# Kapitel II

## Checkliste

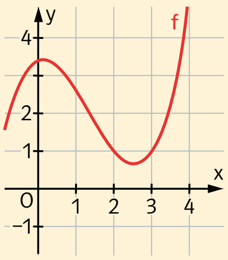
| | Das kann ich gut. | Da bin ich fast sicher. | Ich bin noch unsicher. | Das kann ich noch nicht. |
|---|---|---|---|---|
| 1. Ich kann zu einem Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren. | | | | |
| 2. Ich kann ganzrationale Funktionen ableiten. | | | | |
| 3. Ich kann die Bedeutung der Ableitungsfunktion beschreiben. | | | | |
| 4. Ich kann momentane Änderungsraten einer Funktion bestimmen und im Anwendungskontext interpretieren. | | | | |
| 5. Ich kann Tangentengleichungen aufstellen. | | | | |
| 6. Ich kann lineare und quadratische Gleichungen lösen. | | | | |

## Aufgaben

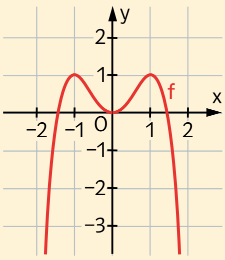
Die Aufgaben 1–6 beziehen sich auf die Punkte 1–6 der Checkliste.

**1** Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Ableitungsfunktion f′ zu den gegebenen Graphen von f.

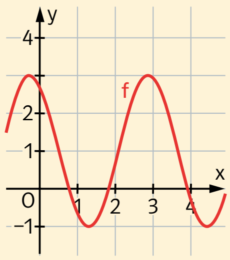
a)



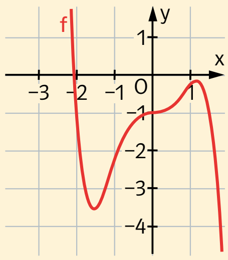
b)



c)



d)



**2** Bestimmen Sie die Funktionsterme der ersten, zweiten und dritten Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$  b) $f(x) = -32x^5 + 25x^4 - 120x^2$  c) $f(x) = x(x-3)^2(x+1{,}5)$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x - 2$  e) $f(x) = a \cdot x^4 - b \cdot x^2 + c$  f) $f(x) = a^2 \cdot x^5 + a^3 \cdot b \cdot x^3 + \sqrt[3]{a} \cdot x$

**3** Beschreiben Sie jeweils, welche Bedeutung die Ableitungsfunktion f′ im vorliegenden Sachzusammenhang hat.

(1) f(t) gibt die Strecke in km an, die ein Auto innerhalb der Zeit t (in h) gefahren ist.

(2) f(x) beschreibt das Höhenprofil einer Straße (x in m, f(x) in m).

**4** Gegeben ist die Funktion V mit $V(t) = 0{,}25t^3 - 3t^2 + 8{,}75t + 8$.

a) Bestimmen Sie die Ableitung von V an der Stelle t = 1 bzw. t = 5.

b) V′ beschreibt näherungsweise die Volumenänderung des Wassers in einem kleinen Gartenteich (V gibt das Wasservolumen in $m^3$ an und t die vergangene Zeit seit dem Messbeginn in Tagen ($0 \leq t \leq 7$)). Welche Bedeutung haben die Ergebnisse aus a) im Sachkontext?

c) Für die Ableitungsfunktion V′ gilt: Für $2 < t < 6$ ist $V'(t) < 0$. Was bedeutet dies für den Graphen von V und was bedeutet es im Sachkontext?

**5** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(x_0 \mid f(x_0))$.

a) $f(x) = 0{,}75x^2 + 1$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}5x + 2$; $x_0 = 3$

c) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$; $x_0 = 0{,}6$

d) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ (vgl. Fig. 1)

e) $f(x) = -0{,}25x^4 + 2x^2 - 2$ (vgl. Fig. 2)

f) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ (vgl. Fig. 3)

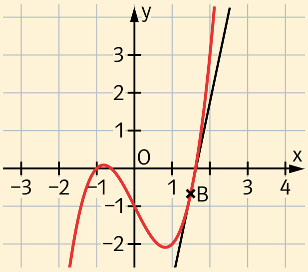


Fig. 1

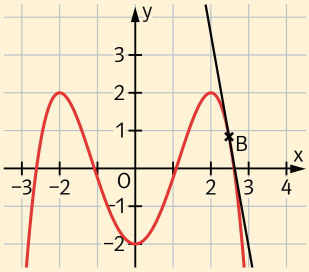


Fig. 2

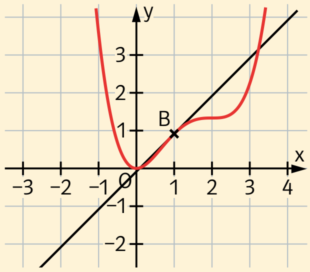


Fig. 3

**6** a) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden linearen Gleichungen.

(1) $2x + 3 = 4x - 5$

(2) $\frac{2}{5}x + 3 = -\frac{1}{3}x - 5$

b) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden quadratischen Gleichungen.

(1) $x^2 = 16$

(2) $x^2 - 6x + 5 = 0$

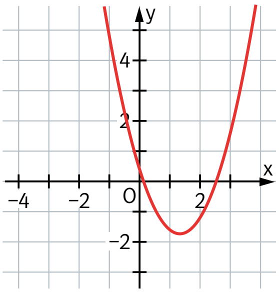
(3) $2x^2 - 4x + 7 = 1$

(4) $2x^2 + 4x = 0$

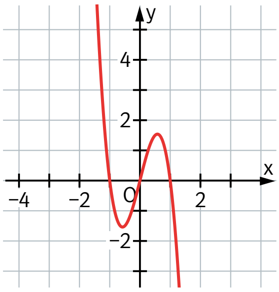
**Kapitel II, Check-in**

## 1

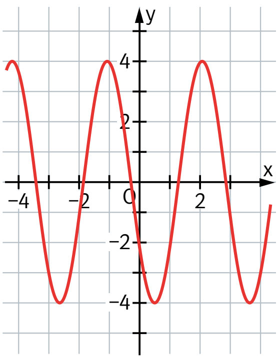
a)



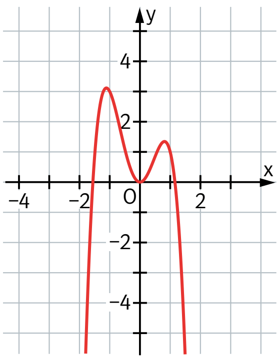

b)




c)




d)




## 2

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$; $f'(x) = 6x^2 - 8x$; $f''(x) = 12x - 8$; $f'''(x) = 12$

b) $f(x) = -32x^5 + 25x^4 - 120x^2$;
$f'(x) = -160x^4 + 100x^3 - 240x$; $f''(x) = -640x^3 + 300x^2 - 240$;
$f'''(x) = -1920x^2 + 600x$

c) $f(x) = x(x-3)^2(x+1{,}5) = x^4 - 4{,}5x^3 + 13{,}5x$;
$f'(x) = 4x^3 - 13{,}5x^2 + 13{,}5$; $f''(x) = 12x^2 - 27x$;
$f'''(x) = 24x - 27$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x - 2$; $f'(x) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + \frac{3}{5}$;
$f''(x) = 6x^2 - 4x$; $f'''(x) = 12x - 4$

e) $f(x) = ax^4 - bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 - 2bx$;
$f''(x) = 12ax^2 - 2b$; $f'''(x) = 24ax$

f) $f(x) = a^2x^5 + a^3bx^3 + \sqrt[3]{a}\,x$; $f'(x) = 5a^2x^4 + 3a^3bx^2 + \sqrt[3]{a}$;
$f''(x) = 20a^2x^3 + 6a^3bx$; $f'''(x) = 60a^2x^2 + 6a^3b$

## 3

(1) Die Ableitung gibt die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ an.
(2) Die Ableitung beschreibt die Steigung der Straße.

## 4

a) $V'(t) = 0{,}75t^2 - 6t + 8{,}75$; $V'(1) = 3{,}5$; $V'(5) = -2{,}5$

b) Die Ableitung V' beschreibt die Volumenänderung des Wassers im Gartenteich. Einen Tag nach Messbeginn beträgt die momentane Volumenänderung im Gartenteich $+3{,}5\,m^3$ pro Tag, d.h. es regnet in dieser Zeit, so dass immer mehr Wasser dazukommt. Fünf Tage nach Messbeginn wird das Volumen um $2{,}5\,m^3$ Wasser pro Tag weniger, zu diesem Zeitpunkt ist es wahrscheinlich sonnig und der Teich trocknet aus.

c) Für den Graphen von V bedeutet das, dass er in diesem Intervall streng monoton fällt. Im Sachkontext bedeutet eine negative Ableitung, dass die Volumenänderung in diesem Intervall negativ ist, d.h., dass das Wasser im Teich immer weniger wird, weil z.B. die Sonne stark scheint oder es einfach sehr warm ist und es nicht regnet.

## 5

a) $f(2) = 4$; $f'(x) = 1{,}5x$; $f'(2) = 3 = m_t$; $t(x) = 3x - 2$

b) $f(3) = 2{,}3$; $f'(x) = 0{,}4x - 0{,}5$; $f'(3) = 0{,}7 = m_t$;
$t(x) = 0{,}7x + 0{,}2$

c) $f(0{,}6) = -0{,}952$; $f'(x) = 9x^2 - 10x + 2$;
$f'(0{,}6) = -0{,}76 = m_t$; $t(x) = -0{,}76x - 0{,}496$

d) (Fig. 1) $f(1{,}5) = -0{,}625$; $f'(x) = 3x^2 - 2$;
$f'(1{,}5) = 4{,}75 = m_t$; $t(x) = 4{,}75x - 7{,}75$

e) (Fig. 2) $f(2{,}5) = 0{,}734375$; $f'(x) = -x^3 + 4x$;
$f'(2{,}5) = -5{,}625 = m_t$; $t(x) = -5{,}625x + 14{,}796875$

f) (Fig. 3) $f(1) = \frac{11}{12}$; $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; $f'(1) = 1 = m_t$;
$t(x) = x - \frac{1}{12}$

## 6

a) (1) $x = 4$ (2) $x = -\frac{120}{11}$

b) (1) $x_1 = 4$ und $x_2 = -4$ (2) $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$
(3) nicht lösbar (4) $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$