Check-out Kapitel V

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	**Wiederholung**
1.	Ich kann erläutern, ob ein Zufallsexperiment eine Bernoulli-Kette ist.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 130
2.	Ich kann Wahrscheinlichkeiten mit der Formel von Bernoulli berechnen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 136 Beispiel 1, Seite 136 Beispiel 2, Seite 137
3.	Ich kann den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße berechnen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 140 Beispiel 2, Seite 140 Merkkasten, Seite 147 Beispiel, Seite 148
4.	Ich kann für eine binomialverteilte Zufallsgröße kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 143 Beispiel 2, Seite 144
5.	Ich kann die Darstellung einer Binomialverteilung am Histogramm interpretieren.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 140
6.	Ich kann bei einer Binomialverteilung den fehlenden Parameter n bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 151
7.	Ich kann bei einer Binomialverteilung den fehlenden Parameter p bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 151

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Überprüfen, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt

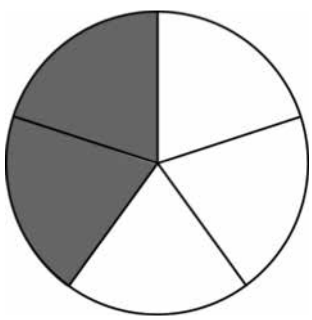
Beurteilen Sie, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie gegebenenfalls die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p an.

a) Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob eine Zahl erscheint, die größer als vier ist.

b) Aus einer Urne mit sechs schwarzen und acht weißen Kugeln werden nacheinander fünf Kugeln gezogen und nicht wieder zurückgelegt. Es wird jedes Mal notiert, ob die gezogene Kugel schwarz ist.

c) Ein Biathlet hat beim Stehendschießen eine Trefferquote von 85 %. Er schießt fünfmal und es wird jedes Mal notiert, ob er trifft.

2 Formel von Bernoulli anwenden



Das nebenstehende Glücksrad wird sechsmal gedreht. Bestimmen Sie mit der Formel von Bernoulli die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau dreimal „weiß“ erscheint,

b) genau zweimal „grau“ erscheint.

3 Erwartungswert und Standardabweichung berechnen

Das nebenstehende Glücksrad wird viermal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „grau“ erscheint.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung von X.

Autor: Dr. Torsten Schatz

4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnen

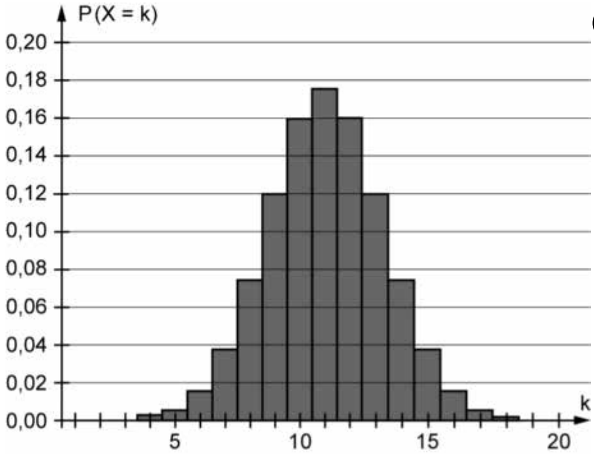
Bei der Produktion von Sensoren sind erfahrungsgemäß 7 % defekt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

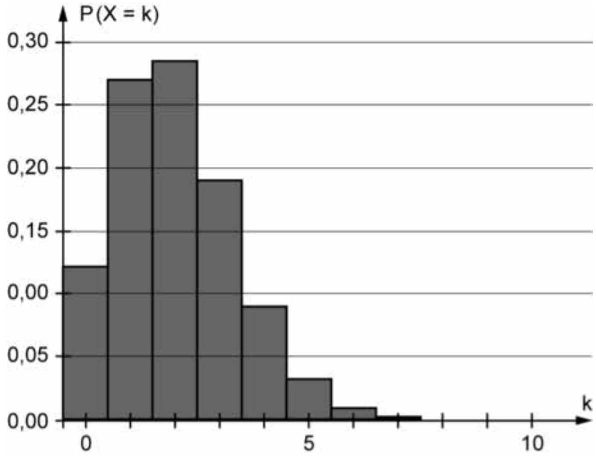
a) von 100 Sensoren höchstens sieben defekt sind,
b) von 200 Sensoren mindestens 20 defekt sind,
c) von 80 Sensoren mindestens fünf und weniger als zehn defekt sind.

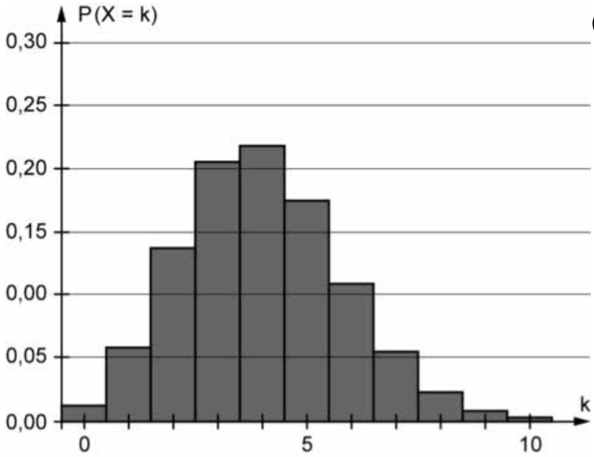
5 Histogramm einer Binomialverteilung interpretieren

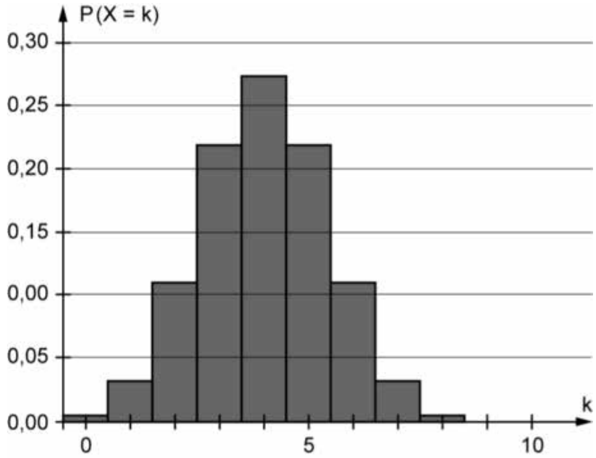
Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}2$.

a) Ordnen Sie das zugehörige Histogramm zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Histogramms näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 4)$ und $P(X < 3)$.

(1)


(2)


(3)


(4)


6 Parameter n bestimmen

Etwa 15 % der Bevölkerung in Deutschland sind Linkshänder. Bestimmen Sie, wie groß eine Gruppe zufällig ausgewählter Personen sein muss, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 20 Linkshänder befinden.

7 Parameter p bestimmen

Eine Urne enthält rote und gelbe Kugeln. Es wird achtmal eine Kugel gezogen, die Farbe notiert und dann wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens drei rote Kugeln gezogen werden, beträgt ca. 95 %. In der Urne befinden sich sechs rote Kugeln. Bestimmen Sie die Anzahl der gelben Kugeln.

Autor: Dr. Torsten Schatz

Check-out Kapitel V – Lösungen

1 a) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette, da bei jedem Wurf genau zwei Ergebnisse betrachtet werden und die Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Wurf gleich ist. Die Länge ist $n = 10$ und die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$.

b) Es handelt sich nicht um eine Bernoulli-Kette, da die Kugeln nicht zurückgelegt werden und sich damit bei jedem Zug die Trefferwahrscheinlichkeit ändert.
c) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit tatsächlich bei jedem Schuss konstant 85 % beträgt. Es werden jedesmal zwei Ergebnisse betrachtet. Die Länge ist $n = 5$ und die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}85$.

2 Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 6$.

a) Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = \frac{3}{5}$. Also ist $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \approx 0{,}276$.

b) Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = \frac{2}{5}$. Also ist $P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \approx 0{,}311$.

3 Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.

a) Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

Auf lange Sicht kann man damit rechnen, dass bei viermaligem Drehen des Glücksrads im Durchschnitt 1,6-mal „grau“ erscheint.
b) Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}980$.

4 Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}07$.
a) $n = 100$, $P(X \leq 7) \approx 0{,}599$ (WTR)
b) $n = 200$, $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0{,}069$ (WTR)
c) $n = 80$, $P(5 \leq X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 4) \approx 0{,}614$ (WTR)

5 a) Für den Erwartungswert von X gilt $\mu = 20 \cdot 0{,}2 = 4$. Für $k = 4$ muss die Säule im Histogramm am höchsten sein. Also kommen nur (3) und (4) infrage. Da p deutlich kleiner als 0,5 ist, ist das Histogramm nicht symmetrisch. Also ist (3) das zugehörige Histogramm.
b) Durch Ablesen am Histogramm erhält man $P(X = 4) \approx 0{,}22$ und $P(X < 3) \approx 0{,}14 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}21$.

6 Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Linkshänder und ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0{,}15$. Gesucht ist n, sodass $P(X \geq 20) \geq 0{,}9$. Es ist $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Also muss $P(X \leq 19) \leq 0{,}1$ sein. Mit dem WTR erhält man für $n = 169$ den Wert $P(X \leq 19) \approx 0{,}101$ und für $n = 170$ den Wert $P(X \leq 19) \approx 0{,}095$.
Die Gruppe muss mindestens 170 Personen umfassen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 20 Linkshänder darunter befinden.

7 Die Zufallsgröße X zählt, wie oft eine rote Kugel gezogen wird und ist binomialverteilt mit dem Parameter $n = 8$.
Gesucht ist p, sodass $P(X \geq 3) \approx 0{,}95$. Es ist $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, also muss $P(X \leq 2) \approx 0{,}05$ sein. Mit dem WTR erhält man für $p = 0{,}59$ den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}056$ und für $p = 0{,}60$ den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}050$. Also muss die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen ca. 0,6 betragen. Dies ist der Fall, wenn in der Urne vier gelbe Kugeln sind.

Autor: Dr. Torsten Schatz