Check-out Kapitel II

Auf diesen Seiten können Sie alle grundlegenden Inhalte des Kapitels wiederholen.

	Checkliste	☺	😐	☹	**Wiederholung**
1.	Ich kann den Differenzenquotienten einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 37
2.	Ich kann die mittlere Änderungsrate einer Funktion bestimmen und im Anwendungskontext ihre Bedeutung interpretieren.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 37
3.	Ich kann die momentane Änderungsrate bzw. Ableitung einer Funktion an einer Stelle näherungsweise geometrisch mithilfe der Steigung der Tangente bestimmen.	☐	☐	☐	Test, Runde 2, Aufgabe 2, Seite 65 Beispiel, Seite 41
4.	Ich kann die momentane Änderungsrate bzw. Ableitung einer Funktion an einer Stelle mithilfe des Differenzenquotienten bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 41
5.	Ich kann den Graphen der Ableitungsfunktion f’ zu einer Funktion f skizzieren und das Vorgehen hierzu erläutern.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 45
6.	Ich kann die Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel) anwenden.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 54
7.	Ich kann die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen einer Funktion in einem bestimmten Punkt bestimmen.	☐	☐	☐	Rückblick, Seite 64 Beispiel 1, Seite 58
8.	Ich kann die Gleichung einer Geraden aufstellen, welche den Graphen einer Funktion f ab einem bestimmten Punkt ohne Knick linear fortsetzt.	☐	☐	☐	Beispiel 2, Seite 58

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf den nächsten Seiten.

1 Differenzenquotienten bestimmen

Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f mit $f(x) = -5x^2 + 2$ in den Intervallen $[0; 1]$ und $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2 Mittlere Änderungsrate bestimmen

Enzyme beschleunigen bestimmte chemische Reaktionen. So beschleunigt das Enzym Amylase zum Beispiel die Spaltung von Stärke im Mund. Dieses Enzym ist im Mundspeichel enthalten. Da sich die dreidimensionale Struktur eines Enzyms in Abhängigkeit vom pH-Wert verändert, ist die Aktivität eines Enzyms vom pH-Wert abhängig. Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Enzyms Amylase vom pH-Wert. Für das Enzym ist jeweils die Aktivität in Prozent angegeben, wobei 100 % den maximalen Substratumsatz dieses Enzyms angibt.

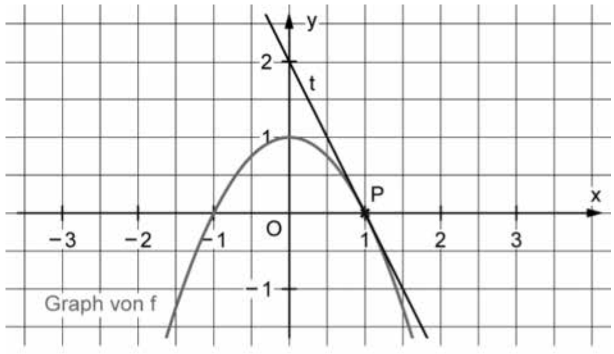
pH-Wert	4	5	6	7	8	9	10
Aktivität von Amylase (in %)	6	50	88	93	62	20	0

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[6; 10]$. Interpretieren Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate in diesem Sachzusammenhang.
b) Bestimmen Sie ein Intervall der Länge 1 (für den pH-Wert), in dem die Aktivität des Enzyms am stärksten zunimmt.

Autor: Rüdiger Sandmann

3 Steigung eines Graphen in einem Punkt bestimmen

Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 1$ die Ableitung $f'(1)$ grafisch mithilfe der eingezeichneten Tangente.



4 Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten bestimmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 7$.

a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(2)$ mithilfe des Differenzenquotienten.

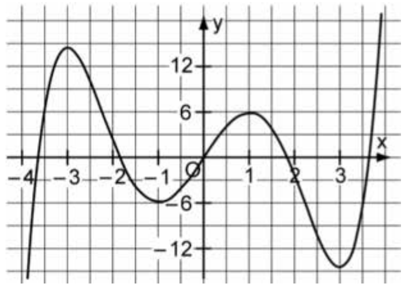
b) Bestimmen Sie die Steigung der Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ mithilfe des Differenzenquotienten.

5 Grafisch ableiten

a) Skizzieren Sie mithilfe des Graphen von f den Graphen der Ableitungsfunktion f′ und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

b) Ergänzen Sie den folgenden Satz sinnvoll.
Wenn die Steigung des Graphen von f negativ ist, dann verläuft der Graph der Ableitungsfunktion f′

____.



6 Ableitungsregeln anwenden

Leiten Sie die Funktion f zweimal ab.

a) $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - 2$ b) $f(x) = 5x^4 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{x}$ c) $f(t) = 4t^3 - 3t^2 + t$ d) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^3}$

7 Tangenten- und Normalengleichung aufstellen

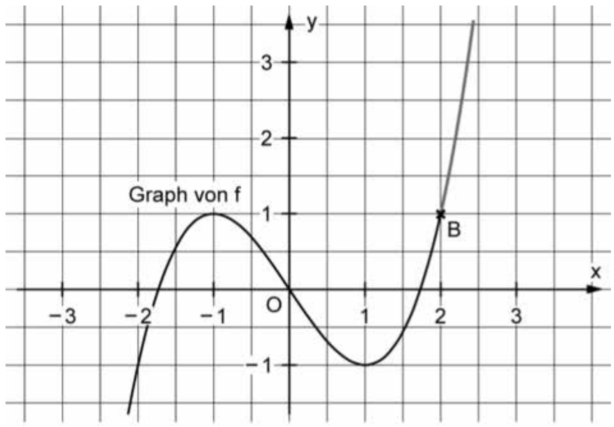
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B\big(1|f(1)\big)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $B\big(1|f(1)\big)$.

8 Den Graphen einer Funktion linear fortsetzen

Eine Straße kann von oben betrachtet durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ modelliert werden. Im Punkt $B\big(2|f(2)\big)$ soll die Straße ohne Knick in einen geraden Verlauf übergehen. Geben Sie die Gleichung der Geraden an, welche die Fortsetzung der Straße modelliert.



Autor: Rüdiger Sandmann

Check-out Kapitel II – Lösungen

1 Differenzenquotient im Intervall

$[0;\,1]$: $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{-3-2}{1} = -5$

$\left[0;\,\frac{1}{2}\right]$: $\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0} = \frac{\frac{3}{4}-2}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5$

2 a) $\frac{0-88}{10-6} = \frac{-88}{4} = -22$

Bei einer Veränderung des pH-Werts von 6 auf 10 nimmt die Aktivität des Enzyms Amylase durchschnittlich um 22 Prozentpunkte pro pH-Wert-Veränderung um den Wert 1 ab.
b) Die Aktivität des Enzyms Amylase nimmt am stärksten bei einer Veränderung des pH-Werts von 4 auf 5 zu, nämlich um 44 Prozentpunkte. Das gesuchte Intervall ist also $[4;\,5]$. In allen anderen Intervallen der Länge 1 ist die Zunahme entweder geringer oder es handelt sich um eine Abnahme.

3 Aus der Zeichnung kann man ablesen: Die Tangente hat die Steigung -2. Also ist $f'(1) = -2$.

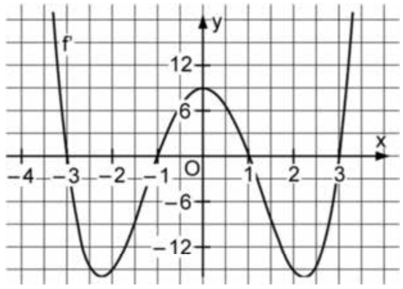
4 a) $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{-2x^2+7-(-1)}{x-2} = \frac{-2x^2+8}{x-2} = \frac{-2(x^2-4)}{x-2} = \frac{-2(x-2)(x+2)}{x-2} = -2(x+2)$,

also $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} -2(x+2) = -8$

b) $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{-2x^2+7-(-11)}{x-3} = \frac{-2x^2+18}{x-3} = \frac{-2(x^2-9)}{x-3} = \frac{-2(x-3)(x+3)}{x-3} = -2(x+3)$,

also $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} -2(x+3) = -12$.

Die Steigung an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt -12.



5 a) An den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ besitzt der Graph von f Hochpunkte. Hier ist die Steigung des Graphen 0. Daher muss die Ableitungsfunktion $f'(x)$ an diesen Stellen den Wert 0 haben. An den Stellen $x = -1$ und $x = 3$ besitzt der Graph von f Tiefpunkte. Hier ist die Steigung des Graphen 0. Daher muss die Ableitungsfunktion $f'(x)$ an diesen Stellen den Wert 0 haben. Da der Graph der Funktion für $x < -3$ steigt, muss die Ableitungsfunktion in diesem Bereich positive Werte annehmen, wobei diese sich bei Annäherung an den Hochpunkt immer stärker null nähern, d. h. kleiner werden.
Im Bereich $-3 < x < -1$ fällt der Graph der Funktion f, sodass die Ableitungsfunktion in diesem Bereich negative Werte annehmen muss. Im Bereich $-1 < x < 1$ steigt der Graph der Funktion f, sodass die Ableitungsfunktion in diesem Bereich positive Werte annehmen muss, wobei die Steigung im Ursprung am größten ist, sodass der Graph der Ableitungsfunktion im Ursprung einen Hochpunkt besitzen muss. Im Bereich $1 < x < 3$ fällt der Graph der Funktion f, sodass die Ableitungsfunktion in diesem Bereich negative Werte annehmen muss. Da der Graph der Funktion für $x > 3$ steigt, muss die Ableitungsfunktion in diesem Bereich positive Werte annehmen.
b) 1. Wenn die Steigung des Graphen negativ ist, dann verläuft der Graph der Ableitungsfunktion f′ *unterhalb der x-Achse.*

6 a) $f'(x) = -12x^2 + 10x$ $\quad f''(x) = -24x + 10$ $\quad$ b) $f'(x) = 20x^3 - \sqrt{2} - \frac{1}{x^2}$ $\quad f''(x) = 60x^2 + \frac{2}{x^3}$

c) $f'(t) = 12t^2 - 6t + 1$ $\quad f''(t) = 24t - 6$ $\quad$ d) $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{x^4}$ $\quad f''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + \frac{12}{x^5}$

Autor: Rüdiger Sandmann

7 $f'(x) = 3x^2 - 2$

a) Es ist $f(1) = -1$ und $f'(1) = 1$. Somit gilt t: $y = 1x + c$.
Eine Punktprobe mit $B(1|-1)$ liefert $-1 = 1 + c$, also $c = -2$.
Tangentengleichung: t: $y = x - 2$.

b) Steigung der Normalen: $-\frac{1}{f'(1)} = -1$. Normalengleichung: n: $y = -x + c$.
Eine Punktprobe mit $B(1|-1)$ liefert $-1 = -1 + c$, also $c = 0$.
Normalengleichung: t: $y = -x$.

8 Gesucht ist die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(2|f(2))$. Es ist $f(2) = 1$, $f'(x) = 1{,}5x^2 - 1{,}5$ und $f'(2) = 4{,}5$. Somit gilt t: $y = 4{,}5x + c$. Eine Punktprobe mit $B(2|1)$ liefert $1 = 4{,}5 \cdot 2 + c$, also $c = -8$.
Tangentengleichung: t: $y = 4{,}5x - 8$.

Autor: Rüdiger Sandmann