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$

f) $x = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$

g) $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$

h) $x = \pm\sqrt{13{,}5} \approx \pm 3{,}674$

i) $x = \pm\sqrt[4]{88} \approx \pm 3{,}063$

j) $x = -\sqrt[7]{42} = -1{,}706$

k) $x = \pm\sqrt[4]{4{,}5} = \pm 1{,}456$

l) $x = \pm\sqrt[4]{5} = \pm 1{,}495$

3

a) $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2{,}2$

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$

c) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = -3$

d) $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

e) $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

f) $x_1 = 1$; $x_2 = 9$

g) $f(x) = x^5 + 4x^4 = x^4(x + 4)$. Also $x_1 = 0$; $x_2 = -4$.

h) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x = 5x(x^2 - 2x + 1) = 5x(x - 1)^2$.
Also $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

4

a) $f'(x) = 40x^7$

b) $f'(x) = -6x^2 + 8$

c) $f'(t) = 1{,}5t^2 + 10t - 3$

d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

e) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - x$

f) $f_a'(x) = 3ax^2 + 4x$

5

a) $f'(x) = -0{,}3x^2 + 12x^3$;
$f''(x) = -0{,}6x + 36x^2$;
$f'''(x) = -0{,}6 + 72x$

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$;
$f''(x) = 3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$;
$f'''(x) = -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$

c) $f'(x) = -8x^{-5}$;
$f''(x) = 40x^{-6}$;
$f'''(x) = -240x^{-7}$

6

a) Extrempunkte: $H(0\,|\,0)$ und $T(2\,|\,-4)$, Wendepunkt: $W(1\,|\,-2)$

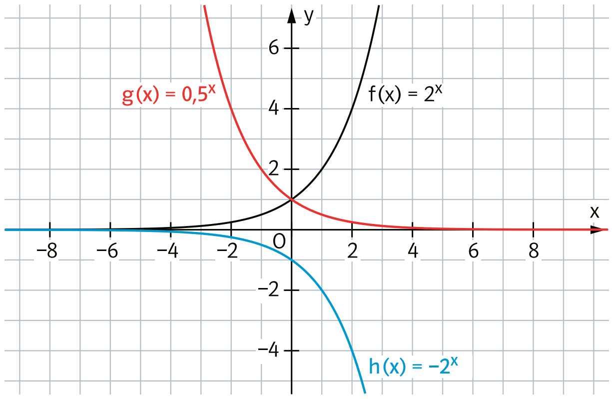
b) Extrempunkte: $H(0\,|\,0)$, $T_1(-\sqrt{2}\,|\,-4)$ und $T_2(\sqrt{2}\,|\,-4)$,
Wendepunkte: $W_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\middle|\,-\frac{20}{9}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\middle|\,-\frac{20}{9}\right)$.

7

Extrempunkte: $H(0\,|\,0)$ und $T(t\,|\,-t^3)$, Wendepunkt: $W\left(\frac{t}{2}\,\middle|\,-\frac{t^3}{2}\right)$

8

a)



Der Graph von g entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse.
Der Graph von h entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.

b) Zu Fig. 1 gehört f_4, denn der Graph verläuft oberhalb der x-Achse, ist streng monoton steigend und geht durch den Punkt $P(1\,|\,3)$.
Zu Fig. 2 gehört f_2, denn der Graph verläuft aufgrund des negativen Vorzeichens in der Funktionsgleichung unterhalb der x-Achse.
Zu Fig. 3 gehört f_1, denn der Graph verläuft oberhalb der x-Achse, ist streng monoton fallend und geht durch den Punkt $P\left(1\,\middle|\,\frac{1}{3}\right)$.
Der Graph entsteht durch Spiegelung des Graphen in Fig. 2 an der x-Achse.
Zu Fig. 4 gehört f_3, denn der Graph verläuft oberhalb der x-Achse, ist streng monoton fallend, aber nicht so steil wie der zu f_1 (Fig. 3), daher ist die Basis näher an 1. Der Graph geht durch den Punkt $P\left(1\,\middle|\,\frac{3}{4}\right)$.