Check-out Kapitel III

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	Wiederholung
1.	Ich kann Koordinaten von Punkten im kartesischen Koordinatensystem angeben.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 69
2.	Ich kann Punkte im Koordinatensystem einzeichnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 69
3.	Ich kann Gemeinsamkeiten bezüglich der Lage verschiedener Punkte im Koordinatensystem beschreiben.	☐	☐	☐	Seite 70, Aufgabe 3
4.	Ich kann die Länge und die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 69
5.	Ich kann den Abstand zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem berechnen.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 69
6.	Ich kann Verschiebungen mithilfe von Vektoren beschreiben.	☐	☐	☐	Merkkasten, Seite 72
7.	Ich kann Vektoren berechnen und zugehörige Pfeile in ein Koordinatensystem einzeichnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 73
8.	Ich kann überprüfen, ob zwei Vektoren kollinear sind.	☐	☐	☐	Lehrtext, Seite 75
9.	Ich kann Linearkombinationen von Vektoren berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 76
10.	Ich kann die Koordinaten fehlender Eckpunkte von Parallelogrammen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 76
11.	Ich kann die Gleichung einer Geraden, auf welcher zwei vorgegebene Punkte liegen, in Parameterform angeben.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 79
12.	Ich kann prüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden, welche in Parameterform gegeben ist, liegt.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 80
13.	Ich kann eine Gerade in Parameterform im Koordinatensystem veranschaulichen.	☐	☐	☐	Beispiel 3, Seite 80
14.	Ich kann zwei Geraden auf ihre gegenseitige Lage untersuchen und gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 83 Beispiel, Seite 86
15.	Ich kann die geradlinige Bewegung eines Objekts durch eine Zeit-Ort-Gleichung modellieren.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 90

Autor: Rüdiger Sandmann

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Koordinaten von Punkten angeben
Geben Sie die Koordinaten der in Fig. 1 abgebildeten Punkte an.

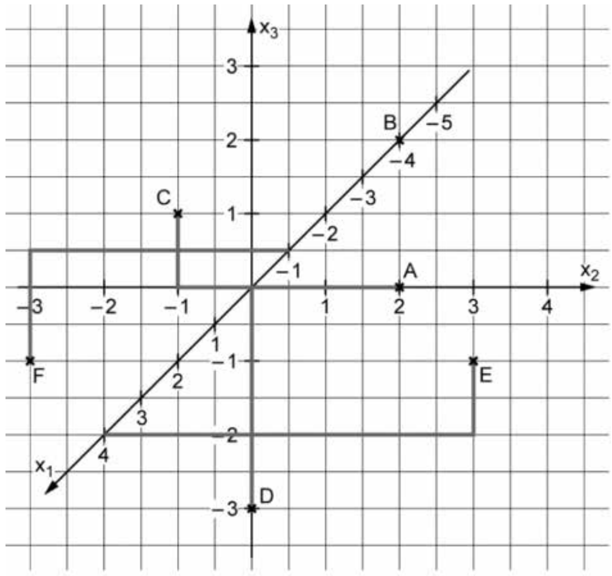


Fig. 1

2 Punkte im Koordinatensystem einzeichnen
Zeichnen Sie den Punkt in ein kartesisches Koordinatensystem.

a) A(0|0|1)	b) B(0|4|0)
c) C(–3|0|0)	d) D(2|3|0)
e) E(–4|0|2)	f) F(0|–2|–4)
g) G(3|5|1)	h) H(–2|–4|1)

3 Gemeinsamkeiten von Punkten beschreiben
a) Zeichnen Sie die Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem und beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten bezüglich der Lage der Punkte.

(1) A(1|0|0)	(2) A(0|1|0)	(3) A(0|0|1)	(4) A(1|1|0)
B(3|0|0)	B(0|3|0)	B(0|0|3)	B(3|3|0)
C(–2|0|0)	C(0|–2|0)	C(0|0|–2)	C(–2|–2|0)

b) Beschreiben Sie, in welcher Ebene im Koordinatensystem die Punkte liegen.
P(5|7|0) Q(–4|0|2) R(0|3|–2)

4 Länge und Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke berechnen
Gegeben sind die Punkte A(0|2|–3) und B(1|–4|5).

a) Berechnen Die die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$ an.

5 Abstand zweier Punkte berechnen
a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

(1) A(13|5), B(15|1) (2) A(1|14|–8), B(6|–3|9) (3) A(0|7|–13), B(11|–9|1)

b) Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass der Punkt P(12|–3|p) vom Punkt Q(13|1|9) den Abstand 9 LE hat.

6 Verschiebungen mithilfe von Vektoren beschreiben
Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ verschiebt den Punkt A auf den Punkt B. Geben Sie die fehlende Größe an.

a) A(1|–2|4), B(2|3|0)
b) A(–2|7|3), B(0|5|3)
c) A(5|7|1), $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) A(–5|0|6), $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
e) B(9|–3|1), $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
f) B(–1|7|–2), $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autor: Rüdiger Sandmann

7 Vektoren berechnen und zugehörige Pfeile in ein Koordinatensystem einzeichnen

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$ und $B(-2|0|3)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

b) Zeichnen Sie zwei Pfeile von $\vec{v}$ in ein Koordinatensystem.

8 Vektoren auf Kollinearität überprüfen

Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind. Geben Sie gegebenenfalls die Zahl an, mit der man $\vec{u}$ multiplizieren muss, um $\vec{v}$ zu erhalten.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}375 \\ -2{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$

9 Linearkombinationen berechnen

Berechnen Sie zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Linearkombination $3\vec{a} - 5\vec{b}$.

10 Drei Punkte zu einem Parallelogramm ergänzen

Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes des Parallelogramms ABCD.

a) $A(13|5|-1)$, $B(15|1|9)$, $C(5|8|0)$

b) $A(1|14|-8)$, $B(6|-3|9)$, $D(10|7|-3)$

c) $A(0|7|-13)$, $C(11|-9|1)$, $D(5|1|-3)$

d) $B(12|-2|4)$, $C(6|3|-9)$, $D(15|-3|2)$

11 Geradengleichung in Parameterform angeben

Geben Sie eine Parametergleichung für die Gerade durch die Punkte $A(-2|1|3)$ und $B(0|-1|4)$ an.

12 Punktprobe durchführen

Prüfen Sie, ob der Punkt $P(-6|5|1)$ auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ liegt.

13 Gerade veranschaulichen

Stellen Sie die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, mithilfe ihrer Spurpunkte in einem Koordinatensystem dar.

14 Zwei Geraden auf ihre gegenseitige Lage untersuchen

Untersuchen Sie die Geraden g und h auf ihre gegenseitige Lage. Geben Sie gegebenenfalls auch die Koordinaten des Schnittpunktes an.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autor: Rüdiger Sandmann

15 Geradlinige Bewegung durch eine Zeit-Ort-Gleichung modellieren

Die Flugbahn eines Flugzeugs, welches geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, lässt sich durch die Gleichung $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreiben.

(1 LE entspricht 1 km; t: Zeit in Minuten nach Beobachtungsbeginn).

a) An welcher Position befindet sich das Flugzeug drei Minuten nach Beobachtungsbeginn?

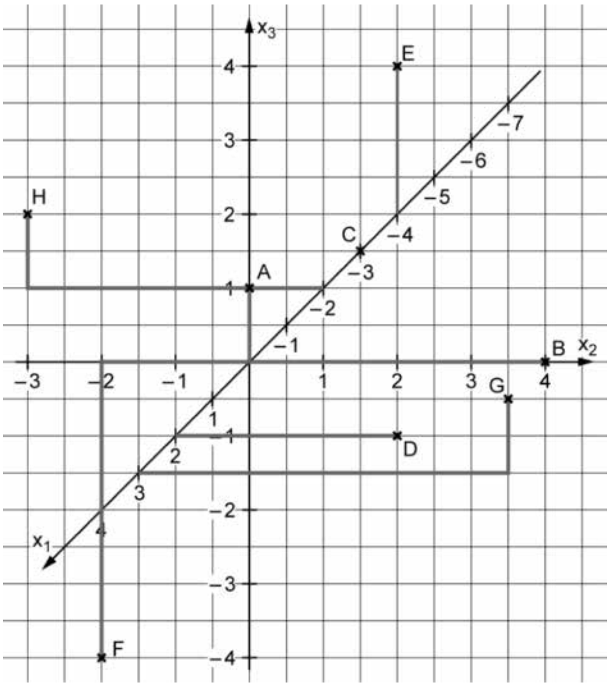
b) Geben Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs an.

Autor: Rüdiger Sandmann

Check-out Kapitel III – Lösungen

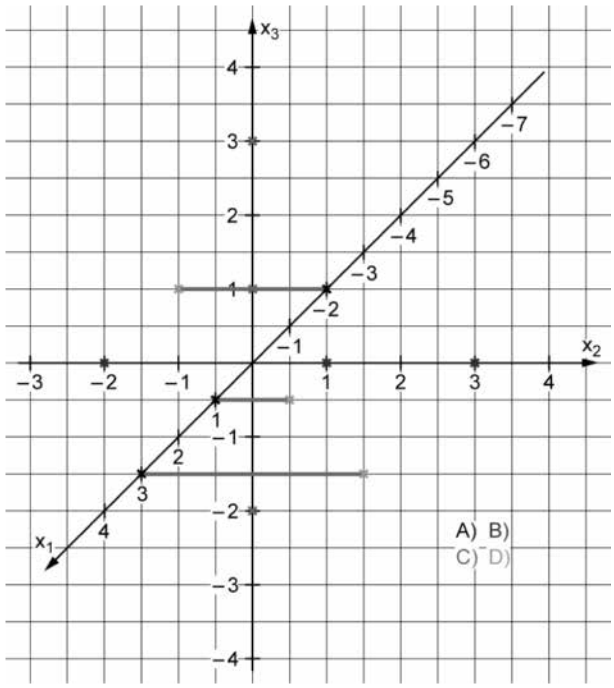
1 A(0|2|0), B(–4|0|0), C(0|–1|1), D(0|0|–3), E(4|5|1), F(–1|–3,5|–1,5)

2



3 a) Alle drei Punkte liegen
(1) auf der x_1-Achse,
(2) auf der x_2-Achse,
(3) auf der x_3-Achse,
(4) auf der Winkelhalbierenden (Diagonalen) der $x_1 x_2$-Achse.

b) Der Punkt P liegt in der $x_1 x_2$-Ebene, der Punkt Q liegt in der $x_1 x_3$-Ebene und der Punkte R liegt in der $x_2 x_3$-Ebene.



Autor: Rüdiger Sandmann

4 a) $\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-4-2)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{1+36+64} = \sqrt{101}$

b) $M\left(\frac{0+1}{2}\middle|\frac{2+(-4)}{2}\middle|\frac{-3+5}{2}\right)$, also $M\left(\frac{1}{2}\middle|-1\middle|1\right)$

5 a) (1) $d = \sqrt{20}$ (2) $d = \sqrt{603}$ (3) $d = \sqrt{573}$

b) $p = 1$ oder $p = 17$

6 a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\3-(-2)\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v} = \begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+2\\7+(-1)\\1+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\4\end{pmatrix}$; $B(7|6|4)$

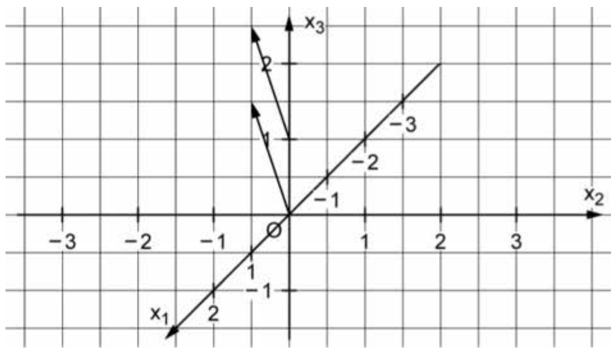
d) $B(-1|1|6)$

e) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{v} = \begin{pmatrix}9\\-3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9-7\\-3-(-2)\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $A(2|-1|1)$

f) $A(1|4|-3)$

7 a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}$

b)



8 a) nicht kollinear b) kollinear; $\vec{v} = 2\vec{u}$ c) kollinear; $\vec{v} = 0{,}75\vec{u}$

9 $3\vec{a} - 5\vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}15\\-5\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\5\\-5\end{pmatrix}$

10 a) $D(3|12|-10)$ b) $C(15|-10|14)$ c) $B(6|-3|-9)$ d) $A(21|-8|15)$

11 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

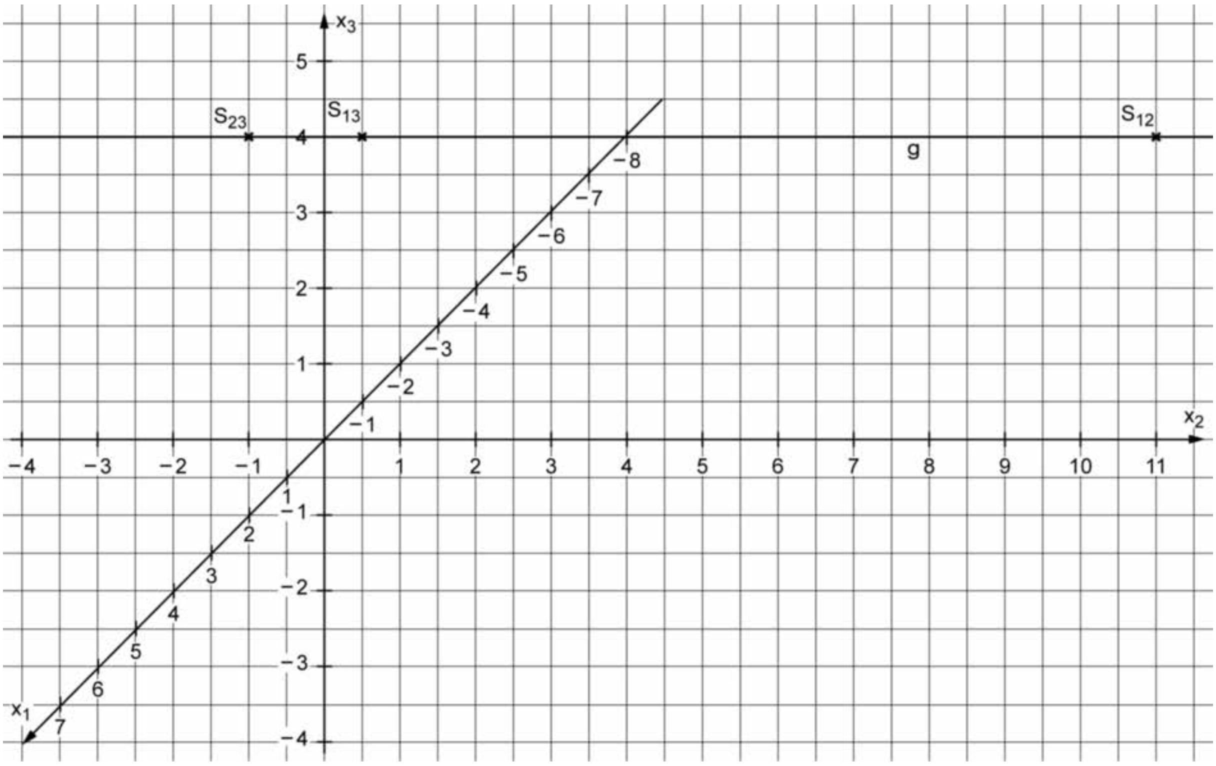
Autor: Rüdiger Sandmann

12 Es wird geprüft, ob es eine Zahl t gibt mit $\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

1. Zeile: $-6=-2+2t$ ergibt $t=-2$.
2. Zeile: $5=1-2t$ ergibt $t=-2$.
3. Zeile: $1=3+t$ ergibt $t=-2$.

Es gibt eine solche Zahl t; P liegt daher auf g.

13 Die Spurpunkte sind $S_{12}(-8|7|0)$, $S_{13}(-1|0|3{,}5)$ und $S_{23}(0|-1|4)$.



14 a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}1+2r&=-1-4s\\r&=1-2s\\2&=3\end{aligned}$

In der dritten Gleichung ergibt sich ein Widerspruch. Das zur Vektorgleichung gehörige LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind also zueinander parallel. Eine Punktprobe mit z. B. $P(1|0|2)$ zeigt, dass g und h zueinander parallel und verschieden sind.

b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}1+2r&=-1-4s\\r&=1\\2&=3+s\end{aligned}$

Aus der dritten Gleichung folgt $s=-1$. Setzt man $r=1$ und $s=-1$ in die erste Gleichung ein, so erhält man eine wahre Aussage. Das zur Vektorgleichung gehörige LGS hat genau eine Lösung, mit der sich der Schnittpunkt S bestimmen lässt: $S(3|1|2)$.

15 a) t = 3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\24\\9\end{pmatrix}$. Das Flugzeug befindet sich im Punkt $P(-15|24|9)$.

b) $\left|\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-5)^2+8^2+1^2}=\sqrt{90}\approx 9{,}49$ (in km/Minute). Umrechnung in km/h: $9{,}49\cdot 60=569{,}4$.

Das Flugzeug hat eine Geschwindigkeit von ca. 570 km/h.

Autor: Rüdiger Sandmann