VI Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

1 Exponentielles Wachstum

S. 156

1 a) $H(t) = 4000 \cdot 1{,}02^t$

b) $1{,}02^t = e^{kt} \Rightarrow 1{,}02 = e^k \Rightarrow k = \ln 1{,}02 \approx 0{,}02$

$H(t) = 4000 \cdot e^{0{,}02 \cdot t}$

c) $k = \ln 1{,}02 = \ln(1 + 2\,\%)$

S. 158

2 a) $c = 20\,000\,€$; $k = \ln 1{,}05 \approx 0{,}05$; $f(t) = 20\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot t}$

Anmerkung: Die Bank rechnet nicht mit $g(t) = 20\,000 \cdot 0{,}05^t$, durch die unzulässige Rundung auf 0,05 entsteht eine Differenz z. B. bei $f(20) - g(20) \approx 700\,€$ zu Ungunsten der Bank.

b) $f(1) = 20\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 1} \approx 21\,025{,}40\,€$; $f(2) \approx 22\,103{,}40\,€$; $f(3) \approx 23\,236{,}70\,€$; $f(5) \approx 25\,680{,}50\,€$; $f(10) \approx 32\,974{,}40\,€$; $f(20) \approx 54\,365{,}60\,€$

c) $f(t+1) - f(t) > 2000\,€$

$$20\,000 \cdot e^{0{,}05(t+1)} - 20\,000 \cdot e^{0{,}05t} > 2000\,€$$
$$20\,000 \cdot e^{0{,}05t} \cdot (e^{0{,}05} - 1) > 2000\,€$$
$$e^{0{,}05t} > 1{,}95$$
$$t > 13{,}36$$

Im 14. Jahr beträgt das mittlere Wachstum mehr als 2000 €.

d) $f'(t) = 20\,000 \cdot e^{0{,}05t} \cdot 0{,}05 = 1000 \cdot e^{0{,}05t}$

$f'(t) = 2000 \Rightarrow 1000 \cdot e^{0{,}05t} = 2000$

$$e^{0{,}05t} = 2$$
$$t \cdot 0{,}05 = \ln 2$$
$$t \approx 13{,}86$$

Nach 14 Jahren erreicht die momentane Wachstumsrate 2000 € pro Jahr.

3 a) Prüfe die Quotienten der Bakterienzahlen jeweils aufeinander folgender Zeitschritte:

$7{,}7 : 7{,}1 \approx 1{,}08$; $8{,}3 : 7{,}7 \approx 1{,}08$; $9{,}0 : 8{,}3 \approx 1{,}08$

b) $k = \ln 1{,}08 \approx 0{,}08$; $f(t) = 7{,}1 \cdot e^{0{,}08 \cdot t}$

c)
$$12 = 7{,}1 \cdot e^{0{,}08 \cdot t}$$
$$1{,}69 = e^{0{,}08 \cdot t}$$
$$\ln 1{,}69 = 0{,}08 \cdot t$$
$$t = \frac{\ln 1{,}69}{0{,}08} \approx 6{,}6$$

Nach etwas weniger als 7 Stunden werden es mehr als 12 Millionen Bakterien sein.

4 rot: Ablesen zweier Punkte: $P_1(0\,|\,2{,}5)$ und $P_2(4\,|\,0{,}5)$;

einsetzen in $f(x) = a \cdot e^{kx}$ ergibt zwei Gleichungen:

(I) $2{,}5 = a \cdot e^0 \Rightarrow a = 2{,}5$; (II) $0{,}5 = 2{,}5 \cdot e^{4b} \Rightarrow b \approx -0{,}4$

Gleichung: $f(x) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}4x}$

analoge Vorgehensweise bei dem gelben und blauen Graphen.

gelb: $P_1(0\,|\,2)$; $P_2(4\,|\,5{,}5)$; $f(x) = 2 \cdot e^{0{,}25x}$

blau: $P_1(0\,|\,1)$; $P_2(4{,}5\,|\,6)$; $f(x) = e^{0{,}4x}$

5 a) $f(t) = c \cdot e^{kt}$

$f(0) = 88{,}9 \Rightarrow c = 88{,}9$

$f(15) = 88{,}9 \cdot e^{k \cdot 15} = 140$; $e^{k \cdot 15} = 1{,}57$; $k = \frac{\ln 1{,}57}{15} \approx 0{,}03$

$a = e^{0{,}03} \approx 1{,}03$

Die jährliche Zuwachsrate beträgt 3 %.

b) Neue Funktion g, die das Wachstum ab 2006 beschreibt:

$g(t) = 140 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ bzw. $g(t) = 140 \cdot e^{0{,}025 \cdot t}$

$g(14) = 140 \cdot e^{0{,}03 \cdot 14} \approx 213$ Millionen

oder:

$g(14) = 140 \cdot e^{0{,}025 \cdot 14} \approx 199$ Millionen

Die Prognosewerte für das Jahr 2020 schwanken zwischen 199 Millionen und 213 Millionen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 159

6 a) Vergleiche die Quotienten des relativen Risikos für Lungenkrebs aufeinander folgender gleicher Zeitschritte:

$30:38 \approx 0{,}79$; $22:30 \approx 0{,}73$; $17:22 \approx 0{,}77$; $13:17 \approx 0{,}76$; $10:13 \approx 0{,}77$

$f(t) = 38 \cdot e^{\ln 0{,}77 \cdot t} = 38 \cdot e^{-0{,}26 \cdot t}$; $t \triangleq 2$ Jahre

b) $f(7{,}5) = 38 \cdot e^{-0{,}26 \cdot 7{,}5} \approx 5{,}4$

15 Jahre nach der letzten Zigarette beträgt das Risiko an Lungenkrebs zu erkranken ca. 5,4 %.

c) $1 = 38 \cdot e^{-0{,}26 \cdot t}$

$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{38}\right)}{-0{,}26} \approx 14$

Nach 28 Jahren wird etwa das Lungenkrebsrisiko eines Nichtrauchers erreicht.

7 a) $f(t) = c \cdot e^{kt}$

$f(0) = 400 \quad \Rightarrow \quad c = 400$

$f(2) = 400 \cdot e^{2k} = 30\,000$; $e^{2k} = 75$; $k = \frac{\ln 75}{2} \approx 2{,}16$

$f(t) = 400 \cdot e^{2{,}16 \cdot t}$

b) $f(5) \approx 19{,}6$ Millionen

c) $f'(t) = 400 \cdot e^{2{,}16 \cdot t} \cdot 2{,}16 = 864 \cdot e^{2{,}16 \cdot t}$

$f'(0) \approx 860$; $f'(1) = 864 \cdot e^{2{,}16} \approx 7500$; $f'(2) = 864 \cdot e^{2{,}16 \cdot 2} \approx 65\,000$

d) $f(10) = 400 \cdot e^{2{,}16 \cdot 10} \approx 9{,}6 \cdot 10^{11}$

$f(100) = 400 \cdot e^{2{,}16 \cdot 100} \approx 2{,}6 \cdot 10^{96}$

Die Berechnung ist weniger sinnvoll, weil sich das exponentielle Wachstum sicher nicht allzu lange fortsetzen kann.

8 $a = 0{,}96$; $k = \ln 0{,}96 \approx -0{,}04$

$f(t) = e^{-0{,}04 \cdot t}$ (t in s)

$f(120) = e^{-0{,}04 \cdot 120} \approx 0{,}8\,\%$

Die Pumpe arbeitet nicht normal.

9 a) $f(0) > g(0)$ und die Wachstumskonstante von f ist kleiner als die Wachstumskonstante von g.

b) $f(t_S) = g(t_S)$; $1800 \cdot e^{0{,}8 \cdot t_S} = 800 \cdot e^{1{,}2 \cdot t_S}$; $2{,}25 = e^{0{,}4 \cdot t_S}$; $t_S = \frac{\ln 2{,}25}{0{,}4} \approx 2{,}0273$; $S(2{,}0 \,|\, 9112)$

c) $f'(t) = 1800 \cdot e^{0{,}8 \cdot t} \cdot 0{,}8 = 1440 \cdot e^{0{,}8 \cdot t}$; $f'(2{,}0273) \approx 7290$; $\tan\alpha_1 = 7290 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 89{,}9921°$

$g'(t) = 800 \cdot e^{1{,}2 \cdot t} \cdot 1{,}2 = 960 \cdot e^{1{,}2 \cdot t}$; $g'(2{,}0273) \approx 10\,935$; $\tan\alpha_2 = 10\,935 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 89{,}9948°$

Schnittwinkel: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 0{,}003°$

d) $A = \int_0^{2{,}0273} (f(t) - g(t))\,dt = \left[2250 \cdot e^{0{,}8 \cdot t} - 666{,}7 \cdot e^{1{,}2 \cdot t}\right]_0^{2{,}0273} \approx 11\,390 - 7594 - 2250 + 666$

≈ 2210

10 a) $h(0) = 0{,}02 \cdot e^{k \cdot 0} = 0{,}02$

Die Pflanze ist zu Beobachtungsbeginn 2 cm hoch.

b) $h(6) = 0{,}02 \cdot e^{k \cdot 6} = 0{,}4$; $e^{k \cdot 6} = 20$; $k = \frac{\ln 20}{6} \approx 0{,}5$

c) $h(9) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}5 \cdot 9} \approx 1{,}80$

Nach 9 Wochen ist die Pflanze 1,80 m hoch.

d) $3 - 0{,}02 \cdot e^{0{,}5 \cdot t}$; $e^{0{,}5 \cdot t} = 150$; $t = \frac{\ln 150}{0{,}5} \approx 10$

Nach etwa 10 Wochen ist die Pflanze 3 m hoch.

e) $f(t+1) - f(t) = 1{,}5$

$0{,}02 \cdot e^{0{,}5(t+1)} - 0{,}02 \cdot e^{0{,}5t} = 1{,}5$; $0{,}02 \cdot e^{0{,}5t} \cdot (e^{0{,}5} - 1) = 1{,}5$; $t = 9{,}5$

Zwischen 9,5 und 10,5 Wochen wächst die Pflanze 150 cm.

f) $f'(t) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \cdot e^{0{,}5 \cdot t}$

$0{,}01 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} = 1$; $e^{0{,}5 \cdot t} = 100$; $t = \frac{\ln 100}{0{,}5} \approx 9{,}2$

Nach 9,2 Wochen ist die momentane Wachstumsrate $\frac{1\,\text{m}}{\text{Woche}}$.

g) $3 = 3{,}5 - 8{,}2 \cdot e^{-0{,}175 \cdot t}$; $-0{,}5 = -8{,}2 \cdot e^{-0{,}175 \cdot t}$; $e^{-0{,}175 \cdot t} = 0{,}06$; $t = \frac{\ln 0{,}06}{-0{,}175} \approx 16$

Nach dieser Modellierung ist die Pflanze erst nach etwa 16 Wochen 3 m hoch.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entdeckten Fahrräder mit beiden Mängeln.
Es wird das Gegenereignis betrachtet:
Keines der untersuchten Fahrräder hat beide Mängel, d.h. $X = 0$
Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses soll gelten: $P(X=0) \leqq 10\,\%$
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}05$.

$P(X=0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^n \overset{!}{\leqq} 10\,\%$

$\Rightarrow \qquad n \geqq 45$

Es müssen wenigstens 45 Fahrräder überprüft werden.

12 a) Fehler im *Schülerbuch* bis Auflage 1[2].
Richtig muss es heißen: $x^3 - 3x^2 = \mathbf{4x}$
Die ganzrationale Funktion $x^3 - 3x^2 - 4x$ (vom Grad 3) besitzt höchstens 3 Nullstellen; es gibt also maximal 3 Lösungen.
$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3x - 4 = 0$
Lösung der quadratischen Gleichung liefert: $x_1 = -1;\ x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad L = \{-1;\ 0;\ 4\}$
b) $L = [7{,}2;\ +\infty[$

2 Bestimmung von Halbwerts- und Verdoppelungszeiten

S. 160

1 a) $f(0) = 8;\quad f(2) = 4;\quad f(4) = 2;\quad f(6) = 1$
Innerhalb von 2 Zeiteinheiten halbiert sich der Bestand.
b) $f(t) = 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot t};\quad f(0) = 3 \cdot e^0 = 3$
$6 = 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{0{,}5 \cdot t};\quad t = \frac{\ln 2}{0{,}5} \approx 1{,}4$
$12 = 3 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad 4 = e^{0{,}5 \cdot t};\quad t = \frac{\ln 4}{0{,}5} \approx 2{,}8$

S. 161

2 a) $a = 1 - 15\,\% = 0{,}85;\quad k = \ln a = \ln 0{,}85 \approx -0{,}16$
$T_H = \frac{-\ln 2}{-0{,}16} \approx 4{,}3$
Nach 4,3 Jahren ist der Wert des Autos auf die Hälfte gesunken.
b) $a = 1 + 4{,}5\,\% = 1{,}045;\quad k = \ln 1{,}045 \approx -0{,}04$
$T_V = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}045} \approx 15{,}7$
Nach 15,7 Jahren hat sich das angelegte Geld verdoppelt.
c) $T_V = \frac{\ln 2}{k} \approx 12;\quad k = \frac{\ln 2}{12} \approx 0{,}06;\quad a = e^k = e^{0{,}06} \approx 1{,}06$
Der Zinssatz beträgt 6 %.
d) $f(t) = c \cdot e^{kt};\quad f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(18{,}5) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 0{,}25}{18{,}5} \approx -0{,}075$
$a = e^k \approx 0{,}9278;\quad a - 1 \approx -0{,}072$
Es zerfallen täglich etwa 7,2 %.

3 Anmerkung: Es wird mit dem exakten TR-Wert weitergearbeitet!
a) $T_H = -\frac{\ln 2}{k} = 24\,400;\quad k = \frac{-\ln 2}{24\,400} \approx -2{,}8 \cdot 10^{-5}$
$f(t) = 30 \cdot e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot t}$
$f(-10) = 30 \cdot e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot (-10)} \approx 30{,}01\,\text{kg}$
$f(100) = 30 \cdot e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 100} \approx 29{,}91\,\text{kg}$
b) $f(1000) = 1 \cdot e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 1000} \approx 0{,}97$
Nach 1000 Jahren sind noch 97% vorhanden.
$f(10\,000) = 1 \cdot e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 10\,000} \approx 0{,}75$
Nach 10 000 Jahren sind noch 75 % vorhanden.
c) $0{,}1 = e^{-2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot t};\quad t = \frac{\ln 0{,}1}{-2{,}8 \cdot 10^{-5}} \approx 82\,000$
Nach ca. 82 000 Jahren sind 90 % einer Menge zerfallen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4 a) $a = 1 + 0{,}014 = 1{,}014$: $k = \ln 1{,}014 \approx 0{,}014$

$T_V = \frac{\ln 2}{0{,}014} \approx 50$

Nach etwa 50 Jahren hätte sich die Bevölkerung Indiens erneut verdoppelt.

b) $T_V = \frac{\ln 2}{k} = 33$; $k = \frac{\ln 2}{33} \approx 0{,}021$; $a = e^k = e^{0{,}021} \approx 1{,}021$

Die jährliche Zunahme betrug etwa 2,1%.

5 $g(t) = c \cdot e^{kt}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & g(2) = c \cdot e^{2k} = 85 \Rightarrow c = \frac{85}{e^{2k}} \\ \text{(II)} & g(5) = c \cdot e^{5k} = 135 \end{array}\right\} \text{ in (II): } \frac{85}{e^{2k}} \cdot e^{5k} = 135 \Rightarrow e^{3k} \approx 1{,}59$$

$k = \frac{\ln 1{,}59}{3} \approx 0{,}154$

$c = \frac{85}{e^{2 \cdot 0{,}154}} \approx 62$

$g(t) = 62 \cdot e^{0{,}154 \cdot t}$

$T_V = \frac{\ln 2}{0{,}154} \approx 4$

6 blauer Graph: $f(0) = 1{,}5$; $f(2) = 5 \Rightarrow a \approx 1{,}826 \Rightarrow k \approx 0{,}6$

$f(t) = 1{,}5 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}$; $T_V = \frac{\ln 2}{0{,}6} \approx 1{,}16$

relative Zunahme: $a - 1 \approx 83\,\%$

lila Graph: $f(0) = 2$; $f(2) = 3 \Rightarrow a \approx 1{,}225 \Rightarrow k \approx 0{,}2$

$f(t) = 2 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$; $T_V = \frac{\ln 2}{0{,}2} \approx 3{,}5$

relative Zunahme: $a - 1 \approx 23\,\%$

roter Graph: $f(1) = 2$; $f(3) = 1 \Rightarrow a \approx 0{,}707 \Rightarrow k \approx -0{,}35$

$f(t) = 2{,}84 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t}$; $T_H = \frac{-\ln 2}{-0{,}35} \approx 2$

relative Abnahme: $a - 1 \approx -0{,}29 \approx 30\,\%$

7 $T_H = \frac{-\ln 2}{k} = 12{,}3$; $k = \frac{-\ln 2}{12{,}3} \approx -0{,}056$

$f(t) = e^{-0{,}056 \cdot t}$

$a = e^k \approx 0{,}945$; $a - 1 \approx -0{,}055$

Jährlich zerfällt ein Anteil von 5,5%.

8 a) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0 \Rightarrow d = e = 0$

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$$\left.\begin{array}{ll} f(2) = 0: & 16a + 8b + 4c = 0 \\ f(1) = 1: & a + b + c = 1 \\ f''(1) = 0: & 12a + 6b + 2c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1;\ b = 2;\ c = 0$$

$\Rightarrow f(x) = -x^4 + 2x^3$ (roter Graph zugehörig)

b) Blauer Graph: $f(0) = 1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow f_{blau}(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + 1$

c) $f_a''(x) = -12x^2 + 12x$

Wendepunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow 12x(-x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$

$\Rightarrow W_1(0\,|\,a)$; $W_2(1\,|\,1-a)$

$d_a = \overline{W_1W_2} = \sqrt{4a^2 - 4a + 2}$

Extremwertuntersuchung mithilfe der Ersatzfunktion $E(a) = 4a^2 - 4a + 2$

$E'(a) = 8a - 4$

$E'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Für $a = \frac{1}{2}$ ergibt sich ein minimaler Abstand ($E''(a) = 8 > 0$).

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

3 Wiederholung: Extremwertprobleme

S. 162

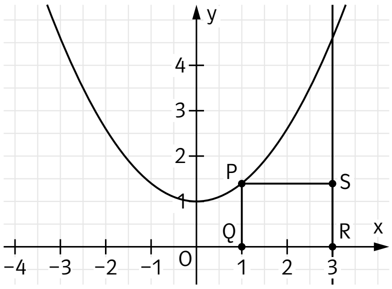
1 a) Die nach unten geöffnete Parabel ist symmetrisch zur y-Achse, ihr Scheitel $S(0|9)$, ihre Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$. Somit kann für jedes u ($0 \leqq u \leqq 3$) ein Rechteck einbeschrieben werden. Für $u = 0$ und $u = 3$ ist der Flächeninhalt gleich 0. Für einen Wert u_0, $0 < u_0 < 3$, ist der Flächeninhalt dann maximal.

b) 1) Man stellt eine Funktion f auf, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von u beschreibt.

2) Man bestimmt die Extremwerte dieser Funktion f.
u_0 ist dann eine der Stellen, für die f ein lokales Maximum bestitzt, nämlich diejenige mit dem größten Funktionswert.

S. 163

2 a)



Da $0 \leqq x_P \leqq 3$ liegt auch Q auf der x-Achse so, dass $0 \leqq x_Q \leqq 3$.
Der Flächeninhalt beträgt $A = 3$ für $x = 0$ bzw. $A = 0$ für $x = 3$.
Für einen Wert x_0 besitzt das Rechteck maximalen Flächeninhalt, entweder an einem lokalen Maximum der Flächeninhaltsfunktion oder am Rand für $x = 0$.

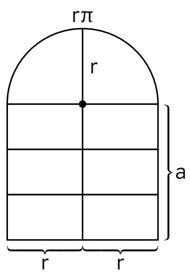
b) $A(x) = (3-x)\cdot f(x) = (3-x)\cdot(0{,}4x^2+1)$
$A(x) = 1{,}2x^2+3-0{,}4x^3-x = -0{,}4x^3+1{,}2x^2-x+3$
$A'(x) = -1{,}2x^2+2{,}4x-1$
$A'(x) = 0$ wenn $-1{,}2x^2+2{,}4x-1 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-2{,}4\pm\sqrt{5{,}76-4{,}8}}{-2{,}4} = \frac{-2{,}4\pm 0{,}98}{-2{,}4}$
$x_1 = 1{,}41$; $x_2 = 0{,}6$
x_1 ist zwar lokales Maximum, wegen $A(x_1) \approx 2{,}85$ besitzt das Rechteck für $P(0|1)$ maximale Fläche.

3 a) $V = a^2\cdot h = 40\,l$; $O = a^2+4\cdot a\cdot h$
$a^2\cdot h = 40 \Rightarrow h = \frac{40}{a^2}$
$\Rightarrow O(a) = a^2+4\cdot a\cdot\frac{40}{a^2} = a^2+\frac{160}{a}$
$\Rightarrow O'(a) = 2a-\frac{160}{a^2}$
$O'(a) = 0$ wenn $2a-\frac{160}{a^2} = 0 \Rightarrow 2a^3 = 160$; $a^3 = 80$; $a \approx 4{,}3$; $O''(a) = 2+\frac{320}{a^3} > 0$
$h = \frac{40}{4{,}3^2} \approx 2{,}2$
Die Kiste muss mit den Maßen $a = 4{,}3\,dm$ (Grundkante) und der Höhe $h = 2{,}2\,dm$ gebaut werden.

b) $V = r^2\cdot\pi\cdot h = 500\,l \Rightarrow h = \frac{500}{r^2\cdot\pi}$ (h in dm, da $1\,l = 1\,dm^3$)
ohne Deckel: $O = r^2\cdot\pi+2r\pi\cdot h$
$O(r) = r^2\cdot\pi+2r\pi\cdot\frac{500}{r^2\cdot\pi} = r^2\cdot\pi+\frac{1000}{r}$
$O'(r) = 2r\pi-\frac{1000}{r^2}$
$O'(r) = 0$ wenn $2r\pi-\frac{1000}{r^2} = 0$; $2r^3\pi = 1000$; $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}4$
$h = \frac{500}{\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{500^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = r$
Der Materialverbrauch für die Tonne ohne Deckel wird für $r = h \approx 5{,}4\,dm$ möglichst gering.
mit Deckel: $O = 2r^2\pi+2r\pi\cdot h$
$O(r) = 2r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{500}{r^2\cdot\pi} = 2r^2\pi+\frac{1000}{r}$
$O'(r) = 4r\pi-\frac{1000}{r^2}$
$O'(r) = 0$ wenn $4r\pi-\frac{1000}{r^2} = 0$; $4r^3\pi = 1000$; $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4{,}3$
Mit Deckel wird der Materialverbrauch für die Tonne für $r = 4{,}3\,dm$ und $h = 8{,}6\,dm$ möglichst gering.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4



$U = 2a + 2r + r^2\pi = 2a + r(2 + \pi r) = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{10 - r(2+\pi r)}{2}$

Maximale Lichtmenge für $\quad S = 60\,\% \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi + 80\,\% \cdot a \cdot 2 \cdot r$

$S(r) = 0{,}3 \cdot \pi \cdot r^2 + 0{,}8 \cdot (10 - r(2 + \pi r)) \cdot r = (0{,}3\,\pi - 0{,}8\,(2 + \pi r))\,r^2 + 8\,r$

$S'(r) = 0{,}6\,\pi r + 8 - 4r - 3\pi r^2; \quad S''(r) < 0$

$S'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r \approx 0{,}816$

Für $r \approx 0{,}816\,m$ und $a \approx 3{,}14\,m$ würde eine maximale Lichtmenge ins Innere gelangen.

5 a) Schnittpunkte von $f_b(x)$ und $g_b(x)$ im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$b \cdot \cos(2x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(2x) \quad \Rightarrow b \cdot \cos(2x) + \frac{1}{b} \cdot \cos(2x) = 0;$

also: $\left(b + \frac{1}{b}\right) \cdot \cos(2x) = 0; \quad \cos(2x) = 0$ für $x_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4}$

Die Fläche liegt also im Intervall $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$:

Da die gesuchte Fläche symmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$A(b) = 2 \cdot \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\left(b + \frac{1}{b}\right) \cdot \cos(2x)\right) dx \right| = 2 \cdot \left| \left(b + \frac{1}{b}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \right|$$

$$= 2 \cdot \left| \left(b + \frac{1}{b}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \cdot \left| \left(b + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| b + \frac{1}{b} \right|$$

Da die Funktionen für $b < 0$ nur die Rolle tauschen, der Flächeninhalt jedoch gleich bleibt, genügt es, $b > 0$ zu betrachten.

$A'(b) = 1 - \frac{1}{b^2}; \quad A'(b) = 0 \quad$ wenn $\quad 1 - \frac{1}{b^2} = 0; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = -1$

$A''(b) = \frac{2}{b^3}; \qquad A''(1) = 2;$ also liegt für $b = 1$ ein Tiefpunkt/Minimum vor.

Für $b = 1$ wird der Flächeninhalt minimal.

$A(1) = 2$.

b) Da kein lokales Maximum existiert und $\lim\limits_{b \to 0} A(b) = +\infty$ und $\lim\limits_{b \to +\infty} A(b) = +\infty$ existiert kein maximaler Flächeninhalt, sondern dieser kann beliebig groß werden.

6 a) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4; \; B(x \,|\, f(x))$

$A(x) = x \cdot \left(-\frac{4}{3}x + 4\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$

$A'(x) = -\frac{8}{3}x + 4$

$A'(x) = 0 \quad$ wenn $\quad -\frac{8}{3}x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5; \quad A''(1{,}5) = -\frac{8}{3} < 0$

maximale Rechtecksfläche: $A(1{,}5) = 3\,\text{FE}; \; B(1{,}5 \,|\, 2)$

b) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6\,\text{FE}$

Variante 1: $P_1(0 \,|\, 3); \; P_2(4 \,|\, 0); \; f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

$A(x) = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

$A'(x) = -\frac{3}{2}x + 3; \quad A'(x) = 0 \quad$ wenn $\quad -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

maximale Rechtecksfläche: $A(2) = 3\,\text{FE}; \; B_1(2 \,|\, 1{,}5)$

Variante 2: $P_1(0 \,|\, 2); \; P_2(6 \,|\, 0); \; f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

$A(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

$A'(x) = -\frac{2}{3}x + 2; \quad A'(x) = 0 \quad$ wenn $\quad -\frac{2}{3}x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

maximale Rechtecksfläche: $A(3) = 3\,\text{FE}; \; B_2(3 \,|\, 1)$

Ergebnis: Die maximale Rechtecksfläche bleibt immer gleich, nämlich 3 FE; der x-Wert von B ist stets der halbe x-Wert der Nullstelle von f.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

7 $f(x) = 15 \cdot (200\,€ - 25x) \cdot (70 \text{ Passagieren} + 20x)$
$f'(x) = 15 \cdot (-500x^2 + 2250x + 14\,000)$
$f'(x) = 15 \cdot (-1000x + 2250)$
$f'(x) = 0$ wenn $-1000x + 2250 = 0 \Rightarrow x = 2{,}25$
Eine Preissenkung auf $200\,€ - 25 \cdot 2{,}25\,€ = 143{,}75\,€$ würde ca. $40 + 20 \cdot 2{,}25 = 115$ Passagiere pro Flug bringen und damit tägliche Einnahmen von 247968,75 €.

8 a) $3x^2 - \frac{3}{2}\cos x$ b) $(\cos x)^2 - (\sin x)^2$ c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
d) $12x^2 \cdot \sin x + 4x^3 \cdot \cos x$ e) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sin x\right)$ f) $\cos x\,(x^2-1) + \sin x \cdot 2x$

9 Ansatz: $\frac{\alpha}{360°} \cdot r^2\pi = r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{360°}{\pi} \approx 114{,}6°$

4 Untersuchung verknüpfter Funktionen

S. 164

1 grüner Graph:
- drei einfache Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 \approx 0{,}7$; $x_3 \approx 2{,}1$
- drei Extremwerte: Tiefpunkte bei $x_4 \approx -0{,}7$; $x_5 \approx 1{,}6$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

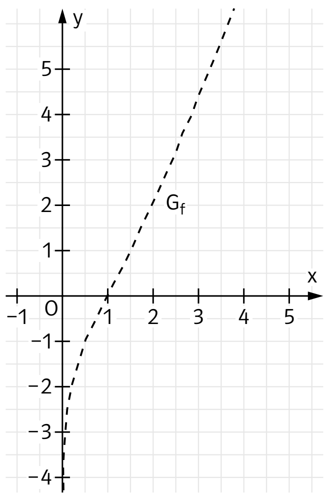
blauer Graph:
- zwei einfache Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$
- Schnittpunkt mit der y-Achse bei (0|1)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (x-Achse ist Asymptote)
- ein Hochpunkt bei $x_3 \approx 0{,}4$

roter Graph:
- Symmetrie zur y-Achse
- zwei einfache Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}6$; $x_2 \approx 1{,}6$
- x-Achse ist Asymptote

S. 167

2 a) $f'(x) = \sin x + (1+x) \cdot \cos x$ b) $g'(x) = -\sin(1+x^2) \cdot 2x$
c) $h'(x) = e^x \cdot (1+e^x) + e^x \cdot e^x = e^x \cdot (1+e^x+e^x) = e^x \cdot (1+2e^x)$ d) $f'(x) = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot \cos x$
e) $g'(x) = 3 \cdot e^{1+x}$ f) $h'(x) = e^x \cdot (x^2-2x+1) + e^x \cdot (2x-2) = e^x \cdot (x^2-1)$

3 Nullstellen: $g(x) = 0$ wenn $x+1 = 0$ oder $\ln x = 0$; Nullstelle: (1|0)
$x = -1$ n. d. $x = 1$???
Extremwerte: $g'(x) = \frac{x+1}{x + \ln x}$; $g'(x) > 0$ für alle $x \in D_g$
$\Rightarrow$ keine Extremwerte; G_g ist echt monoton steigend.
Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 167

4 a) $f(x) = 0$ wenn $-2e^x \cdot (x^2+2x) = 0$; $-2e^x < 0$ für alle $x \in D$

$x^2+2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x+2) = 0; \quad x_1 = 0; \; x_2 = -2$

b) $f'(x) = -2e^x \cdot (x^2+2x) - 2e^x \cdot (2x+2) = -2e^x \cdot (x^2+4x+2)$

$f'(x) = 0$ wenn $-2e^x \cdot (x^2+4x+2) = 0$;

$x^2+4x+2 = 0; \quad x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}; \; x_1 = -2+\sqrt{2}; \; x_2 = -2-\sqrt{2}$

$f''(x) = -2e^x \cdot (x^2+4x+2) - 2e^x \cdot (2x+4) = -2e^x \cdot (x^2+6x+6)$

$f''(-2+\sqrt{2}) < 0$, also Hochpunkt bei $(-2+\sqrt{2}\,|\,0{,}92)$

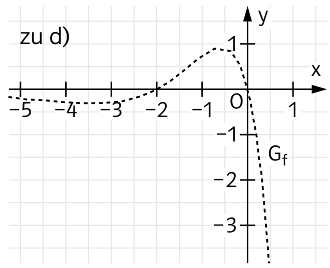
$f''(-2-\sqrt{2}) > 0$, also Tiefpunkt bei $(-2-\sqrt{2}\,|\,-0{,}32)$

c) $f''(x) = 0$ wenn $-2e^x \cdot (x^2+6x+6) = 0$; $x^2+6x+6 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{2}$; $x_1 = -3+\sqrt{3}$;

$x_2 = -3-\sqrt{3}$

Wendepunkt bei $(-3-\sqrt{3}\,|\,-0{,}23)$ und $(-3+\sqrt{3}\,|\,0{,}52)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} -2e^x \cdot (x^2+2x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -2e^x \cdot (x^2+2x) = 0$



e) $F'(x) = -4x \cdot e^x - 2x^2 \cdot e^x = -2e^x \cdot (2x+x^2) = f(x)$

f) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \left[-2x^2e^x\right]_{-2}^{0} = 0 - (-2 \cdot (-2)^2 \cdot e^{-2}) = -(-1{,}08) = 1{,}08$

g) $A_k = \int_{k}^{-2} f(x)\,dx = \left[-2x^2e^x\right]_{k}^{-2} = -2 \cdot (-2)^2 \cdot e^{-2} - (-2 \cdot k^2 \cdot e^k)$

$= -8e^{-2} + 2k^2 \cdot e^k$

$\lim\limits_{k \to -\infty} -8e^{-2} + 2k^2 \cdot e^k = -8e^{-2}$

5 Nullstellen bei $x_1 = 1$; $x_2 = 1$

Extremwerte: Tiefpunkt bei $(-0{,}4\,|\,5)$; Hochpunkt bei $(2{,}2\,|\,1{,}7)$

Wendepunkte: $W_1(-0{,}5\,|\,-2)$; $W_2(4\,|\,1{,}1)$

$\int_{1}^{2} f(x)\,dx =$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$

6 a) $f'(x) = 3 \cdot e^{-2x} + 3x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = 3e^{-2x} - 6e^{-2x} = 3e^{-2x} \cdot (1-2x)$

$f'(1) = 3e^{-2}(1-2) = -3e^{-2}$

$3e^{-2} = -3e^{-2} \cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 6e^{-2}$

Tangente: $f(x) = -3e^{-2} \cdot x + 6e^{-2}$

b) $f'(0{,}5) = 3 \cdot e^{-2 \cdot (0{,}5)} \cdot (1 - 2 \cdot 0{,}5) = 0$

Der Graph hat bei $(0{,}5\,|\,e^{-1})$ eine waagrechte Tangente.

Normale: $x = 1{,}5 \cdot e^{-1}$

c) $f''(x) = 3e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (1-2x) + 3e^{-2x} \cdot (-2) = -6e^{-2x} \cdot (1-2x) - 6e^{-2x}$

$= -6e^{-2x}(2-2x) = -12e^{-2x}(1-x)$

$f''(x) = 0$ wenn $1-x = 0$; $x = 1$

$\Rightarrow$ Tangente aus a) ist auch Wendetangente; $f(x) = -3e^{-2} \cdot x + 6e^{-2}$

7 $\left.\begin{array}{l}\text{Senkrechte Asymptote bei } x = -\frac{1}{2} \\ \text{Waagrechte Asymptote bei } y = -\frac{3}{2}\end{array}\right\}$ $f(x) = \frac{x-a}{-\frac{2}{3} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)}$; $f(0) = \frac{-a}{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$

$f(0) = -1$;

$f(x) = \frac{x+\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{3x+1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

b) $g(x) = e^{\frac{3x+1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{3x+1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}} = e^{-\frac{3}{2}}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

c) $h(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)$ $3x+1>0$ und $2\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$

$x=-\frac{1}{3}$ und $x+\frac{1}{2}<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$

$D_h = \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right[$

Die innere Funktion ist in D_h streng monoton abnehmend.

Die äußere Funktion $x \mapsto \ln x$ ist streng monoton abnehmend.

Daher ist $g(x)$ in D_h streng monoton abnehmend.

d) XXX

8 a) $f(x)=0$ wenn $x^2+x=0$; $x\cdot(x+1)=0$; $x_1=0$; $x_2=-1$

b) $g(x)=0$ wenn $e^{3x}-e^x=0$; $e^{3x}=e^x \Rightarrow 3x=x$; $x=0$

c) $f(x)=0$ wenn $x^3\cdot 2e^x-x^2\cdot e^{2x}=0$; $x^2e^{2x}=0$; $x_1=0$; $x_2=1$

d) $g(x)=0$ wenn $\ln(x^2+2x-2)=0$; also $x^2+2x-2=1 \Rightarrow x^2+2x-3=0$

$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}$; $x_1=1$; $x_2=-2$

e) $h(x)=0$ wenn $e^x-2e^{-x}=0$; $e^x=2e^{-x}$ $x=\ln 2-x$; $x=\frac{\ln 2}{2}$

f) $f(x)=0$ wenn $x-1-\frac{1}{x}=0$; $x^2-x-1=0$; $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$; $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

9 a) $f'(x)=100\cdot e^{-0{,}05x}+100\cdot(x-10)\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(-0{,}05)$

$=100\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(1-0{,}05(x-10))=100\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(1{,}5-0{,}05x)$

$f'(x)=0$ wenn $100\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(1{,}5-0{,}05x)=0 \Rightarrow 1{,}5-0{,}05x=0 \Rightarrow x=30$

Nach 30 Tagen rechnet man mit der höchsten Besucherzahl.

$f(30)=100\cdot(30-10)\cdot e^{-0{,}05\cdot 30}+10\,000\approx 10\,446$

Die Besucherzahl ist dann etwa 10 446.

b) Kurz vor und auch nach dem Besuchermaximum bleiben die Besucherzahlen fast auf dem Höchststand.

c) $f''(x)=100\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(0{,}05)\cdot(1-0{,}05x)+100\cdot e^{-0{,}05x}\cdot(0{,}05)$

$f''(x)=-5e^{-0{,}05x}\cdot(2{,}5-0{,}05x)$

$f''(x)=0$ wenn $2{,}5-0{,}05x=0 \Rightarrow x=50$

S. 169

10 a) g ist echt monoton zunehmend für $x\in]-\infty;0{,}6[$, für $x\in]0{,}6;+\infty[$ monoton abnehmend.

Der Graph schneidet bei $x\approx-0{,}4$ die x-Achse und bei $(0|2)$ die y-Achse.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, d.h. die x-Achse ist Asymptote.

b) Bei einem Startwert $x\geqq 1$ nähern sich die x_n-Werte keinem Wert (der gesuchten Nullstelle) an, sondern sie wandern immer mehr ins Unendliche.

11 a) $f(x)=0$ wenn $2xe^{1-x}=0 \Rightarrow x=0$

b) $\lim_{x\to+\infty} 2xe^{1-x}=0$; $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{1-x}=-\infty$

c) $f'(x)=2xe^{1-x}+2xe^{1-x}\cdot(-1)=2e^{1-x}\cdot(1-x)$

$f'(x)=0$ wenn $2e^{1-x}\cdot(1-x)=0 \Rightarrow x=1$; $E(1|2)$

$f''(x)=2e^{1-x}\cdot(1-x)\cdot(-1)=2e^{1-x}(x-2)$

$f''(x)=2\cdot(-1)=-2 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $(1|2)$

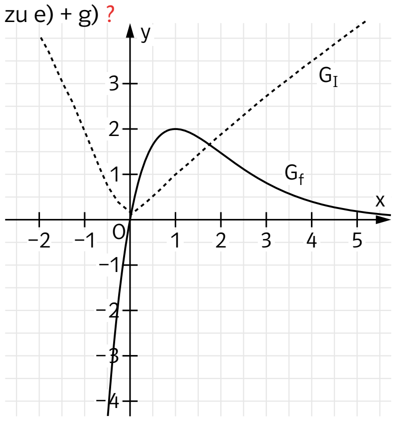
d) $f''(x)=0$ wenn $2e^{1-x}\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x=2$; Wendepunkt: $(2|4e^{-1})$

$f''(x)>0$ für $x>2 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt;

$f''(x)<0$ für $x<2 \Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

e) zu e) + g) ?

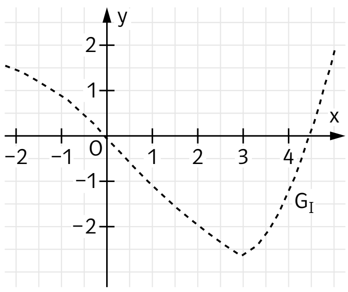


$f(-0{,}25) = -0{,}5 \cdot e^{1{,}25} \approx -1{,}75$
$f(5) = 10 \cdot e^{-4} \approx 0{,}18$

f) $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$; $\int_1^5 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

g) $I'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; I'(x) = 0$ für $x = 0$;
$I''(x) = f'(x)$; $f'(x) = 2e > 0 \;\Rightarrow$ Die Integralfunktion hat an der Stelle $(0|0)$ ein Minimum.

12



Der abgebildete Graph drückt die Ableitung $I'(x)$ aus.
Da f an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle hat, hat $I(x)$ bei $x = 3$ einen Extremwert.
Für $x < 3$ besitzt G_f negative Werte, somit fällt G_I, für $x > 3$ steigt G_I.
An der Stelle $x = 1$ hat G_f einen Tiefpunkt, somit hat G_I einen Wendepunkt.
G_I hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.

13 Beide Begriffe werden beim Testen von Hypothesen verwendet. Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese wahr ist, jedoch irrtümlich (aufgrund der Testergebnisse) verworfen wird. Das Signifikanzniveau α (für einen zu konstruierenden Test) ist die vorgegebene maximale Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler 1. Art, die man bereit ist, zu tolerieren.

14 a) E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) z.B. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor $\left| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = 12$

Mit dem Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $n_0 = -((-8) \cdot 3 + 0 + 0) = 24$

Hesse'sche Normalenform (Koordinatendarstellung): $\frac{-8x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 24}{-12} = 0$

$\left(\text{Im Nenner Vorzeichen „–“, damit } \frac{n_0}{-12} = \frac{24}{-12} < 0\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6}{3} = 0$

c) $d(R;E) = \left| \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6}{3} \right| = 2$; $d(S;E) = 2$

d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ = ist auch Normalenvektor von H: $\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

e) Nein. Der Punkt S hat von E den gleichen Abstand wie der Punkt R. R und S könnten aber auf verschiedenen Seiten von E liegen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2