Mathematische Exkursionen

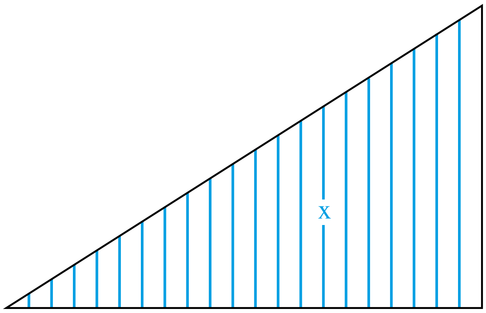
CAVALIERI entdeckt eine Integralformel

Die Vorstellung, dass geometrische Objekte aus Teilen ohne Dicke zusammengesetzt sind, gab es schon in der Antike. Der Ansatz wurde damals wegen der logischen Schwierigkeiten aufgegeben (wie kann die Summe von Linien ohne Dicke eine Fläche ergeben?).

*Der Erste, der sich von der logischen Strenge der Griechen abkehrte und unendlich kleine Teile mit großem Erfolg benutzte, war KEPLER in seiner **Fassmessung** (1615). Darin eröffnet er das Zeitalter der infinitesimalen Mathematik. Eine strenge Begründung wurde dieser neuen Mathematik erst im 18. und 19. Jahrhundert gegeben.*

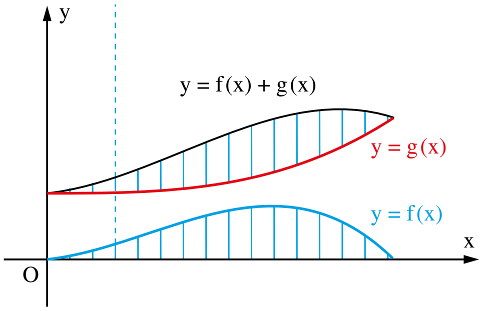
*CAVALIERI erhielt 1629 die erste Professur für Mathematik an der Universität von Bologna. Seine Prinzipien veröffentlichte er 1635 in **Geometria indivisibilibus**.*

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts griff BONAVENTURA CAVALIERI (1598–1647) eine alte Idee zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten wieder auf. Dabei denkt man sich eine Fläche aus unendlich vielen parallelen Linien zusammengesetzt. Entsprechend besteht ein Körper nach dieser Vorstellung aus unendlich vielen parallelen Flächenstücken. Da diese Linien keine Breite und die Flächenstücke keine Dicke haben sollten, nannte man sie **Indivisiblen** (lat.: unteilbar). CAVALIERI entwickelte Regeln zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten mithilfe der Indivisiblenmethode. Diese Regeln nennt man die **Prinzipien von CAVALIERI**.



CAVALIERI: Die Gesamtheit aller parallelen Linien x ergibt die Dreiecksfläche (CAVALIERI nimmt die Kettfäden eines Gewebes als Beispiel).

Fig. 2



Nach dem Cavalieri'schen Prinzip sind die Inhalte der schraffierten Flächen gleich.

Fig. 3

Für Flächen lautet das Prinzip (Fig. 3):
Wenn zwei ebene Figuren von einer Schar paralleler Linien so geschnitten werden, dass jede Gerade der Schar an beiden Figuren gleichlange Schnitte erzeugt, dann sind die beiden Figuren flächengleich.

Für Rauminhalte gilt entsprechend:
Wenn zwei Körper von einer Schar paralleler Ebenen so geschnitten werden, dass jede Ebene der Schar an beiden Körpern Schnitte mit gleichem Flächeninhalt erzeugt, dann haben beide Körper das gleiche Volumen.

Rotiert die Ellipse um die x-Achse, erhält man ein Rotationsellipsoid.

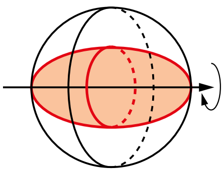


Fig. 1

Wie groß ist sein Volumen im Vergleich zu dem der Kugel?

Allgemeiner lautet das Prinzip:
Wenn die einander entsprechenden Schnitte immer in ein und demselben Verhältnis stehen, so stehen die beiden Flächeninhalte bzw. Rauminhalte in demselben Verhältnis.

Multipliziert man die y-Werte der Punkte einer Kreislinie jeweils mit einem Faktor k, erhält man eine Ellipse. In Fig. 4 ist $k = \frac{1}{2}$. Die Schnitte dieser Ellipse sind Strecken, die jeweils die halbe Länge der entsprechenden Schnittstrecken des Kreises haben. Nach dem Prinzip von CAVALIERI ist der Flächeninhalt dieser Ellipse der halbe Kreisinhalt.

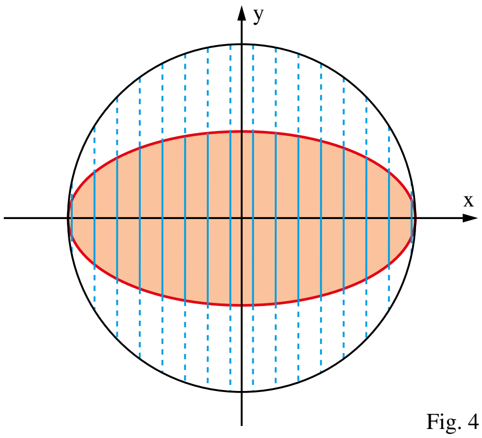


Fig. 4

Autor: Dieter Brandt, Hans Freudigmann u.a.
Quellen: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, ISBN-13: 978-3-12-733120-2

Seite aus: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS
ISBN-13: 978-3-12-733120-2

Mathematische Exkursionen

Etwa im Jahre 1621 entdeckte Cavalieri einen neuen überraschenden Zusammenhang. Es ging um zwei berühmte Erkenntnisse der antiken Mathematik, die auf den ersten Blick ganz verschiedene Problemkreise berühren.

Das Volumen der dargestellten Pyramide ist $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^3}$

(Demokrit und Eudoxos; ca. 400 v. Chr.)

Der Flächeninhalt unter der Parabel ist $\mathbf{A = \frac{1}{3}a^3}$

(Archimedes; ca. 240 v. Chr.)

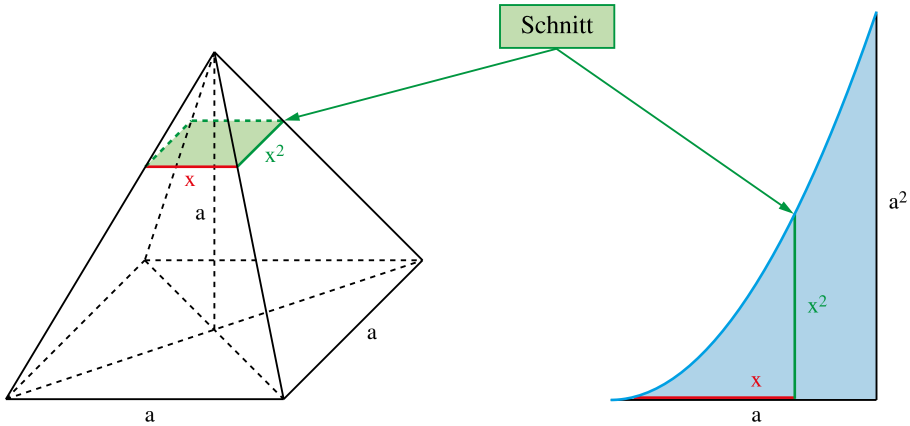


Fig. 2

Fig. 3

Gibt es einen Grund, warum bei diesen verschiedenartigen Problemen die Inhaltsformeln übereinstimmen? Cavalieri überlegte etwa so:

Cavalieri konnte den Begriff „omnia“ (Gesamtheit) nie klar definieren. Er hat dafür auch kein vereinfachendes Symbol eingeführt. Leibniz hat die Schreibweise „omnia x“ zunächst übernommen, bis er 1675, ein Vierteljahrhundert nach Cavalieris Tod, die Integralschreibweise eingeführt hat.

Bei der Pyramide sind die Schnitte Quadrate mit dem Inhalt x^2. Der Pyramideninhalt ist demnach die Summe aller x^2, wenn x alle Werte zwischen 0 und a annimmt.

Bei der Parabel sind die Schnitte Strecken der Länge x^2. Der Flächeninhalt unter der Parabel ist demnach die Summe aller x^2, wenn x alle Werte zwischen 0 und a annimmt.

In beiden Fällen ist der Inhalt also „die Summe aller x^2“. Cavalieri fasst nun die Inhaltsformeln zu einem neuen Gesetz zusammen:

Falls eine Größe x von 0 bis a wächst, dann ist die Gesamtheit aller x^2 *gleich* $\frac{1}{3}a^3$.

In heutiger Schreibweise stellt sich dieses Gesetz so dar:

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3.$$

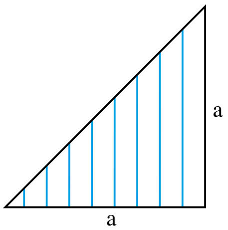


Fig. 1

Die Formel vom Flächeninhalt eines Dreiecks $A = \frac{1}{2}a^2$ lautet in Cavalieris Ideenwelt so:

Falls eine Größe x von 0 bis a wächst, dann ist die Gesamtheit aller x gleich $\frac{1}{2}a^2$.

In heutiger Schreibweise:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}a^2.$$

Den Mathematikern Fermat (1644) und Wallis (1656) gelang es, dieses Ergebnis mithilfe von Grenzübergängen zu beweisen (siehe Seite 68).

Cavalieri schildert, wie er nun bewundernd begriffen habe, dass dieses Zahlengesetz sich der natürlichen Zahlenreihe entsprechend fortsetze. Er vermutete:

Falls eine Größe x von 0 bis a wächst, dann ist die Gesamtheit aller x^n *gleich* $\frac{1}{n+1}a^{n+1}$.

In heutiger Schreibweise:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}.$$

Autor: Dieter Brandt, Hans Freudigmann u.a.
Quellen: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, ISBN-13: 978-3-12-733120-2
Seite aus: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS
ISBN-13: 978-3-12-733120-2