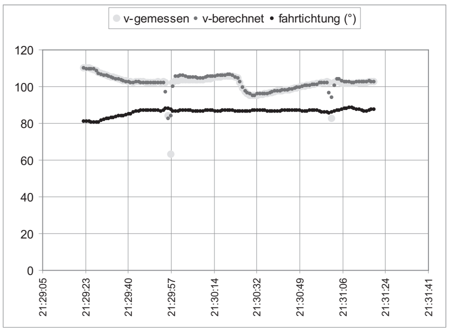
Station 1

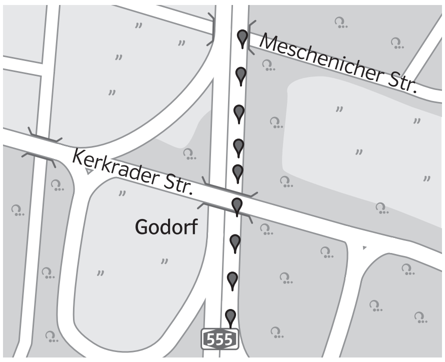
Seite 3

1 a) Wie die Umwandlung einer trk-Datei in ein Tabellenkalkulationsformat gelingt, ist in der Ergänzung zu Station 1, Seite 3, beschrieben.
b) Vgl. Schülerbuch Seite 390 – bzw. hier Seite 3 – Fig. 2, 3.
c) Ein Ausschnitt der Autobahn-Ausfahrt in Köln-Weiden 21:38:49 Uhr bis 21:42:02 Uhr mit zweimaligem Halten vor Ampeln sieht wie folgt aus:

Um 21:29:57 Uhr signalisiert das GPS z. B. einen Geschwindigkeits-Messfehler:



Tatsächlich fuhr das Auto hier unter eine Brücke (Kerkrader Straße in Godorf).



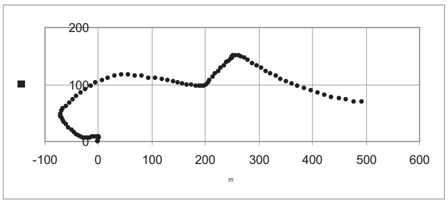
2 a) Das Navigationsgerät zeigt einen Messpunkt vor Betreten des Bahnhofs und dann eng beieinander liegende Punkte auf dem (überdachten) Bahnsteig. Man erkennt, wie beim Anfahren des Zuges die Distanz zwischen den Messpunkten wächst. Die Spitzen der Messpunkte bilden eine „glatte Linie", die aber nicht über einem Gleis verläuft. Die „glatte Linie" resultiert aus dem interpolierenden Aufzeichnen des Navigationsgeräts, die Daten werden also trotz der Messfehler (Zug fährt scheinbar nicht auf dem Gleis) sinnvoll geglättet.
b, c, d) Auch beim Kurvenfahren oder in Tunneln zeichnet das Navigationsgerät seine Spur linear extrapolierend. Es „merkt" die Richtungsänderungen mit zeitlicher Verzögerung. Das zeigt auch die Fahrspur auf einer Serpentine bei Altenahr:

Autor: Wolfgang Riemer

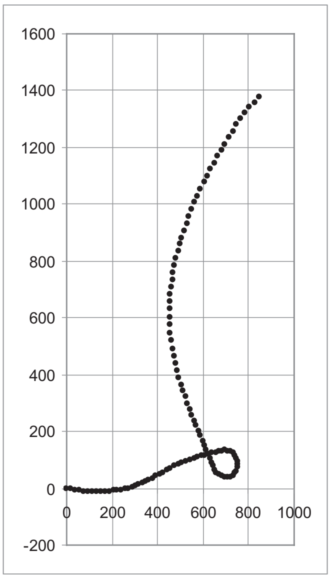
Station 2

Seite 7

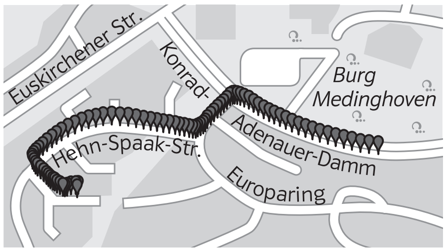
1 a) Start, Zeile 0 bis 199



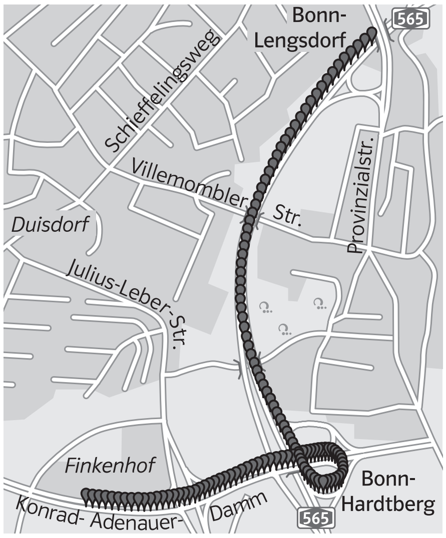
b) Zeile 298 bis 417



2 a) Start in Bonn



b) Autobahnauffahrt



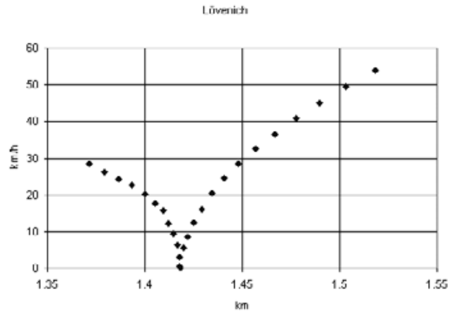
Autor: Wolfgang Riemer

Station 3

Seite 8

1 Die Geschwindigkeit der S-Bahn nimmt in 10 Sekunden um ca. 40 $\frac{km}{h}$ zu. Wenn man linear extrapoliert, müsste sie nach ca. 25 s die Geschwindigkeit 100 $\frac{km}{h}$ erreicht haben.

2 a) Die Diagramme visualisieren die grundlegenden Zusammenhänge der Differenzial- und Integralrechnung. Die Ableitung der Zeit-Weg-Funktion ist die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion.
Dort, wo die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion Nullstellen hat, hat die Weg-Geschwindigkeits-Funktion „Spitzen", weil man nicht weiterfährt. Sie ist dort nicht differenzierbar; es handelt sich im Modell um eine Wurzelfunktion.



b) Die Strecke ist ca. 11 km lang. Bei 100 $\frac{km}{h}$ hätte die Bahn mit Beschleunigung und Abbremsen ca. 7 Minuten gebraucht. Die tatsächliche Fahrzeit war knapp doppelt so groß.

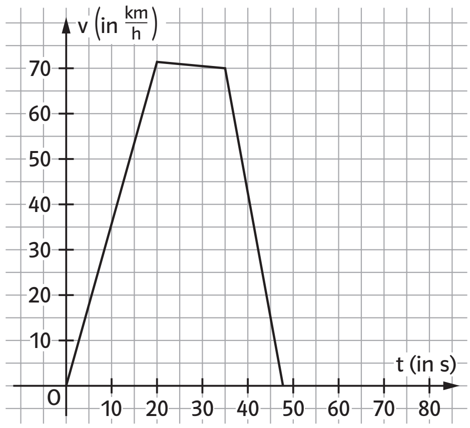
c) Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist $\frac{11{,}2\,km}{\frac{13}{60}\,h} = 51\,\frac{km}{h}$, sie passt zur Angabe des Fahrtenschreibers. Ebenso die Maximalgeschwindigkeit. Aber die gefahrene Strecke und die Fahrzeit sind zu klein. Vermutlich wurde der Fahrtenschreiber zwischendurch zurückgesetzt, was die Durchschnittsgeschwindigkeit und die Maximalgeschwindigkeit nicht beeinflusst.

d) Bei Abweichungen von unter 2 Minuten kann man den Zug als fahrplanmäßig bezeichnen, er hat die leichte Verspätung sogar ein wenig aufgeholt.

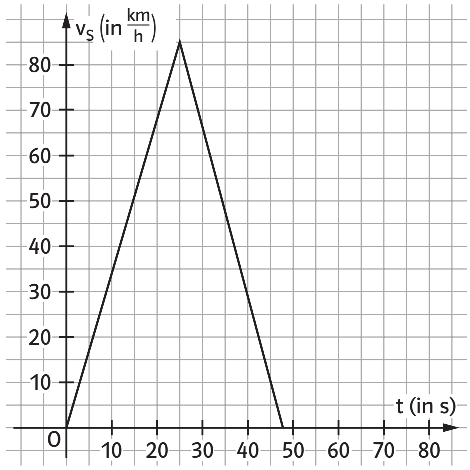
	Ist	Soll
Ab Weiden	07.37:30 h	07:36 h
Ab Lövenich	07:39:42 h	07:38 h
Ab Technologiepark	07:42:58 h	07:41 h
Ab Ehrenfeld	07:45:40 h	07:44 h
Ab Hansaring	07:49:19 h	07:48 h
An Köln Hbf	07:50:36 h	07:50 h

Seite 9

3 a) 47,5 Sekunden



b)

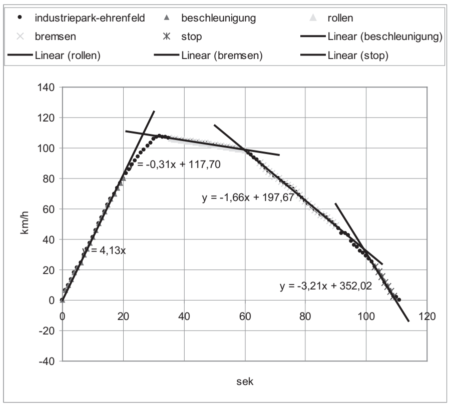


Funktion v_S mit

$$v_S(t) = \begin{cases} 3{,}6\,t & \text{für } 0 \le t \le 24{,}5 \\ -4(t-24{,}5)+88{,}2 & \text{für } t > 24{,}5 \end{cases}$$

Zeitgewinn: Abgelesener Wert 1: Sekunde, genauer Wert: 0,55 Sekunden. Der Energiemehraufwand ist deutlich höher als dieser minimale Zeitgewinn.
Bewertung der Aufgabenstellung:
Die Daten der Aufgabenstellung sind durchaus realistisch. Die Geschwindigkeit der hier (zwischen den Haltestellen Industriepark und Köln-Ehrenfeld) protokollierten S11 nimmt
- in der Beschleunigungsphase jede Sekunde um ca. 4 $\frac{km}{h}$ zu,
- in der Rollphase dann je Sekunde um ca. 0,3 $\frac{km}{h}$ ab,
- in der Anbremsphase linear jede Sekunde um ca. 1,7 $\frac{km}{h}$ ab,
- kurz vor Stillstand (Stoppphase) jede Sekunde linear mit 3,2 $\frac{km}{h}$ ab.

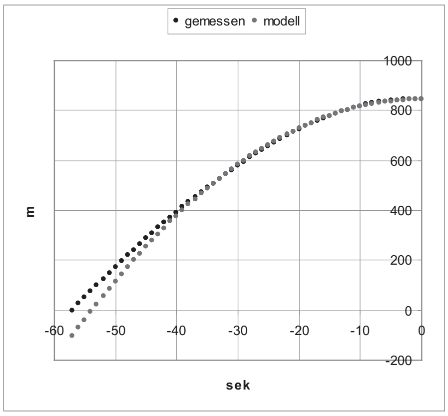
Autor: Wolfgang Riemer



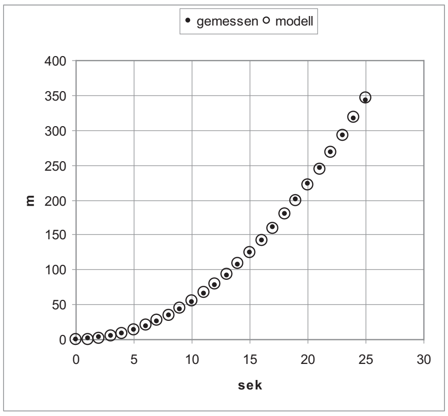
4 a) Wenn Zeit ↦ Geschwindigkeit eine lineare Funktion ist, dann ist Zeit ↦ Weg als Integralfunktion eine Funktion zweiten Grades.

b) Wie gut quadratisches Modell und gemessene Realität „lokal" zusammen passen, entnimmt man den folgenden Diagrammen:

Bremsen vor Lövenich



Beschleunigen nach Lövenich

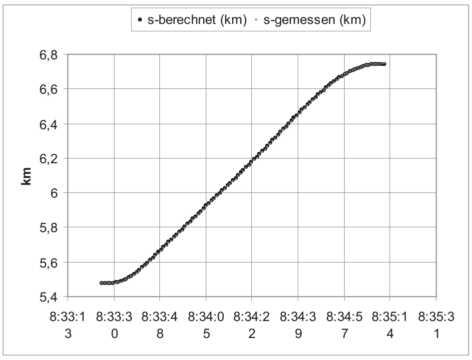


Autor: Wolfgang Riemer

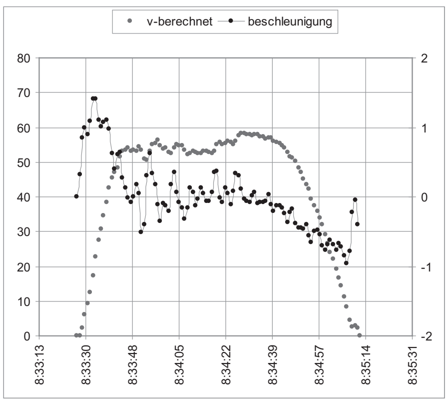
Station 4

Seite 10

1 a) Die neue Fahrstrecke in z. B. Zelle L12 ergibt sich aus der Formel
=L11+WURZEL((I11-I10)^2+(J11-J10)^2).
Die Lösungskontrolle ergibt sich aus einem Vergleich mit den in der Aufgabenstellung aufgeführten Zahlenwerten. Wie die folgende Abbildung zeigt, sind die Unterschiede zwischen den berechneten und den vom Navigationsgerät gemessenen Wegangaben unbedeutend.



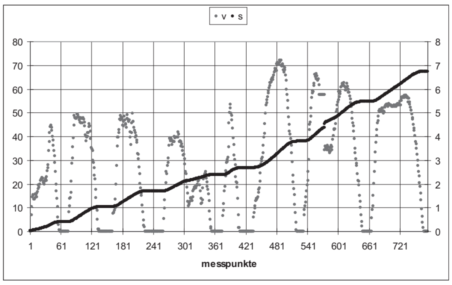
b) Man verwendet in K12 z. B. die Formel
=WURZEL((J13-J11)^2+(I13-I11)^2)*3.6/2.
Auch hier liegen die berechneten und die vom Navi angezeigten Geschwindigkeitsangaben sehr nahe beieinander.
c) Die Beschleunigung $\left(\text{in } \frac{m}{s^2}\right)$ berechnet man z. B. nach der Formel =(K11-K9)/2/3.6.
Wenn man auf die Division durch 3.6 verzichtet, liefert das Ergebnis die „sekündliche Zunahme" der Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$.
d) Der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit wird beim Bescheunigen und beim Abbremsen durch Parabeln gut beschrieben, dazwischen (bei „konstanter" Geschwindigkeit) nimmt der Weg linear mit der Zeit zu. Bei „gleichmäßer Fahrt" mit ca. 55 $\frac{km}{h}$ pendeln die gemessenen Beschleunigungen um den Wert 0. Beim Anfahren steigt die Geschwindigkeit, die Beschleunigung ist positiv $\left(\text{bis ca. } 1{,}5\,\frac{m}{s^2}\right)$ beim Abbremsen (sinkende Geschwindigkeit) ist die Beschleunigung negativ $\left(\text{bis zu ca. } -2\,\frac{m}{s^2}\right)$.
Man erkennt die Beschleunigungsfunktion als Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion wieder.

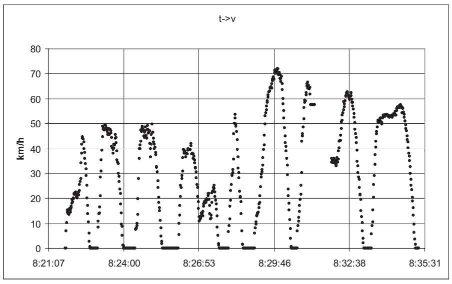


Seite 11

2 Die Fahrtrichtung berechnet sich in Zeile 14 z. B. über die Arctan-Funktion aus den Positionen kurz vor und kurz nach dem relevanten Zeitpunkt nach der Formel:
=ARCTAN((J16-J12)/(I16-I12))/PI()*360.
Die Winkelangabe von ca. 19,7° ist mit der Karte gut vereinbar.

3 a) bis c) Man erkennt: Die Geschwindigkeit (linke Hochachse) ist die Ableitung des Weges (rechte Hochachse in km).





d) Die Bahn hielt inkl. Start und Endstation 10-mal. Hätte sie mit 60 $\frac{km}{h}$ durchfahren können, hätte sie die Hälfte der Fahrzeit benötigt.

Sekunden gewartet	165
Fahrzeit insgesamt	0:13:23
Fahrzeit in h	0.22
km insgesamt	6.74
Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	30.23

f)

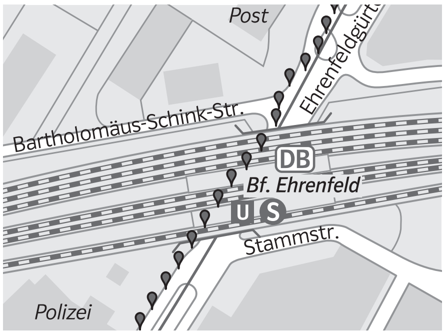
		Ist	Soll	Diff.
Aachener Str.	ab	00:21:48	08:21	0:48
Oskar Jäger Str.		08:23:01	08:22	1:02
Weinsberg Str.		08:24:27	08:23	1:27
Venloer Str.		08:26:06	08:25	1:06
Subbelrather Str.		08:28:01	08:27	1:01
Nussbaumer Str.		08:29:01	08:28	1:01
Escher Str.		08:31:51	08:30	1:51
Geldernstr.		08:31:58	08:32	−0:02*
Neusser Str.		08:33:29	08:34	−0:31
Amsterdamer Str.	an	08:35:11		

*fehlender Satellitenkontakt

Autor: Wolfgang Riemer

4 a), b), c)

Wenn der Empfang nur kurzfristig unterbrochen wird (Tunnel, vgl. letzte Spalte mit der Anzahl empfangener Satelliten), extrapoliert das GPS linear und findet nach dem Tunnel schnell wieder die richtige Position (vgl. Tabelle 1).



Bei längerer Unterbrechung des Funkkontaktes stoppt der Empfänger die lineare Extrapolation, danach sind die Messfehler deutlich höher („Positionssuche"), (vgl. Tabelle 2).

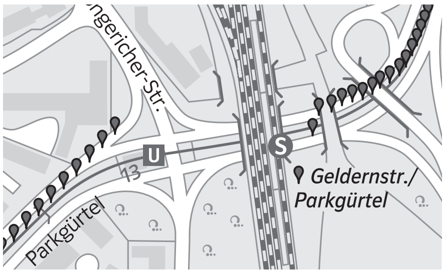


Tabelle 1

No	Lat	Lon	s (km)	v $\left(\frac{km}{h}\right)$	Zeit	HDOP	Sat
338	50.95134	6.917868	1.895464	39.892101	8:26:28	1.1	8
339	50.95143	6.917958	1.907117	39.355	8:26:29	1.1	8
340	50.95151	6.918047	1.917992	39.558701	8:26:30	6.2	4
341	50.95159	6.918137	1.92909	39.558701	8:26:31	50	0
342	50.95167	6.918225	1.940016	39.558701	8:26:32	50	0
343	50.95175	6.918313	1.951035	39.558701	8:26:33	50	0
344	50.95183	6.918402	1.962093	39.558701	8:26:34	50	0
345	50.95193	6.918503	1.975381	42.0219	8:26:35	21.5	3
346	50.95201	6.918522	1.983506	40.929199	8:26:36	2.6	5
347	50.9521	6.918593	1.995498	37.688202	8:26:37	1.1	8
348	50.95217	6.918705	2.006177	37.669701	8:26:38	1.1	8

Tabelle 2

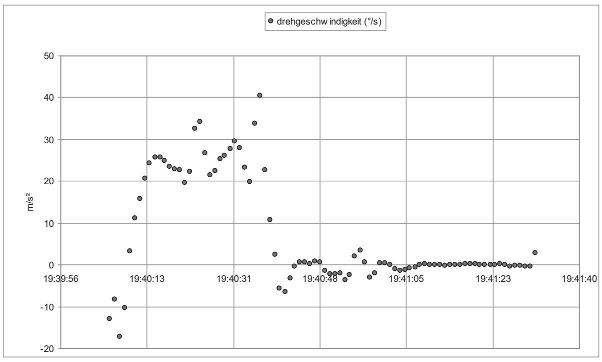
No	Lat	Lon	s (km)	v $\left(\frac{km}{h}\right)$	Zeit	HDOP	Sat
617	50.9672	6.937528	4.185038	63.7644	8:31:07	0.9	9
618	50.96732	6.937718	4.203823	64.282898	8:31:08	0.9	9
619	50.96744	6.937897	4.222233	61.616001	8:31:09	1.1	8
620	50.96755	6.938062	4.238997	57.541599	8:31:10	0.9	9
621	50.96765	6.93822	4.2551	57.541599	8:31:11	50	0
622	50.96776	6.938377	4.270994	57.541599	8:31:12	50	0
623	50.96786	6.938533	4.286839	57.541599	8:31:13	50	0
624	50.96796	6.938692	4.30291	57.541599	8:31:14	50	0
625	50.96807	6.938848	4.318917	57.541599	8:31:15	50	0
626	50.96817	6.939007	4.334908	57.541599	8:31:16	50	0
627	50.96827	6.939163	4.350753	57.541599	8:31:17	50	0
628	50.96838	6.93932	4.366808	57.541599	8:31:18	50	0
629	50.96848	6.939478	4.38283	57.541599	8:31:19	50	0
630	50.96811	6.941683	4.542946	34.447201	8:31:58	2.4	5
631	50.96848	6.94186	4.585749	35.836201	8:31:59	1.4	6
632	50.96863	6.941937	4.603298	35.336201	8:32:00	1.2	7
633	50.96866	6.942095	4.614933	35.206501	8:32:01	3.1	6
634	50.9687	6.942217	4.624901	34.280499	8:32:02	1.1	8

Autor: Wolfgang Riemer

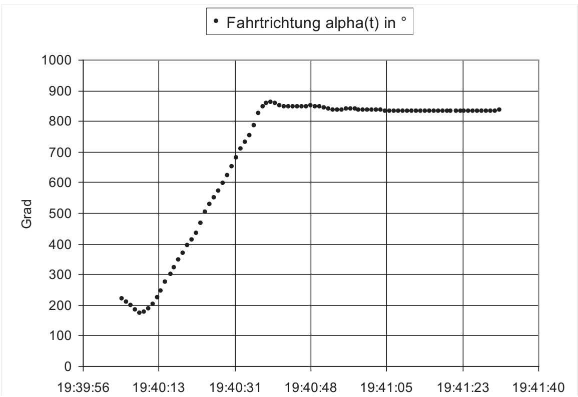
Station 5

Seite 13

1 a), b) Die numerischen Werte der Lösungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung im Schülerbuch, Seite 396 – bzw. hier Seite 13 – Fig. 2.
Die dahinter stehenden Formeln entnimmt man der Abbildung unten auf dieser Seite.
c) Der Betrag von v gibt die in einer Sekunde zurückgelegte Wegstrecke an, also die Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$.
d, e) Die Winkelgeschwindigkeit („Drehgeschwindigkeit") ist beim Einfahren in den Kreisel negativ, man fährt in einer Rechtskurve in den Kreisel hinein. Im Kreisel ist sie positiv, man fährt (zweimal) „linksherum" und dreht sich mit ca. $\frac{25°}{s}$. Bei der Ausfahrt nimmt man wieder eine Rechtskurve, die Winkelgeschwindigkeit wird kurzzeitig wieder negativ.



Zusammenhang mit der Integralrechnung:
Der Fahrtrichtungswinkel entsteht durch Integration der Winkelgeschwindigkeit. Er wird in der Rechtskurve kurzzeitig kleiner und nimmt im Kreisel linear zu. Beim Verlassen des Kreisels nimmt er kurzzeitig ab (Rechtskurve), um dann annähernd konstant zu bleiben (Geradeausfahrt).



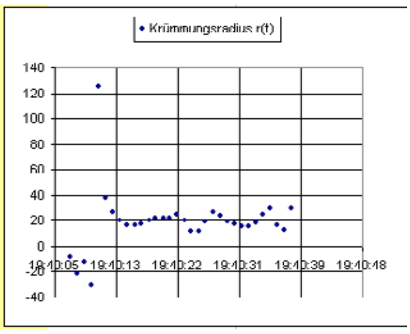
2 Individuelle Lösung.

Seite 14

Erweiterung

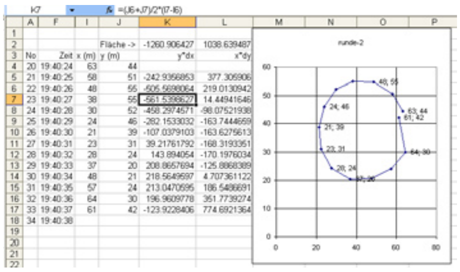
3 Krümmungsradius
a) Die Berechnung und der zeitliche Verlauf des Krümmungsradius ergeben sich aus der folgenden Abbildung.

=M7/BOGENMASS(N7)
=M8/BOGENMASS(N8)
=M9/BOGENMASS(N9)
=M10/BOGENMASS(N10)
=M11/BOGENMASS(N11)
=M12/BOGENMASS(N12)
=M13/BOGENMASS(N13)
=M14/BOGENMASS(N14)
=M15/BOGENMASS(N15)
=M16/BOGENMASS(N16)
=M17/BOGENMASS(N17)
=M18/BOGENMASS(N18)
=M19/BOGENMASS(N19)
=M20/BOGENMASS(N20)
=M21/BOGENMASS(N21)
=M22/BOGENMASS(N22)



b) Der Kreisel hat einen Radius von ca. 20 m.

4 Die umfahrene Fläche
a) In der Summe werden die Flächen von Trapezen berechnet, deren Grundseite auf der x-Achse liegt und deren Oberkante durch die Verbindungsstrecke benachbarter Positionen gebildet wird. (Die parallelen Trapezseiten verlaufen parallel zur y-Achse).
Dadurch, dass bei einer Linksbewegung die Differenzen der x-Koordinaten negativ, bei einer Rechtsbewegung positiv zählen, erhält man die Fläche des durch die Fahrspur markierten Polygons. In der Datei wurde der erste „Kreiselpunkt No 5" auch als letzter verwendet, um eine geschlossene Kreiselfläche mit dem Inhalt 1269 m² zu erhalten.
b) Das entspricht der Fläche eines Kreises mit Radius 20,1 m. Das ist mit dem Verlauf des Krümmungskreisradius hervorragend vereinbar.
c) In der zweiten Runde ergibt sich praktisch der gleiche Wert, wobei hier auf Schließen der Fahrspur verzichtet wurde. Die Konsequenz ist aber, dass die Spalten K und L nicht mehr genau die gleichen Flächeninhalte liefern.



5 Individuelle Lösungen.

O3 | fx =ARCTAN($L6/$K6)/PI()*180+180

	K	L	M	N	O
1					
2	<- radius				
3	<- Kartenursprung			startrichtung ->	=ARCTAN($L6/$K6)/PI()*180+180
4	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	d-alpha (°)	alpha (°)
5					
6	=(I7-I5)/2	=(J7-J5)/2	=WURZEL(K6^2+L6^2)		=O3
7	=(I8-I6)/2	=(J8-J6)/2	=WURZEL(K7^2+L7^2)	=ARCSIN((K6*L8-K8*L6)/(M6*M8))/PI()*180/2	=N7+O6
8	=(I9-I7)/2	=(J9-J7)/2	=WURZEL(K8^2+L8^2)	=ARCSIN((K7*L9-K9*L7)/(M7*M9))/PI()*180/2	=N8+O7
9	=(I10-I8)/2	=(J10-J8)/2	=WURZEL(K9^2+L9^2)	=ARCSIN((K8*L10-K10*L8)/(M8*M10))/PI()*180/2	=N9+O8

Autor: Wolfgang Riemer

Station 6

Seite 16

Es handelt sich hier um einen Ausschnitt der Datei, die in den Stationen 1 und 2 bearbeitet wurde.

1 a) Zelle I50: (G51-G49)/2 der in 2 Sekunden in x-Richtung zurückgelegte Weg wird durch die Zeit 2 s geteilt, das Ergebnis liefert also die Geschwindigkeit in x-Richtung $\left(\text{in } \frac{m}{s}\right)$. Analog für J50.
Zelle L50: (I51-I49)/2 der Geschwindigkeitszuwachs in x-Richtung während 2 Sekunden wird durch die Zeit 2 s geteilt, das Ergebnis liefert also die Beschleunigung in x-Richtung $\left(\text{in } \frac{m}{s^2}\right)$. Analog für M50.

b) Zelle N50: (L50*I50)+(M50*J50)/K50.
Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors (des „Vektors der Bewegungsrichtung“) sind $\begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I50 \\ J50 \end{pmatrix}$, die des Beschleunigungsvektors sind $\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L50 \\ M50 \end{pmatrix}$.

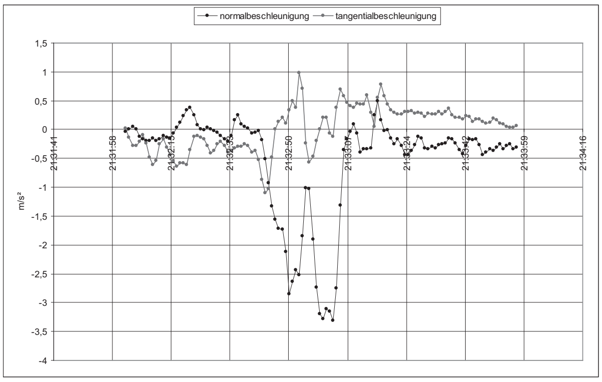
In der Klammer wird also das Skalarprodukt aus Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor berechnet und anschließend durch die Länge des Geschwindigkeitsvektors (in K50) geteilt. Das entspricht dem Skalarprodukt aus Beschleunigungs- und Geschwindigkeits-Einheitsvektor, also der Komponente des Beschleunigungsvektors in Fahrtrichtung.
Zelle O50: (L50*(-J50)+M50*I50)/K50.

Die Komponenten des Normalenvektors sind $\begin{pmatrix} -vx \\ vy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J50 \\ I50 \end{pmatrix}$, die des Beschleunigungsvektors sind $\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L50 \\ M50 \end{pmatrix}$.
In der Klammer wird also das Skalarprodukt aus Normalen- und Beschleunigungsvektor berechnet und anschließend durch die Länge des Normalenvektors geteilt. Das entspricht dem Skalarprodukt aus Beschleunigungs- und Normaleneinheitsvektor, also der Komponente des Beschleunigungsvektors orthogonal zur Fahrtrichtung.

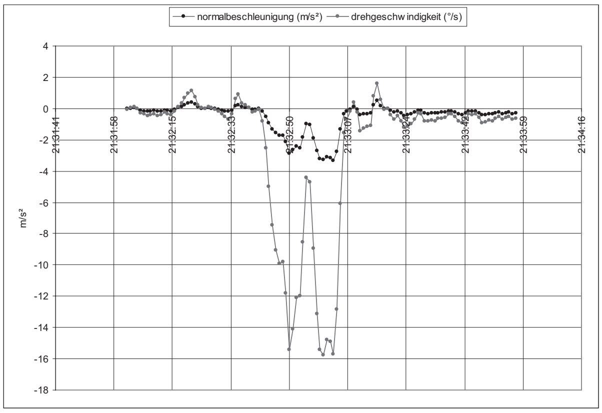
c) Individuelle Lösung.

d) Interpretation des Diagramms:
Bei dem abgebildeten Diagramm stimmt der Verlauf der Tangentialbeschleunigung mit der Erwartung überein, vor Einfahrt in die Rechtskurve ist die Tangentialbeschleunigung negativ (Abbremsen), danach positiv. Aber das Vorzeichen der Normalbeschleunigung ist verkehrt. Wenn man eine Rechtskurve fährt, ist die Normalbeschleunigung negativ.

Das richtige Beschleunigungsdiagramm ist:



Man erkennt auch, dass in der Rechtskurve die Krümmung lokal kleiner wird, dort ist die Normalbeschleunigung weniger negativ und der Fahrer gibt ein bisschen Gas (positive Tangentialbeschleunigung).
Die lokal kleiner werdende Krümmung ist auch diesem Diagramm zu entnehmen:



2 Individuelle Lösungen.

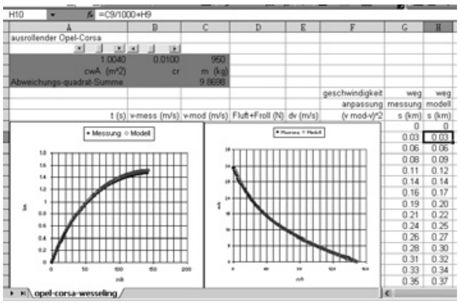
Autor: Wolfgang Riemer

Station 7

Seite 18

Erweiterung

1 a) Mit den Schiebereglern werden die versteckten Zellen A2 und B2 verändert, aus denen die Modellparameter c_w.A in A3 und B3 durch Division hervorgehen. Die gesuchte Formel in D9 lautet: =B$3*C$3*9.81+C9^2*A$3*1.2/2
C$3*9.81 gibt die Gewichtskraft des Autos mit Fahrer an, wenn man das mit B$3 multipliziert, erhält man die zum Gewicht proportionale Rollwiderstandskraft.
C9^2*A$3*1.2/2 gibt die Luftwiderstandskraft an, die quadratisch von der Geschwindigkeit in C9 abhängt. Dabei wurde die „effektive Stirnfläche" $c_w \cdot A$ als Faktor eingebaut. Man erkennt, wie die Bremskraft mit fallender Geschwindigkeit abnimmt.
b) Die Geschwindigkeitsabnahme je Sekunde in Spalte E erhält man, indem man die Bremskraft durch die Masse des Fahrzeuges teilt. Das Ergebnis wird dann von der vorherigen Geschwindigkeit subtrahiert. Die Formeln entnimmt man Spalte C der Abbildung ganz unten.
c), d) Mögliche Ergebnisse entnimmt man der Aufgabenstellung.
e) Die Abweichungsquadrate zwischen Modell und Realität werden in Spalte F berechnet und dann in Zelle C5 aufaddiert (siehe Abbildung ganz unten). Diese Summe ist zu minimieren.
f) Die Parameter für die optimale Anpassung entnimmt man der folgenden Abbildung.



Die ermittelte effektive Stirnfläche ist $1\,m^2$, das ist die Hälfte der tatsächlichen Stirnfläche, der c_w-Wert beträgt also 0,5 und liegt damit etwas oberhalb des angegebenen Reklamewertes.
Der Rollwiderstandsbeiwert ist mit 1% sehr hoch. Das liegt daran, dass es sich um einen Automatik-Corsa handelte, bei dem die Schaltung während des Ausrollversuches nicht auf Leerlauf umgelegt wurde.

Und hier zwei theoretische Ergänzungen zu den in der Aufgabe verwendeten Formeln, wenn das Projekt z.B. in einer besonderen Lernleitstung/Facharbeit (für einen Radfahrer) vertieft werden soll:

Erweiterung: 1 Luftwiderstandsformel
Die Luftwiderstandskraft beschleunigt die vom Radler verdrängte Luft. Wenn der Radler die Querschnittsfläche A hat und die Strecke s fährt, beschleunigt er das Luftvolumen $s \cdot A$, also die Masse $m = \varrho \cdot s \cdot A$ auf seine Fahrtgeschwindigkeit v.
Die kinetische Energie der Luft ist $E = 0{,}5\,m\,v^2 = 0{,}5\,\varrho \cdot A \cdot v^2$.
Sie gleicht der Luftwiderstandsarbeit $W = F_{Luft} \cdot s$.
Aus $W = E$ ergibt sich die Luftwiderstandsformel
$F_{Luft} = 0{,}5 \cdot \varrho \cdot A \cdot v^2$, wobei der Faktor c_w zur Berücksichtigung der Windschnittigkeit zu ergänzen ist.

Erweiterung: 2 Die Analysis der Bewegung im Luftwiderstand
Die beschleunigte Bewegung mit konstanter Antriebskraft wird beschrieben durch die Ricatti-Differenzialgleichung
$m\,v' = c_2 - c_1 v^2$ mit $c_2 = F_{Antrieb} - F_{Roll}$
und $c_1 = 0{,}5 \cdot \varrho_{Luft} \cdot c_w A$.
(Beim Ausrollen gilt $F_{Antrieb} = 0$.) Wir lösen sie durch „Trennung der Variablen" und schreiben $\frac{v'}{c_1 v^2 \mp c_2} = \frac{-1}{m}$.
Wenn G(x) eine Stammfunktion von $\frac{1}{c_1 x^2 - c^2}$ ist, dann folgt durch Integration
$G(v(t)) = \frac{-t}{m} + c$. Diese Gleichung löst man nach v auf, und man erhält
a) eine beschleunigte Bewegung, falls die konstante Antriebskraft die Rollreibung übersteigt ($c_2 > 0$):

$$v(t) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \cdot \frac{1 - k \cdot \exp\left(\frac{-2\sqrt{c_1 c_2}}{m}\,t\right)}{1 + k \cdot \exp\left(\frac{-2\sqrt{c_1 c_2}}{m}\,t\right)}$$

mit $k = 1$ für $v(0) = 0$ (Beschleunigung aus dem Stand) und Grenzgeschwindigkeit
$v(\infty) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$,
b) eine gebremste Bewegung, falls die konstante Antriebskraft kleiner als die Rollreibung ist ($c_2 < 0$):

$$v(t) = -\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \cdot \tan\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{m}\,t - k\right)$$

mit $k = \arctan\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot v(0)\right)$,
Ausrollzeit $t - k \cdot \frac{m}{\sqrt{c_1 c_2}}$,
Ausrollweg $s = \frac{-m \cdot \ln(\cos k)}{c_1}$.

2 Individuelle Lösungen.

D9 | =B$3*C$3*9.81+C9^2*A$3*1.2/2

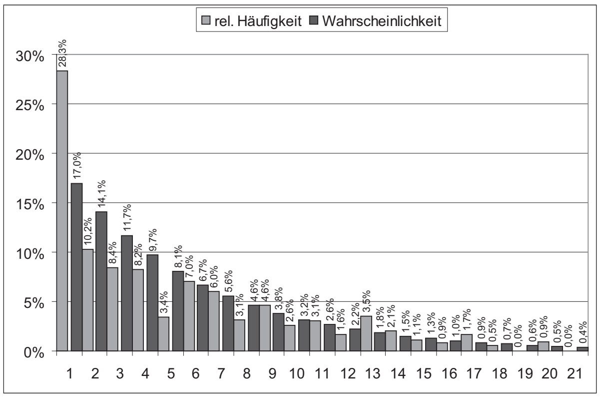
	A	B	C	D	E	F
1						
2	488	39				
3	=A2/500	=B2/4000	950			
4	cwA (m^2)	cr	m (kg)			
5	Abweichungs-quadrat-Summe		=SUMME($F7:$F148)			
6						geschwindigkeit
7						anpassung
8	t (s)	v-mess (m/s)	v-mod (m/s)	Fluft+Froll (N)	dv (m/s)	(v mod-v)^2
9	0	29.2022222222222	=D9	=B$3*C$3*9.81+C9^2*A$3*1.2/2	=D9/C$3	=(D9-C9)^2
10	1	28.4538883333333	=C9-E9	=B$3*C$3*9.81+C10^2*A$3*1.2/2	=D10/C$3	=(B10-C10)^2
11	2	27.7748616666667	=C10-E10	=B$3*C$3*9.81+C11^2*A$3*1.2/2	=D11/C$3	=(B11-C11)^2
12	3	27.0186105555556	=C11-E11	=B$3*C$3*9.81+C12^2*A$3*1.2/2	=D12/C$3	=(B12-C12)^2
13	4	26.9260280555556	=C12-E12	=B$3*C$3*9.81+C13^2*A$3*1.2/2	=D13/C$3	=(B13-C13)^2
14	5	25.9279991666667	=C13-E13	=B$3*C$3*9.81+C14^2*A$3*1.2/2	=D14/C$3	=(B14-C14)^2
15	6	25.3209452777778	=C14-E14	=B$3*C$3*9.81+C15^2*A$3*1.2/2	=D15/C$3	=(B15-C15)^2

Autor: Wolfgang Riemer

Station 8

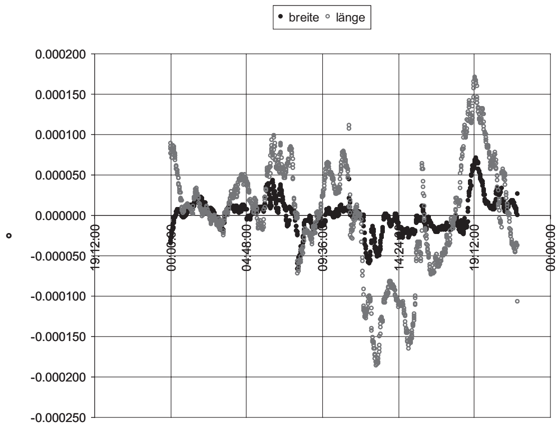
Seite 19

1 a) Bei der geografischen Breite liegen in der 1σ-Umgebung 53,2 %, in der 2σ-Umgebung 93,8 % der Messwerte.
Bei der geographischen Länge liegen in der 1σ-Umgebung 56,3 %, in der 2σ-Umgebung 89,7% der Messwerte.
b) Eine Standardabweichung in Nord-Süd-Richtung (geografische Breite) entspricht $3{,}45 \cdot 1{,}1 = 3{,}8$ [m].
Eine Standardabweichung in Ost-West-Richtung (geografische Länge) entspricht $4{,}97 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$ [m].
Die Genauigkeitsangabe von 8 m entspricht also ungefähr dem 2σ-Intervall und ist sinnvoll.
c) Die Unterschiede zwischen Exponentialverteilung und relativer Häufigkeitsverteilung ergeben sich aus folgendem Diagramm.



d) Individuelle Lösung.
Die Messungenauigkeit (gemessen in m) ist in Nord-Süd-Richtung genauso groß wie in Ost-West-Richtung. Die Abweichungen in Nord-Süd-Richtung und Ost-West-Richtung sind annähernd nomalverteilt, egal, ob man sie in Meter oder in Grad misst. Die Abweichungsquadrate (in m^2) sind annähernd exponentialverteilt.
e) Da auf eine Strecke in Ost-West-Richtung mehr Längengrade entfallen als auf eine gleich lange Strecke in Nord-Süd-Richtung, ist die Standardabweichung der angezeigten Längengrad-Messwerte größer als diejenige der Breitengrad-Messwerte. Jan hat Recht.

2 Wie die folgende Abbildung zeigt, driften die Längengrad- und Breitengrad-Messwerte auch bei den Messungen in der Datei 08-messfehler.xls.



Autor: Wolfgang Riemer