Check-out Kapitel IV

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann das Monotonieverhalten einer Funktion anhand des Funktionsterms ihrer ersten Ableitung bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 101
2.	Ich kann eine Funktion auf mögliche Extremstellen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 105
3.	Ich kann Hoch- und Tiefpunkte eines Funktionsgraphen rechnerisch mithilfe des Kriteriums der zweiten Ableitung bestimmen.	☐	☐	☐	Rückblick, Seite 126
4.	Ich kann Hoch-, Tief- und Sattelpunkte eines Funktionsgraphen mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 108
5.	Ich kann Wendepunkte eines Funktionsgraphen und die Gleichung der zughörigen Wendetangente rechnerisch bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 112
6.	Ich kann dem Graphen der ersten Ableitung einer Funktion Informationen über den Graphen der zugehörigen Funktion entnehmen.	☐	☐	☐	Test, Runde 2, Aufgabe 3, Seite 127
7.	Ich kann einen Funktionsgraphen anhand seiner Hoch-, Tief- und Wendepunkte skizzieren.	☐	☐	☐	Rückblick, Seite 126
8.	Ich kann dem Funktionsterm bestimmter Funktionen Informationen zum Verlauf des zugehörigen Graphen ohne weitere Rechnung entnehmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 116
9.	Ich kann aus Fragen im Sachzusammenhang mathematische Fragen ableiten.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 120

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Monotonieverhalten bestimmen

Untersuchen Sie die Funktion f bezüglich ihres Monotonieverhaltens mithilfe des Monotoniesatzes.

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = -x^3 + 3x + 3$

2 Funktionen auf mögliche Extremstellen untersuchen

Bestimmen Sie die möglichen Extremstellen der Funktion f.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 4$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$

3 Hoch- und Tiefpunkte des Graphen einer Funktion mithilfe des Kriteriums der zweiten Ableitung bestimmen

Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f mithilfe der zweiten Ableitung an.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 13$ b) $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$

4 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte des Graphen einer Funktion mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums bestimmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 4x + 1$. Untersuchen Sie mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums den Graphen der Funktion f auf Hoch-, Tief- und Sattelpunkte.

5 Wendepunkte des Graphen einer Funktion und Wendetangente bestimmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - x + 1$.

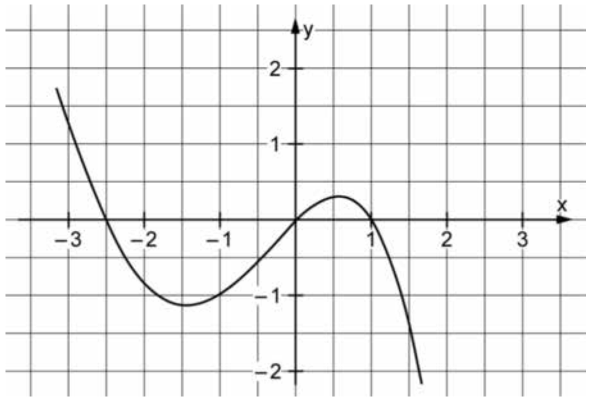
a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Wendepunkte.

b) Geben Sie die Gleichung der Wendetangente an.

Autor: Rüdiger Sandmann

6 Aus dem Graphen der ersten Ableitung f′ Informationen zum Graphen von f entnehmen

Die nebenstehende Figur zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f. Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort.



a) Der Graph von f hat den Hochpunkt $H\left(1 \middle| f(1)\right)$.

b) Der Graph von f hat den Sattelpunkt $S\left(0 \middle| f(0)\right)$.

c) Der Graph von f″ schneidet die x-Achse nicht.

7 Funktionsgraphen skizzieren

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer Funktion mit den angegebenen Eigenschaften.

a) Der Graph hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_1 = 0$ und einen Sattelpunkt an der Stelle $x_2 = 2$.

b) Der Graph hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_1 = 0{,}5$, einen Wendepunkt an der Stelle $x_2 = 1$ und einen Tiefpunkt an der Stelle $x_3 = 1{,}5$.

8 Aus dem Funktionsterm Informationen zum Verlauf des zugehörigen Graphen entnehmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^2$.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f, das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ sowie die Symmetrieeigenschaften des Graphen von f. Skizzieren Sie damit zwei mögliche Verläufe des Graphen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f und zeichnen Sie den Graphen.

9 Eine Situation mathematisch beschreiben.

Der Wert einer Aktie lässt sich für das Jahr 2016 näherungsweise durch die Funktion f(x) beschreiben. Dabei ist x die Zeit in Monaten seit Anfang des Jahres 2016. Formulieren Sie jeweils die passende mathematische Fragestellung.

a) Wie hoch war der Wert der Aktie Anfang Februar?

b) In welchen Zeiträumen sank bzw. stieg der Aktienkurs?

c) Zu welchem Zeitpunkt war der Aktienkurs am höchsten?

d) Zu welchem Zeitpunkt betrug der Wert der Aktie 120 €?

Autor: Rüdiger Sandmann

Check-out Kapitel IV – Lösungen

1 Um Intervalle zu finden, in denen $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist, setzt man $f'(x) = 0$ an.
a) Ableitung: $f'(x) = 2x - 2$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Dies ist die einzige Nullstelle von f'. Mit Testwerten wird das Vorzeichen von f' links und rechts der Nullstelle bestimmt: $f'(0) = -2 < 0$ und $f'(2) = 2 > 0$.
In $(-\infty; 1)$ ist $f' < 0$ und f streng monoton fallend, in $(1; \infty)$ ist $f' > 0$ und f streng monoton wachsend.
b) Ableitung: $f'(x) = -3x^2 + 3$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$. Lösungen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Dies sind die einzigen Nullstellen von f'.
Mit Testwerten wird das Vorzeichen von f' links und rechts der jeweiligen Nullstelle bestimmt:
$f'(-2) = -9 < 0$ und $f'(0) = 3 > 0$; $f'(2) = -9 < 0$
In $(-\infty; -1)$ ist $f' < 0$ und f streng monoton fallend,
in $(-1; 1)$ ist $f' > 0$ und f streng monoton wachsend,
in $(1; \infty)$ ist $f < 0$ und f streng monoton fallend.

2 a) $f'(x) = 2x + 4$. Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$, also $x_1 = -2$. Somit ist $x_1 = -2$ eine mögliche Extremstelle.
b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$. Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$.
Lösung: $x_1 = 2$. Somit ist $x_1 = 2$ eine mögliche Extremstelle.

3 a) Ableitungen: $f'(x) = 2x - 4$ und $f''(x) = 2$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$. Lösung: $x_1 = 2$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 2$: $f''(2) = 2 > 0$.
An der Stelle $x_1 = 2$ liegt das Minimum $f(2) = 9$ vor; $T(2|9)$.
b) Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 6$ und $f''(x) = 12x$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$. Lösungen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = -1$: $f''(-1) = -12 < 0$.
An der Stelle $x_1 = -1$ liegt das Maximum $f(-1) = 11$ vor; $H(-1|11)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 1$: $f''(1) = 12 > 0$.
An der Stelle $x_2 = 1$ liegt das Minimum $f(1) = 3$ vor; $T(1|3)$.

4 Ableitung: $f'(x) = 4x^2 - 8x + 4$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Lösung: $x_1 = 1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 1$ mit dem VZW-Kriterium: $x_1 = 1$ ist die einzige Nullstelle von f'.
Mit Testwerten wird das Vorzeichen von f' links und rechts der Nullstelle bestimmt: $f'(0) = 4 > 0$; $f'(2) = 4 > 0$.
Da f' bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen nicht wechselt, hat der Graph von f an der Stelle $x_1 = 1$ einen Sattelpunkt.

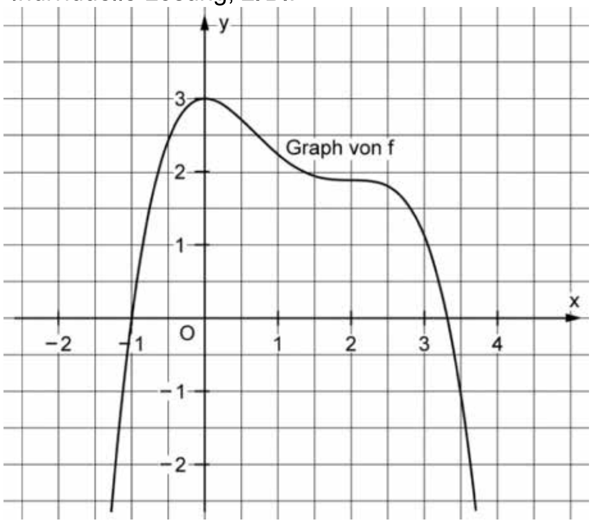
5 a) Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 1$, $f''(x) = 12x$ und $f'''(x) = 12$.
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0$. Lösung: $x_1 = 0$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = 0$: $f'''(0) = 12 \neq 0$.
Mit $f(0) = 1$ folgt: Der Graph von f hat den Wendepunkt $W(0|1)$.
b) $y = mx + c$. Mit $f'(0) = -1$ folgt $y = -x + c$. Eine Punktprobe mit $W(0|1)$ liefert $1 = 0 + c$ und $c = 1$.
Tangentengleichung: $y = -x + 1$.

6 a) Wahr. An der Stelle $x_0 = 1$ hat f' eine Nullstelle mit VZW von + nach – ; der Graph von f hat den Hochpunkt $H(1|f(1))$.
b) Falsch. An der Stelle $x_1 = 0$ hat f' eine Nullstelle mit VZW von – nach + ; der Graph von f hat den Tiefpunkt $H(0|f(0))$.
c) Falsch. An der Maximum- bzw. der Minimumstelle von f' muss f'' jeweils eine Nullstelle haben.

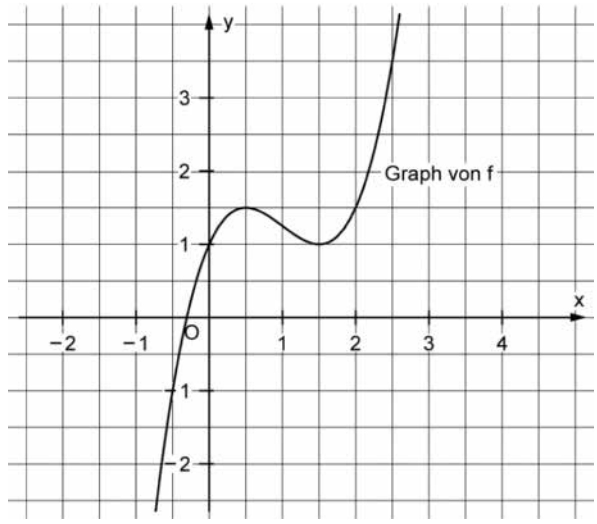
Autor: Rüdiger Sandmann

7 Individuelle Lösung, z. B.:

a)

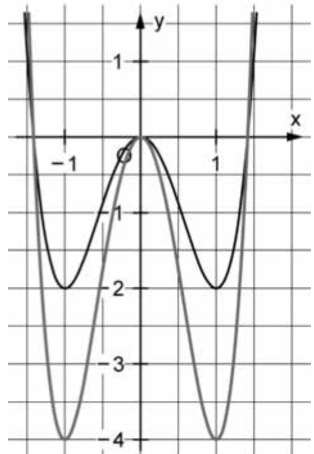


b)



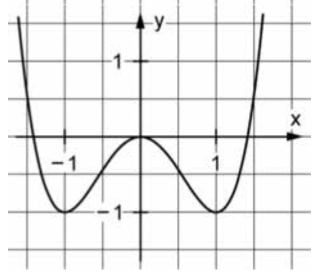
8 a) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$. Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$ und $x_3 = \sqrt{2}$.
Da $x_1 = 0$ eine doppelte Nullstelle ist, hat f bei $x_1 = 0$ eine Extremstelle.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$; für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.
Symmetrie: f ist ganzrational und die Potenzen von x haben nur gerade Hochzahlen. Der Graph von f ist daher achsensymmetrisch zur y-Achse.

Zwei mögliche Graphen:



b) Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 4x$ und $f''(x) = 12x^2 - 4$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$: $f''(0) = -4 < 0$.
An der Stelle $x_1 = 0$ liegt das Maximum $f(0) = 0$ vor; $H(0|0)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = -1$: $f''(-1) = 8 > 0$.
An der Stelle $x_2 = -1$ liegt das Minimum $f(-1) = -1$ vor; $T_1(-1|-1)$.
Aus Symmetriegründen gilt $T_2(-1|-1)$.

Graph:



9

Alltägliche Fragestellung	Mathematische Fragestellung
Wie hoch war der Wert der Aktie Anfang Februar?	Wie groß ist der Wert der Funktion f an der Stelle $x = 1$?
In welchen Zeiträumen sank bzw. stieg der Aktienkurs?	In welchen Intervallen ist f streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend?
Zu welchem Zeitpunkt war der Aktienkurs am höchsten?	An welcher Stelle der Definitionsmenge besitzt die Funktion f ihr globales Maximum?
Zu welchem Zeitpunkt betrug der Wert der Aktie 120 €?	An welcher Stelle der Definitionsmenge hat die Funktion f den Wert 120?

Autor: Rüdiger Sandmann