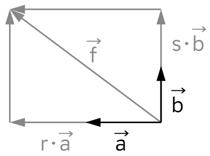
V Geraden und Ebenen im Raum

1 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

S. 118

1 a) Zum Fräsen der Spuren von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ braucht man nur die Bewegung rechts – links des Fräskopfs, da die Pfeile der Vektoren parallel sind. Aus dem gleichen Grund braucht man zum Fräsen der Spuren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ nur die Bewegung vor – zurück des Portals.

b) $\vec{f} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b}$



S. 120

2 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 2 = 2\cdot 1 \\ -3 \neq 2\cdot 2; \\ 1 \neq 2\cdot(-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}75 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} \Big\}\ r = \frac{4}{3}; \quad \Rightarrow$ linear abhängig

c) Je zwei der drei Vektoren sind linear unabhängig.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 = r \\ 2 = 4r+2s \;\Rightarrow\; -2s = 2s;\quad s = -1; \\ 3 = 5-1 \quad \text{falsch} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

c) Je zwei der drei Vektoren sind linear unabhängig.

$\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 9 = r\cdot 3 \\ -8 = r\cdot(-2)+s \;\Rightarrow\; s = -2s; \\ 9 = 3\cdot 5 - 2\cdot 3 \quad \text{wahr} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Die drei Vektoren sind linear abhängig.

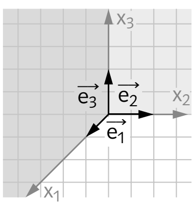
3 a) $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ sind linear unabhängig, weil keiner der drei Vektoren ein Vielfaches des anderen ist und die Vektorgleichung $\vec{e_3} = r\cdot\vec{e_1} + s\cdot\vec{e_2}$ nicht lösbar ist.
Die drei Vektoren spannen einen Würfel auf.

b) und c) Vier Vektoren im Raum sind stets linear abhängig.

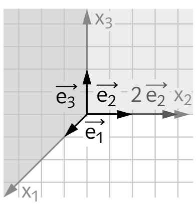
d) $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_1}+\vec{e_3}$ spannen ein räumliches Gebilde auf, sind also linear unabhängig.

e) $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}$ spannen ein räumliches Gebilde auf, sind also linear unabhängig.

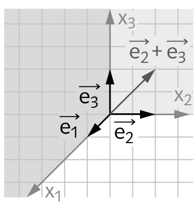
zu a)



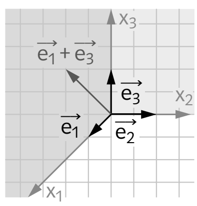
zu b)



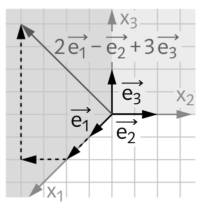
zu c)



zu d)



zu e)



4 a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix};\quad a = 7{,}5$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix};\quad a = r\cdot 1$ oder $a = \frac{1}{r} \Rightarrow a = 1$ oder $a = -1$

c) $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Bigg\}$

$\left.\begin{matrix} \text{II:} & 3 = 3r+3s \\ \text{III:} & 2 = 5r+6s \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix} r = 1-s \\ \text{in III:}\quad 2 = 5(1-s)+6s \;\Rightarrow\; s = -3;\ r = 4 \end{matrix}$

in I: $a = 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) \;\Rightarrow\; a = 11$

d) $\begin{pmatrix} a \\ a \\ -6 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Bigg\}$

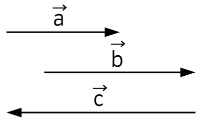
$\left.\begin{matrix} \text{I:} & a = r+3s \\ \text{II:} & a = -r+2s \end{matrix}\right\}\ \text{I}-\text{II:}\quad 0 = 2r+s;\ s = -2r$

III: $-6 = 4r-s$ in III: $-6 = 4r+2r \;\Rightarrow\; r = -1;\ s = 2$

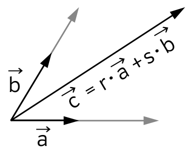
in I: $a = -1+32 \;\Rightarrow\; a = 5$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

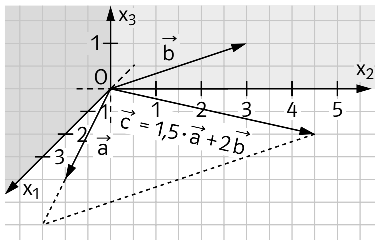
5 a)



b)

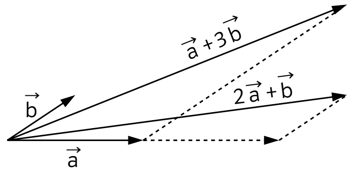


c) Zeichnung z. B. für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = 1{,}5\cdot\vec{a} + 2\vec{b}$



Das 3D-Bild lässt sich so drehen, dass man sieht, wie die Vektoren in einer Ebene liegen.

6



7 a) Je zwei der drei Vektoren sind linear abhängig.

$\vec{a} = r\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{c}$

$$\left.\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \left.\begin{array}{lrcll} \text{I:} & 4 &=& r\cdot(-1) & \Rightarrow\ r = -4 \\ \text{in II:} & 4 &=& -4\cdot 2 + s\cdot 6 & \Rightarrow\ s = 2 \\ \text{in III:} & -2 &=& -4\cdot 1 + 2\cdot 1 & \text{wahr} \end{array}\right\}$$

$\vec{a} = -4\vec{b} + 2\cdot\vec{c}$

$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.

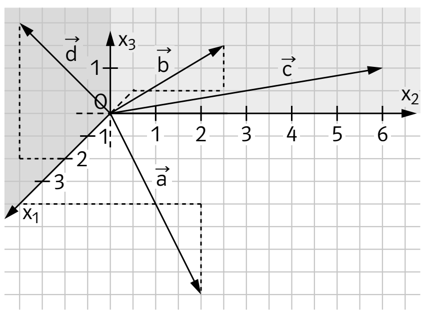
b) Aus der Lösung von Teilaufgabe a) folgt: $\vec{b} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ und $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

c) $\vec{d} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} + t\cdot\vec{c}$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 2 &=& r\cdot 4 - s\cdot 1 \\ \text{II:} & -1 &=& r\cdot 4 + s\cdot 2 + t\cdot 6 \\ \text{III:} & 3 &=& r\cdot(-2) + s\cdot 1 + t\cdot 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{rrcl} \text{aus I:} & s &=& 4r - 2 \\ \text{in II:} & -1 &=& 4r + 8r - 4 + 6t \\ \text{in III:} & 3 &=& -2r + 4r - 2 + t \\ \text{aus III:} & t &=& 5 - 2r \\ \text{in II:} & -1 &=& 12r - 4 + 6(5 - 2r) \\ & -1 &=& 26 \quad \text{Widerspruch} \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, also lässt sich $\vec{d}$ nicht als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

d)



Die Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene.

8 a) $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -30 + 24 + 6 = 0$

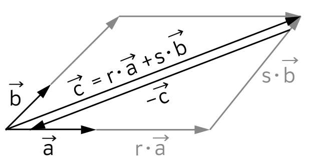
b) $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = 0$ bedeutet, dass der von den drei Vektoren aufgespannte Spat das Volumen V = ORE hat. Die Repräsentanten mit gemeinsamem Anfangspunkt liegen also in einer Ebene. Die drei Vektoren sind linear abhängig. $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \neq 0$ bedeutet, dass die Vektoren ein echtes räumliches Gebilde auspannen.

Also: $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig

$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

9



Da die Vektorgleichung $r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} + t\cdot\vec{c} = \vec{0}$ gilt auf jeden Fall $t = -1 \neq 0$.
Im gezeichneten Fall sind die drei Koeffizienten $\neq 0$.

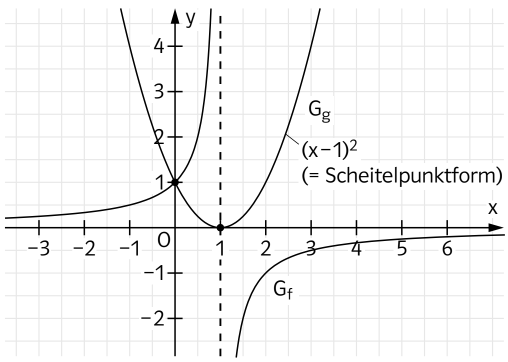
10 Ansatz: $y = mx + t$

$$\left.\begin{array}{lll} A \in g & \Rightarrow \text{(I)} & 1 = 2m + t \\ B \in g & \Rightarrow \text{(II)} & -3 = -4m + t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = \tfrac{2}{3};\ t = -\tfrac{1}{3}$$

g: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Die Gerade ist nicht Graph einer proportionalen Funktion, da sie nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

11



Schnitt der Graphen:
$\frac{1}{1-x} = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow$
$x\cdot(x^2 - 3x + 3) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0$ oder $x^2 - 3x + 3 = 0$
Da $D = 3^2 - 41\cdot3 = -3 < 0$, ist $S(0|1)$ der einzige Schnittpunkt.

2 Vektorielle Darstellung von Geraden

S. 121

1 a) $A(-1|3), B(3|2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 3 = -1m + t \\ \text{II:} & 2 = 3m + t \end{array}\right\} \begin{array}{lll} \text{I} - \text{II: } 1 = -4m & \Rightarrow & m = -\frac{1}{4} \\ \text{in I: } 3 = \frac{1}{4} + t & \Rightarrow & t = \frac{11}{4} \end{array}$$

g: $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{11}{4}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind linear abhängig.

c) $\overrightarrow{AD} = 1{,}5\cdot\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \vec{A} + 1{,}5\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \vec{A} + K\cdot\overrightarrow{AB}$; $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + K\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = K\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K = 2$
$\vec{F} = \vec{A} + 2\cdot\overrightarrow{AB}$

S. 123

2 a) g ist parallel zur x_2-Achse. b) h ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

3 a) AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ AC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ BC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

AB geht durch I, II, III; AC geht durch I, II, III; BC geht durch I, II, III.

b) AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ AC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$ BC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$

AB geht durch IV, I, V, VI; AC geht durch IV, VIII, V, VI; BC geht durch VIII, IV, I, II.

c) AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ AC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ BC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

AB geht durch III, IV, VIII, V; AC geht durch III, IV, VIII, V; C liegt auf AB, also AB − AC = BC.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4 g: $X = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$C \in g$: $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $2 = 2 \Rightarrow C \in g$

$D \in g$: $\begin{pmatrix}-2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3\\-4\\-6\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; kein 2 möglich $\Rightarrow D \notin g$

5 a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\-9\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ oder z. B. $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\5\\-6\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1{,}5\end{pmatrix}$

b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ oder z. B. $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\8\\-4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

6 A(2|−1) und B(5|3) ∈ g

$\left.\begin{array}{rl}\text{I:} & -1 = 2m + t\\ \text{II:} & 3 = 5m + t\end{array}\right\}$ I − II: $-4 = -3m \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

in I: $-1 = 2\frac{4}{3} + t \Rightarrow t = -\frac{11}{3}$

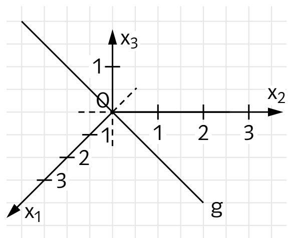
g: $x_2 = \frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{3}$

Alternative Lösung: $x_1 = 2 + 32 \Rightarrow 2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}$

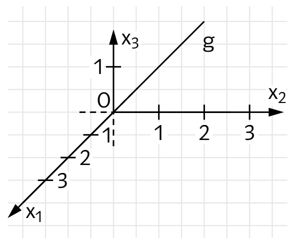
$x_2 = -1 + 42 \Rightarrow x_2 = -1 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}\right)$

$x_2 = -1 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{8}{3} \Rightarrow$ g: $x_2 = \frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{3}$

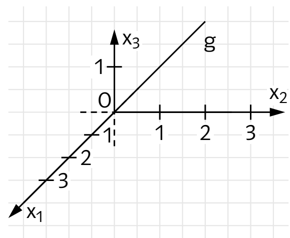
7 a) g halbiert den Winkel zwischen der positiven x_1-Achse und der positiven x_3-Achse.



b) g halbiert den Winkel zwischen der positiven x_2-Achse und der positiven x_3-Achse.



c) g schließt mit den drei positiven Achsen den gleichen Winkel ein.



8 a) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

Spurpunkt S_{12}: $0 = 3 + 32 \Rightarrow 2 = -1$

$S_{12}(2|2|0)$

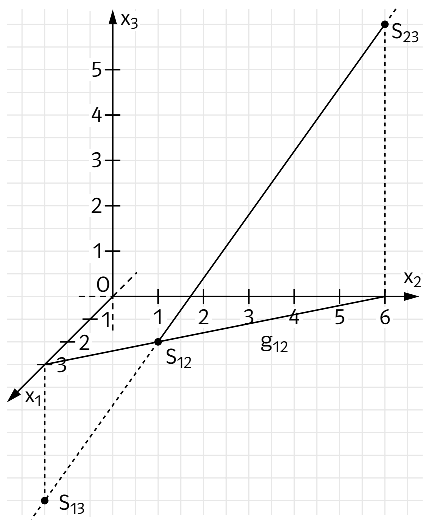
Spurpunkt S_{13}: $0 = 4 + 22 \Rightarrow 2 = -2$

$S_{13}(3|0|-3)$

Spurpunkt S_{23}: $0 = 1 - 2 \Rightarrow 2 = 1$

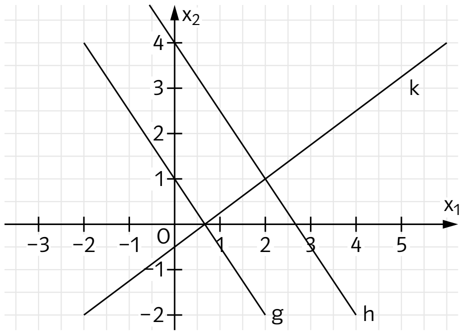
$S_{23}(0|6|6)$

b)



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

9 a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$



b) $x_1 = -22 \quad \Rightarrow \quad 2 = -\frac{x_1}{2}$

$x_2 = 1 + 32 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - \frac{3}{2}x_1; \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 1$

c) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

d) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

e) Parallele Geraden haben linear abhängige Richtungsvektoren. Bei senkrechten Geraden ist das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich Null.

S. 124

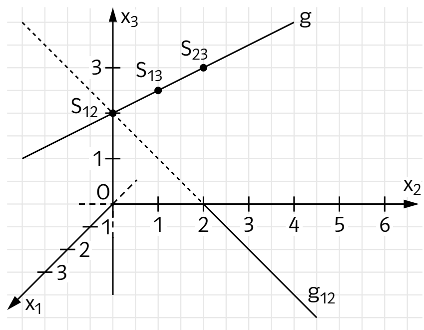
10 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$

S_{12}: $0 = 3 + 32 \quad \Rightarrow \quad 2 = -1 \qquad S_{12}(-4\,|\,-2\,|\,0)$

S_{13}: $0 = 2 + 42 \quad \Rightarrow \quad 2 = -0{,}5 \qquad S_{13}(-2\,|\,0\,|\,1{,}5)$

S_{23}: $0 = 0 + 42 \quad \Rightarrow \quad 2 = 0 \qquad S_{23}(0\,|\,2\,|\,3)$

g geht durch die Oktanten VII, III, II und I.
Im ersten Sektanten verläuft sie von links – unten – hinten nach rechts – oben – vorn.



11 h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

12 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \cdot (-8) + 8 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$; $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 8$

b) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\3\\0\end{pmatrix}$; $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{B} + \vec{D}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\3\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-4\\7\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{M}_{AS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4\\10\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$; $\vec{M}_{DS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-12\\10\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\5\\3\end{pmatrix}$; $\vec{M}_{CS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-12\\18\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\9\\3\end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$; i: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\5\\3\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$; j: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\5\\3\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

d) $V = \frac{1}{3} \cdot \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\-5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\64\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix} = 128$

$O = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\64\end{pmatrix}\right| + 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix}\right| = 64 + 2 \cdot \begin{pmatrix}48\\0\\32\end{pmatrix} = 64 + 2 \cdot 16 \cdot \sqrt{13}$
$= 64 + 32\sqrt{13}$

13 a) $500 = 20t \quad \Rightarrow \quad t = 25$; Nach 25 s erreicht das Flugzeug eine Höhe von 500 m.

b) $\vec{x} = 25 \cdot \begin{pmatrix}60\\30\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1500\\750\\500\end{pmatrix}$; $|\vec{x}| = 1750$; Das Flugzeug ist 1,75 km vom Punkt des Abhebens entfernt.

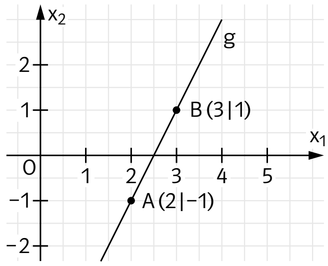
14 a) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

In $\mathbb{R}^2$ ist die Richtung eindeutig festgelegt, die Richtungsvektoren von h sind linear abhängig.
In $\mathbb{R}^3$ ist die Richtung nicht eindeutig festgelegt. Zwei Richtungsvektoren können auch linear unabhängig sein.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

15 a) w_1: $\vec{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; w_2: $\vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) w_2: $\vec{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; w_2: $\vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

16 a)



g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $x_1 = \quad 2+2 \quad \Rightarrow \quad 2 = x_1 - 2$

$x_2 = -1+22 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1+2\cdot(x_1-2) = -1+2x_1-4 = 2x_1-5$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2+1 \end{pmatrix} = 2(x_1-2) - 1(x_2+1) = 0$

$2x_1 - 4 - x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - x_2 - 5 = 0$

Die Punkte X, welche die Gleichung $\vec{h} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ erfüllen, liegen auf der Geraden g.

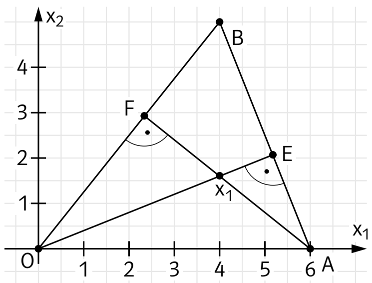
17 $P(8 < X \leqq 12) = \binom{100}{9} \cdot 0{,}1^9 \cdot 0{,}9^{91} + \binom{100}{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{90} + \binom{100}{11} \cdot 0{,}1^{11} \cdot 0{,}9^{89} + \binom{100}{12} \cdot 0{,}1^{12} \cdot 0{,}9^{88}$

$\approx \quad 0{,}1304 \quad + \quad 0{,}1319 \quad + \quad 0{,}1199 \quad + \quad 0{,}0988 \quad = 0{,}4810$

$= 48{,}10\,\%$

18 Fehler im *Schülerbuch* Auflage 1[1]: Es muss A(6|0) anstatt A(0|6) heißen.

a)



E und F liegen auf dem Thaleskreis über [OA] mit der Gleichung $(x_1-3)^2 + x_2^2 = 9$

b) Der Schnittpunkt der Höhen [OE] und [AF] muss auf der Höhe zu B liegen.
Also gilt für seine x_1-Koordinate: $x_1 = 4$

3 Gegenseitige Lage von Geraden

S. 125

1 a parallel zu b; a schneidet c; a windschief zu d; b windschief zu c und d; c windschief zu d

2 a) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) S(1,3|1,1)

S ∈ g? $\begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}3 = 4 - 52 & \Rightarrow \quad 2 = 0{,}54 \\ 1{,}1 = 22 & \Rightarrow \quad 2 = 0{,}55 \end{cases}$

S ∈ h? $\begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}3 = -1{,}5 + 5{,}5\mu & \Rightarrow \quad \mu = 0{,}509 \\ 1{,}1 = -1 \;\; + 4\mu & \Rightarrow \quad \mu = 0{,}1525 \end{cases}$

3 Z.B. Zeichnung der Geraden mit Vektoris. g und h sind windschief.

S. 126

4 a) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

I: $1 + 22 = 3 + 5\mu$
II: $2 = 2 + 4\mu$
$\Rightarrow$ II in I: $1 + 2(2 + 4\mu) = 3 + 5\mu$
$5 + 8\mu = 3 + 5\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{2}{3}$

in II: $2 = 2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$S\left(-\frac{1}{3} \middle| -\frac{2}{3}\right)$

b) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

I: $1 + 2 = 3 + 3\mu$
II: $-2 = -2 + 2\mu$
$\Rightarrow$ III in II: $-2 = -2 + 2\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$
$2 = 2$ und $\mu = 0$ in I: $1 + 2 = 3 + 3 \cdot 0$ wahr

III: $2 + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$

S(3|−2|4)

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

c) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & 3+2 = 11+3\mu \\ \text{II:} & -2+32 = 6+\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll}\text{aus II:} & \mu = -8+32 & \\ \text{in III:} & 1-22 = -1+32-8 & \Rightarrow\ 2 = 2 \\ \text{in II:} & \mu = -8+32 & \Rightarrow\ \mu = -2\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{III:} & 1-22 = -1+\mu\end{array} \qquad 2 = 2 \text{ und } \mu = -2 \text{ in I:}\quad 3+2 = 11-2\cdot 3 \text{ wahr}$$

$S(5|4|-3)$

5 a) Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig: $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Liegt A(1|2) auf h? $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ keine Lösung möglich

g ist parallel zu h.

b) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & 2+2 = -\mu \\ \text{II:} & 7+2 = 5+\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll}\text{I in II:} & 7+2 = 5-2-2 & \Rightarrow\ 2 = -2 \\ \text{in I:} & -2+2 = \mu & \Rightarrow\ \mu = 0\end{array}$$

$S(0|5)$

c) Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig: $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$

Liegt A(1|2|3) auf h? $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \mu = 2$

g = h

S. 127

6 a) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & 1+22 = 2 \\ \text{II:} & 2 = 3+\mu \\ \text{III:} & 1+2 = 4-4\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{aus I:} & 2 = \frac{1}{2} \\ \text{in II:} & \mu = -1 \\ \multicolumn{2}{l}{2 = \frac{1}{2} \text{ und } \mu = -1 \text{ in III:}\quad 1+\frac{1}{2} = 4-4\cdot(-1) \Rightarrow \text{keine Lösung möglich}}\end{array}$$

g und h sind windschief.

b) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & 1+2 = 3+3\mu \\ \text{II:} & -2 = -2+2\mu \\ \text{III:} & 2+2 = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll}\text{aus III:} & 2 = 2 & \\ \text{in II:} & -2 = -2+2\mu & \Rightarrow\ \mu = 0 \\ \multicolumn{3}{l}{2 = 2 \text{ und } \mu = 0 \text{ in I:}\quad 1+2 = 3+3\cdot 0 \quad \text{wahr}}\end{array}$$

$S(3|-2|4)$

c) Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig: $\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}$

Liegt A(−1|0|0,5) auf h? $\begin{pmatrix}-1\\0\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow \mu = -3$

g = h

7 a) Falsch; g und h können sich auch schneiden, nämlich dann, wenn $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear abhängig sind.

b) Richtig; denn wären $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig, dann müssten die Geraden parallel sein oder zusammenfallen.

c) Individuelle Lösungen

8 P(−3|0|0); Q(−1,5|0,5|2,5); R(−6|4|0)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\3{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$;

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & -3 = -1{,}5-4{,}5\mu \\ \text{II:} & 62 = 0{,}5+3{,}5\mu \\ \text{III:} & 52 = 2{,}5-2{,}5\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll}\text{aus III:} & 2 = 0{,}5-0{,}5\mu & \\ \text{in II:} & 6\cdot(0{,}5-0{,}5\mu) = 0{,}5+3{,}5\mu & \Rightarrow\ \mu = \frac{5}{13} \\ \text{aus I:} & \mu = \frac{1}{3} & \end{array}$$

g und h sind windschief.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

9 a) g_{12}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; h_{12}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g_{12} und h_{12} sind linear unabhängig.

Liegt A(3|2|0) auf h_{12}? $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = 0{,}5$

$g_{12} = h_{12}$

b) g und h liegen in einer Ebene, die senkrecht zur x_1x_2-Ebene ist. g und h können also nicht mehr windschief sein.

Die Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig, also müssen sich g und h schneiden.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 3-22 = -1+4\mu \\ \text{II:} & 2+2 = 3-2\mu \\ \text{III:} & 1+22 = -2+\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{aus II:} & 2 = 1-2\mu \\ \text{in I:} & 1+2\cdot(1-2\mu) = -2+\mu \Rightarrow \mu = 1 \\ \text{in II:} & 2 = 1-2 = -1 \\ \multicolumn{2}{l}{2 = -1 \text{ und } \mu = 1 \text{ in I: } 3+2 = 1+4 \quad \text{wahr}} \end{array}$$

S(5|1|−1)

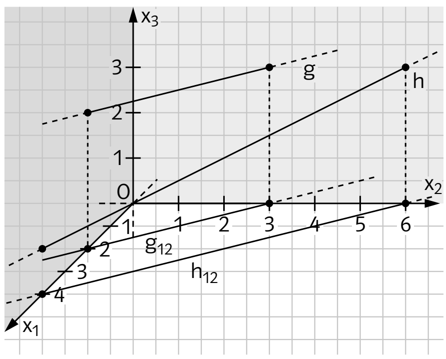
c) h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

10 a) g_{12}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; h_{12}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) und c)

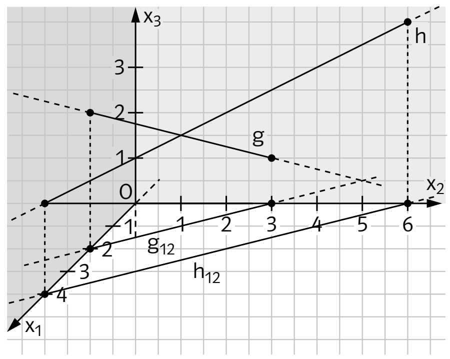
1. Möglichkeit: g ist parallel zu h

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



2. Möglichkeit: g und h sind windschief

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



11 $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1+22 \\ 2-22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+2 \\ 6+22 \\ 1-22 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PX} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8+2 \\ 6+22 \\ 1-22 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 8+2+12+42-2+42 = 0$

$18+92 = 0 \Rightarrow 2 = -2$

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 6+2\cdot(-2) \\ 1-2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

12 g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h_1 parallel zu g:

h_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h_2 senkrecht zu g:

$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+62 \\ 1-22 \\ -2+32 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{PX} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -90+362-2+42-6+92 = 0;\quad -98+492 = 0;\quad 2 = 2$

F(13|−2|7); $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; h_2: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

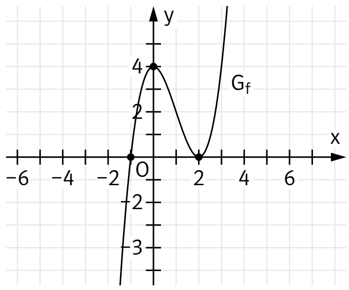
13 a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 2$

$f(0) = 4; \; f(2) = 0$

f': f' > 0 | 0 | f' < 0 | 2 | f' > 0

f: ↗ ↘ ↗



b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$

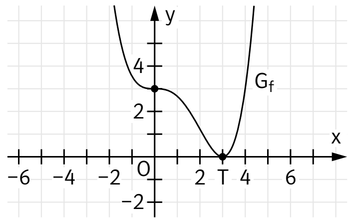
$f'(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{12}{9}x^2 = \frac{4}{9}x^2 \cdot (x-3)$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0; \; x_3 = 3 = x_1$

$f(0) = 3$

f': f' < 0 | 0 | f' < 0 | 3 | f' > 0

f: ↘ ↘ ↗



14 G ≙ Grundpreis; E ≙ erhöhter Preis

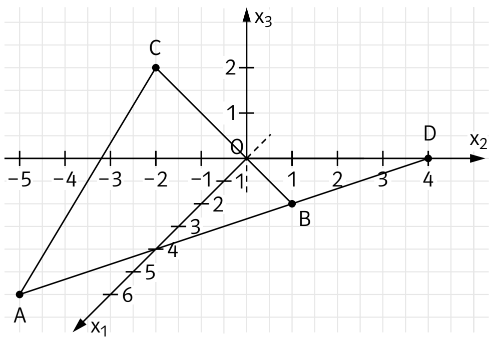
$E = 1{,}25 \cdot G \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{1{,}25} \cdot E = 0{,}8 \cdot E;$ das Geschäft kann 20 % Rabatt anbieten.

4 Vektorielle Darstellung von Ebenen

S. 128

1 a) Eine Ebene kann auf folgende Weisen festgelegt werden:
- durch zwei sich schneidende Geraden;
- durch zwei parallele Geraden;
- durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb der Geraden.

b)



AB geschnitten mit der x_2-Achse liefert $D(0|4|0) \in E$. Somit liegen auch alle Punkte der Geraden CD in der Ebene E.

CD: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 2 \in \mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$

ABCP ist also ein Parallelogramm und P liegt in der Ebene E.

Es gilt: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

S. 129

2 a) E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 a) Die Punkte liegen in der x_1x_2-Ebene. b) Die Punkte liegen in der x_2x_3-Ebene.
c) Die Punkte liegen auf der x_3-Achse. d) Die Punkte liegen auf der x_1-Achse.

S. 130

4 a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 4 = 2 + 2\mu \\ \text{II:} & 0 = 22 + \mu \\ \text{III:} & 13 = -2 + 2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \Rightarrow & 2 = 2\mu - 4 \\ \text{in II:} & 0 = 2(2\mu - 4) + \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 1{,}6 \\ \text{in I:} & 2 = 2 \cdot 1{,}6 - 4 = -3{,}8 \\ \text{in III:} & 13 = 3{,}8 + 2 \cdot 1{,}6 \quad \text{falsch} \end{array}$$

$A \in E$

Analoges Vorgehen: $B \in E \; (2 = \mu = -1); \quad C \in E \; (2 = -4; \; \mu = 2)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

b) $\begin{pmatrix}4\\3\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & 0 = 2+2\mu\\ \text{II:} & 0 = 22+\mu\\ \text{III:} & d-1 = -2+2\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\Rightarrow\ 2 = -2\mu\\ \text{in II:}\quad 0 = -3\mu \ \Rightarrow\ \mu = 0;\ 2 = 0\\ \text{in III:}\ d-1 = 0 \ \Rightarrow\ d = 1\end{array}$

$D(4|3|1)$

Aus zwei der drei Gleichungen werden die Parameterwerte für 2 und μ berechnet.
Aus der 3. Gleichung errechnet man die fehlende Koordinate.

$e = 6;\ 2 = \mu = 1;\ E(7|6|2)$
$p = \frac{11}{3};\ 2 = -\frac{4}{3};\ \mu = \frac{2}{3};\ P\left(4\middle|1\middle|\frac{11}{3}\right)$ (analoge Vorgehensweise wie bei D)

$\begin{pmatrix}o\\q\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & -4 = 2+2\mu\\ \text{II:} & q-3 = 22+\mu\\ \text{III:} & q-1 = -2+2\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll}\text{aus I:} & 2 = -4-2\mu & \\ \text{in II:} & q-3 = 2\cdot(-4-2\mu)+\mu & \Rightarrow\ q = -5-3\mu \quad (\text{II}')\\ \text{in III:} & q-1 = 4+2\mu+2\mu & \Rightarrow\ q = 5+4\mu \quad (\text{III}')\\ \text{II}'-\text{III}': & 0 = -10-7\mu & \Rightarrow\ \mu = -\frac{10}{7}\end{array}$

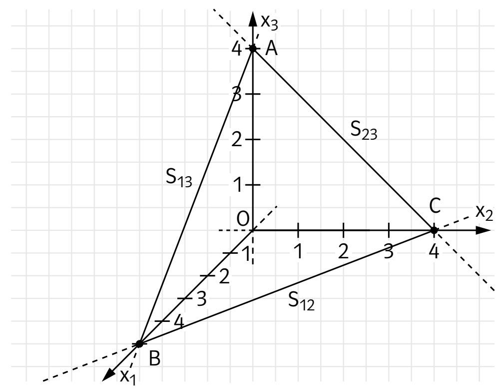
$\Rightarrow\ 2 = -4-2\cdot\left(-\frac{10}{7}\right) = -\frac{8}{7}$

$\Rightarrow\ q = 5+4\cdot\left(-\frac{10}{7}\right) = -\frac{5}{7}$

$Q\left(0\middle|-\frac{5}{7}\middle|-\frac{5}{7}\right)$

Q liegt auf der Winkelhalbierenden der positiven x_2-Achse und der positiven x_3-Achse.
$r = 3;\ 2 = 0;\ = 1\quad R(6|4|3)$ (analoge Vorgehensweise wie bei Q)

5 a)



b) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$

$S_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}$

$S_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix}$

$S_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \varphi\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$

6 a) Schnitt mit der x_1-Achse: $\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & \sigma = 6+32+6\mu\\ \text{II:} & -4 = 42+8\mu\\ \text{III:} & 13 = 2+4\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{aus III:} & 2 = -4\mu-1\\ \text{in II:} & -4 = -16\mu-4+8\mu \ \Rightarrow\ \mu = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -1\\ \text{in I:} & \sigma = 6-3 = 3\end{array}$

$S_1(3|0|0)$

Schnitt mit der x_2-Achse: $\sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & -6 = 32+6\mu\\ \text{II:} & \sigma = 4+42+8\mu\\ \text{III:} & -1 = 2+4\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll}\text{aus III:} & 2 = -4\mu-1\\ \text{in I:} & -6 = 3\cdot(-4\mu-1)+6\mu \ \Rightarrow\ \mu = 0{,}5\\ \text{in III:} & 2 = -2-1 = -3\\ \text{in II:} & \sigma = 4+4\cdot(-3)+8\cdot 0{,}5 = -4\end{array}$

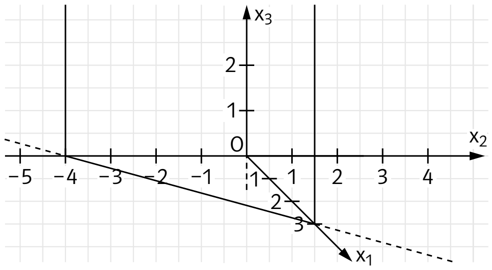
$S_2(0|-4|0)$

Schnitt mit der x_3-Achse: $\sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{I:} & -6 = 32+6\mu\\ \text{II:} & -4 = 42+8\mu\\ \text{III:} & \sigma = 1+2+4\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\Rightarrow\ 2 = -2-2\mu\\ \text{in II:}\quad -4 = 4\cdot(-2-2\mu)+8\mu \ \Rightarrow\ 4 = 0;\ \text{falsch}\\ \Rightarrow\ \text{E schneidet die } x_3\text{-Achse nicht.}\end{array}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

b) Blick in den IV. Quadranten:



Blick in den I. Quadranten analog.

c) Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.

7 Ursprung des Koordinatensystems in der hinteren linken Ecke unten.
A(4|0|3,5); B(0|4|4,5); C(0|6|2,5)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

i 6 **Hinweis:** P darf nicht auf der Gerade g liegen.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Es existiert kein 2, das die Gleichung löst; $P \notin g$.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $2 = -2$ löst die Gleichung; $P \in g$; g und P legen keine Ebene fest.

9 a) neuer Aufpunkt für $2 = 0$, $\mu = 1$: A(2|2|5)

neue Richtungsvektoren: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

neuer Aufpunkt für $2 = 1$, $\mu = 0$: A(4|1|0)

neue Richtungsvektoren: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$; $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) Wählt man für 2 und μ je einen Wert, so erhält man den neuen Aufpunkt. Die neuen Richtungsvektoren sind eine Linearkombination der ursprünglichen Richtungsvektoren.

10 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -12$; A, B, C, D liegen nicht in einer Ebene.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$; E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 a) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 1+22 = 4+\mu \\ \text{II:} & 1+32 = 4 \\ \text{III:} & 2+2 = 4+\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{aus II:}\quad 2 = 1 \\ \text{in III:}\quad \mu = -1 \\ 2 = 1;\ \mu = -1 \text{ in I:}\quad 1+2 = 4-1 \quad \text{wahr} \end{array}$$

S(3|4|3)

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 3+22 = 7+\mu \\ \text{II:} & -1+\ 2 = 1+2\mu \\ \text{III:} & 4-22 = 1+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{aus I:}\quad \mu = -4+22 \\ \text{in II:}\quad -1+2 = 1-8+42 \ \Rightarrow\ 2 = 2 \\ \text{in I:}\quad \mu = -4+4 = 0 \\ \text{in III:}\quad 4-4 = 1 \ \text{ falsch } \Rightarrow \text{ g und h sind windschief.} \end{array}$$

c) Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig: $-3\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Liegt A(3|1|4) ∈ h?
$$\left.\begin{array}{lll} \text{I:} & 3 = 3-6\mu & \Rightarrow\ \mu = 0 \\ \text{II:} & 1 = -1-3\mu & \Rightarrow\ \mu = -\frac{2}{3} \\ \text{III:} & 4 = 4+12\mu & \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ es existiert keine Lösung für } \mu; \text{ g und h sind parallel.}$$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Individuelle Lösungen

12 $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 4 = 15\pi \approx 47{,}1 \quad [\text{dm}^3];$

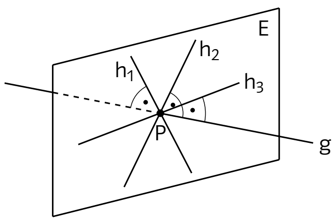
$$\begin{aligned} O &= O_{\text{Viertel der Kugel}} + O_{\text{Boden der Viertelkugel}} + O_{\text{Hälfte des Kegels}} + O_{\text{Boden des Halbkegels}} \\ &= \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 3^2\pi + \frac{1}{2}\cdot 3^2\pi + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3^2+4^2}\,\pi + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 \\ &= 9\pi + \frac{9}{2}\pi + \frac{15}{2}\pi + 12 = 21\pi + 12 \approx 78{,}0 \quad [\text{dm}^2] \end{aligned}$$

5 Normalenformen der Ebenengleichung

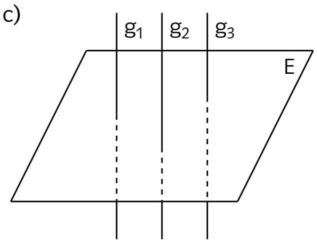
S. 131

1 a) Durch einen Punkt P einer Geraden g gibt es unendlich viele senkrechte Geraden h. Die Richtungsvektoren von drei Geraden sind linear abhängig, d.h. die Pfeile sind parallel zu einer Ebene E, die senkrecht zu g ist.

b)



c)



Die Lotgeraden zu einer Ebene E sind parallel.

S. 132

2 a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix};\quad E\colon \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0;\quad E\colon 10x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 19 = 0$

b) $|\vec{n}| = \sqrt{189} = 3\sqrt{21};\quad \text{HNF: } \frac{10x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 19}{3\sqrt{21}} = 0$

c)
$$\left.\begin{array}{lll} A \in E? & 10\cdot 2 - 8\cdot(-2) - 5\cdot 1 - 19 = 12 \neq 0 & \Rightarrow\ A \notin E \\ B \in E? & 10\cdot 3 - 8\cdot 1 - 5\cdot 1 - 19 = -2 \neq 0 & \Rightarrow\ B \notin E \end{array}\right\} \text{AB kann nicht in E liegen.}$$

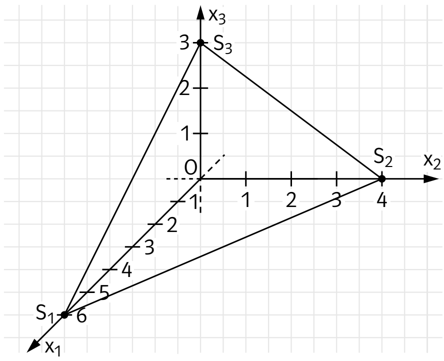
3 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ -42 \end{pmatrix} = 7\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix};\quad \vec{n_0} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$E\colon \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0;\quad E\colon \frac{1}{7}\cdot(-3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 11) = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4 a) Schnittpunkt mit der x_1-Achse:
$2x_1 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \quad S_1(6|0|0)$
Schnittpunkt mit der x_2-Achse:
$3x_2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \quad S_2(0|4|0)$
Schnittpunkt mit der x_3-Achse:
$4x_3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 \quad S_3(0|0|3)$

b) $\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$



5 g: $3x_1 + 2x_3 - 6 = 0$; Gerade in der x_1x_3-Ebene

E: $3x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 6 = 0$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; Ebene E parallel zur x_2-Achse

6 E: $x_1 - x_3 = 0$; Winkelhalbierende Ebene zwischen x_1x_2-Ebene und der x_2x_3-Ebene

7 A(3|0|3); B(6|3|3); C(3|6|3); D(0|3|3); E(3|3|0); F(3|3|6)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; E(ABF): $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

E(BCE): $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$; $x_1 + x_2 - x_3 - 6 = 0$

8 a) $x = 2^5 = 32$; $L = \{32\}$
b) $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert; $L = \{\ \}$
c) $x = 81$; $L = \{81\}$
d) $x = 441$; $L = \{441\}$

9 a) $f'(x) = 0{,}3 \cdot x^{-0{,}7}$; $F(x) = \frac{1}{1{,}3} \cdot x^{1{,}3}$
b) $f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F(x) = \frac{3}{8} \cdot x^{\frac{8}{3}}$
c) $f'(x) = \frac{7}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}}$; $F(x) = \frac{4}{11} \cdot x^{\frac{11}{4}}$
d) $f'(x) = 0{,}9 \cdot x^2$; $F(x) = \frac{3}{40} \cdot x^4$
e) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; $f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$; $F(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
f) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; $f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$; $F(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

6 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

S. 133

1 a) $g = PQ$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Normalenform

in Vektordarstellung: E: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

in Koordinatendarstellung: E: $4x_1 - x_2 - 4 = 0$

c) S muss die Gleichungen von g und E erfüllen. Man setzt den Ortsvektor $\vec{X}$ aus der Gleichung von g in die Gleichung von E ein.
Aus g: $x_1 = -2 + 22$; $x_2 = 0$; $x_3 = 22$
in E: $4 \cdot (-2 + 22) - 0 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -8 + 82 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1{,}5$
$2 = 1{,}5$ in g eingesetzt: $\vec{g} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(1|0|3)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 134

2 a) $g = AB\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E \cap g\colon\ 2 + 32 - 2 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot (1 + 2) + 7 = 0$

$2 + 32 - 6 + 32 + 7 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -1;$

$2 = -1$ in g eingesetzt: $S(-1|3|0)$

b) $h = CD\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E \cap g\colon\ 3 + 2 - 2 \cdot (2 + 22) + 3 \cdot (1 + 2) + 7 = 0$

$2 + 2 - 4 - 42 + 3 + 32 + 7 = 0 \ \Rightarrow\ 0 + 9 = 0$ falsch

E und h haben keinen Punkt gemeinsam, also $h \parallel E$.

3 $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$ $\quad \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$E\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0;$ $\quad E\colon\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3 = 0$

a) $g = PQ\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$

$E \cap g\colon\ 5 \cdot (1 + 32) + 2 \cdot (-5 + 22) - 6 \cdot (1 + 22) - 3 = 0$

$5 + 152 - 10 + 42 - 6 - 122 - 3 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 2;$

$2 = 2$ in g eingesetzt: $S(7|-1|5)$

b) $g = PQ\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

$E \cap g\colon\ 5 \cdot (2 + 22) + 2 \cdot (4 + 2) - 6 \cdot (1 + 22) - 3 = 0$

$10 + 102 + 8 + 22 - 6 - 122 - 3 = 0 \ \Rightarrow\ 0 + 9 = 0$ falsch

$E \cap g = \{\ \}$, also $g \parallel E$.

S. 135

4 $E_{12}\colon x_3 = 0;\quad E_{13}\colon x_2 = 0;\quad E_{23}\colon x_1 = 0$

a) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$g \cap E_{12}\colon\ 1 + 42 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -\frac{1}{4};\quad S_{12}(2{,}5|1{,}75|0)$

$g \cap E_{13}\colon\ 3 +\ 2 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -2;\quad S_{13}(-1|0|-7)$

$g \cap E_{23}\colon\ 3 + 22 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -1{,}5;\quad S_{23}(0|0{,}5|-5)$

b) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \cap E_{12}\colon\ 1 +\ 0 = 0 \ \Rightarrow$ kein Schnittpunkt; $g \parallel x_1x_2$-Ebene

$g \cap E_{13}\colon\ 2 + 22 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -1;\quad S_{13}(4|0|1)$

$g \cap E_{23}\colon\ 3 -\ 2 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 3;\quad S_{23}(0|8|1)$

5 x_1-Achse: $\vec{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\ x_2$-Achse: $\vec{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\ x_3$-Achse: $\vec{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \pi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$ $\quad \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$E\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0;$ $\quad E\colon\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3 = 0$

x_1-Achse $\cap$ E: $\ 52 - 3 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = \frac{2}{5};\quad S_1\left(\frac{3}{5}\middle|0\middle|0\right)$

x_2-Achse $\cap$ E: $\ 22 - 3 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 1{,}5;\quad S_2(0|1{,}5|0)$

x_3-Achse $\cap$ E: $\ -62 - 3 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -\frac{1}{2};\quad S_3\left(0\middle|0\middle|-\frac{1}{2}\right)$

Die Spurgeraden bilden ein Dreieck, das im V. Oktanten liegt.

b) $E\colon\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 12 = 0$

x_1-Achse $\cap$ E: $\ 32 - 12 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 4;\quad S_1(4|0|0)$

x_2-Achse $\cap$ E: $\ -22 - 12 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = -6;\quad S_2(0|-6|0)$

x_3-Achse $\cap$ E: $\ 42 - 12 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 3;\quad S_2(0|0|3)$

Das Spurgeradendreieck liegt im IV. Oktanten liegt.

c) $E\colon\ x_2 + 3x_3 - 6 = 0$

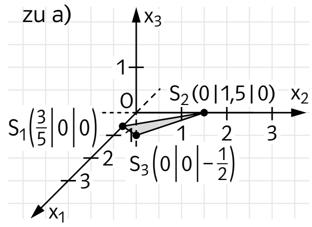
kein Schnittpunkt mit der x_1-Achse

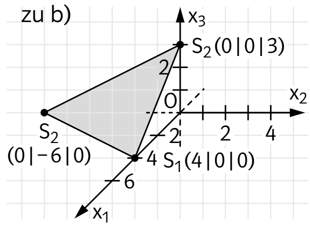
x_2-Achse $\cap$ E: $\ 2 - 6 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 6;\quad S_2(0|6|0)$

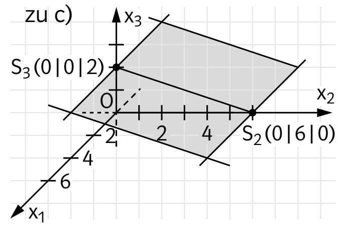
x_3-Achse $\cap$ E: $\ 32 - 6 = 0 \ \Rightarrow\ 2 = 2;\quad S_3(0|0|2)$

E ist parallel zur x_1-Achse.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2







6 Koordinatensprung in D, DA ist x_1-Achse; DC ist x_2-Achse; DH ist x_3-Achse
A(8|0|0); B(8|8|0); C(0|8|0); D(0|0|0); E(8|0|8); F(8|8|8); G(0|8|8); H(0|0|8)

E_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-8\\0\\8\end{pmatrix}$; E_1: $x_1 - x_2 + x_3 - 8 = 0$ E_2: $\vec{X} = \mu\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8\end{pmatrix}$; E_2: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

g = EC: $\vec{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-8\end{pmatrix}$

$E_1 \cap g$: $8 - 82 - 82 + 8 - 82 - 8 = 0$; $-242 + 8 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{3}$; $S_1\left(5\frac{1}{3}\middle|2\frac{2}{3}\middle|5\frac{1}{3}\right)$

$E_2 \cap g$: $8 - 82 - 82 + 8 - 82 = 0$; $-242 + 16 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2}{3}$; $S_1\left(2\frac{2}{3}\middle|5\frac{1}{3}\middle|2\frac{2}{3}\right)$

7 E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

a) $g \parallel E$: $\vec{n_E} \circ \begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 2{,}5$

$g \perp E$: $2\cdot\vec{n_E} = \begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow 2 = -1$; $a = -2$

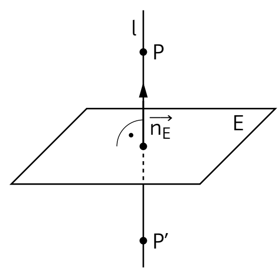
b) $g \parallel E$: $\vec{n_E} \circ \begin{pmatrix}1\\2a\\a\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2 + 4a + a = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$

$g \perp E$: $2\cdot\vec{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2a\\a\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2a\\a\end{pmatrix} \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2}$; $a = -\frac{1}{2}$

8 Individuelle Lösungen;

z.B. $g \subset E$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $g \parallel E$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

9



$\vec{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$; E: $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$

l: $\vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$

$A \cap l$: $2(6 + 22) + 2 - 4(-4 - 42) = 0$

$12 + 42 + 2 + 16 + 162 = 0 \Rightarrow 28 + 212 = 0 \Rightarrow 2 = -\frac{4}{3}$

Für P' gilt: $2 = -\frac{8}{3} \Rightarrow P'\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{8}{3}\middle|\frac{20}{3}\right)$

10 a) Man legt eine Ebene E durch P senkrecht zu g. Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist der Normalenvektor $\vec{n_E}$ der Ebene E. Dann berechnet man die Koordinaten des Schnittpunkts F von g mit E.
Für P' gilt: $\overrightarrow{PP'} = 2\cdot\overrightarrow{PF} \Rightarrow \vec{P'} = \vec{P} + 2\cdot\overrightarrow{PF}$

b) $E \perp g$ durch P: E: $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $x_1 - 2x_2 + x_3 + 7 = 0$

$E \cap g$: $3 + 2 - 2\cdot(1 - 22) - 2 + 2 + 7 = 0$

$3 + 2 - 2 + 42 - 2 + 2 + 7 = 0 \Rightarrow 6 + 62 = 0 \Rightarrow 2 = -1$; F(2|3|−3)

$\vec{P'} = \vec{P} + 2\cdot\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\-9\end{pmatrix}$; P'(6|2|−9)

c) Bild mit Vektoris

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 a) Der Fußpunkt F der Höhe h_c liegt auf der Geraden AB; es gilt: $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB}$.

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CF} \circ \overrightarrow{AB} = 0$: $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$; $92 - 36 + 362 + 92 = 0 \Rightarrow -36 + 542 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2}{3}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$; $g = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{6}$

$h = |\overrightarrow{CF}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

$\Big\}$ $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 9\sqrt{2}$ FE

c) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{324+324} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ FE

d) $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{3\sqrt{6} \cdot 6} = \dfrac{36}{18\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \approx 0{,}8165$; $\alpha \approx 35{,}3°$

$\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{18}{18\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}5774$; $\beta \approx 54{,}7°$

$\Big\}$ $\gamma = 180° - (35{,}3° + 54{,}7°)$
$= 180° - 90° = 90°$

S. 136

12 a) $\vec{u_g}$ ist Richtungsvektor der Geraden g; $\vec{u_h}$ ist Richtungsvektor der Geraden h. Man bestimmt den Richtungsvektor $\vec{w_l}$ der Geraden l: $\vec{w_l} = \vec{u_g} \times \vec{u_h}$.
Daraus bestimmt man den Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E: $\vec{n_E} = \vec{w} \times \vec{u_g}$.
Mit dem Aufpunkt $\vec{A_g}$ der Geraden g und dem Normalenvektor $\vec{n_E}$ kann die Normalengleichung von E bestimmt werden: E: $\vec{n_E} \circ [\vec{X} - \vec{A_g}] = 0$.
Die Ebene E schneidet die Gerade h in S.
Somit lautet die Gleichung der Geraden l: $\vec{X} = \vec{S} + \sigma \cdot \vec{w}$.

b) $\vec{w_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w_l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$; E: $x_1 + x_3 - 4 = 0$

$E \cap h$: $8 + 3\mu + 8 + \mu - 4 = 0 \Rightarrow \mu = -3$; $S(-1|0|5)$

l: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $l \cap g$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

I: $-1 - \sigma = 3 + 2$
II: $\sigma = 2 + 22$

II in I: $-1 - 2 - 22 = 3 + 2 \Rightarrow 2 = -2$
in II: $\sigma = 2 - 4 = -2$
in III: $5 - 2 = 1 + 2$ wahr

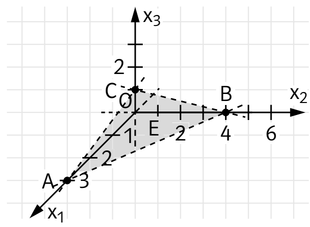
$\vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $R(1|-2|3)$

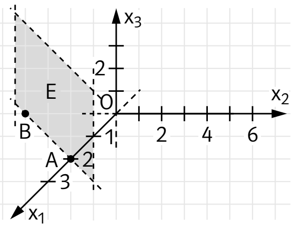
d) Veranschaulichung mit Vektoris.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

13 Individuelle Lösungen
Mögliches Vorgehen: Je einen Punkt auf den drei Achsen vorgeben und die Spurgeraden zeichnen.
Alternative: Je einen Punkt auf zwei Achsen vorgeben und Ebene parallel zur dritten Achse zeichnen.

z. B.:





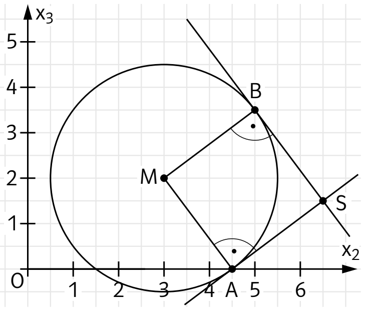
E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$

E: $x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 4 = 0$

E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

E: $-2x_1 + 2x_2 + 4 = 0$

14 a)



b) Die Tangenten gehen durch A bzw. B und stehen senkrecht auf dem Berührkreisradius [MA] bzw. [MB].

M(3|2); A(4,5|0); B(5|3,5); $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}1{,}5\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

c) t_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix}4{,}5\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$; t_2: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\3{,}5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\-2\end{pmatrix}$

$t_1 \cap t_2 = \{S\}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 4{,}5 + 22 = 5 + 1{,}5\mu \\ \text{II:} & 1{,}52 = 3{,}5 - 2\mu \end{array}\right\}$ $4\cdot(\text{I}) + 3\cdot(\text{II}): 18 + 12{,}52 = 30{,}5$
$\Rightarrow\ 2 = 1$
eingesetzt in I: $\mu = 1$
$\Rightarrow\ S(6{,}5\,|\,1{,}5)$;

d) Die Dreiecke MSA und MSB sind nach dem SsW-Satz kongruent, denn $\overline{MS} = \overline{MS}$, $\overline{MA} = \overline{MB} = r$, $\sphericalangle SAM = \sphericalangle MBS = 90°$. MS ist also Symmetrieachse des Vierecks ASBM.

e) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS} \circ \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1{,}5\\2\end{pmatrix} = 0$; also $\sphericalangle SAM = 90°$.
Analog: $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{BM}$
$\overline{MA} = \overline{MB}$ ohne Rechnung einsichtig, weil sie auf dem Kreis liegen.
Alternativ: Koordinaten in die Kreisgleichung einsetzen.

15 a) $A(2|-2|0)$; $B(2|2|0)$; $C(-2|2|0)$; $D(-2|-2|0)$; $E(0|0|-2\sqrt{2})$; $F(0|0|2\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}8\sqrt{2}\\0\\8\end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

E(ABF): $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$ Vektordarstellung; $\sqrt{2}\,x_1 + x_3 - 2\sqrt{2} = 0$ Koordinatendarstellung

b) l: $\vec{X} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

c) O ist der Mittelpunkt der Kugel, weil es Symmetriezentrum des Oktaeders ist.
Der Schnittpunkt S von l mit der Ebene durch ABF liegt auf der Kugel.

$\{S\} = E \cap l$: $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} \circ \left[2\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$; $32 - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $S\left(\frac{4}{3}\middle|0\middle|\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$

K: $\vec{X}^2 = r^2$; $S \in K \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\sqrt{2}\end{pmatrix}^2 = r^2$; $r^2 = \frac{16}{9} + \frac{8}{9} \Rightarrow r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$; K: $\vec{X}^2 = \frac{24}{9}$

d) $V_0 = \frac{2}{3}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{2} = \frac{64}{3}\sqrt{2}$ [VE]

e) $V_K = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^3\pi = \frac{64}{27}\pi\sqrt{6}$ $\frac{V_0}{V_K} = \frac{9}{\pi\sqrt{3}} \approx 1{,}65$
Das Volumen des Oktaeders ist um 65 % größer als das Kugelvolumen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

16 a) $\left[\begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}^2 = 4+36+9 = 49 \quad\Rightarrow\quad A\in K$

b) Die Ebene E, die die Kugel im Punkt A berührt, ist senkrecht zur Geraden MA.

MA: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$; E: $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix}\right] = 0$

c) Jede Gerade g, die in der Ebene E liegt und durch A geht, ist Tangente an die Kugel.

E: $2x_1+6x_2+3x_3-46 = 0$; möglicher Punkt: $P(2|6|p_3)\in E \quad\Rightarrow\quad p_3 = 2$

Gerade AP: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ ist Tangente.

17 H_0: $p\leqq 0{,}3$; H_1: $p>0{,}3$; kritischer Bereich $K = \{g, g+1, \dots, n\}$

$P^{50}_{0,3}(Z\geqq g) \leqq 0{,}05 \quad\Rightarrow\quad P^{50}_{0,3}(Z\leqq g-1)\geqq 0{,}95$ stochastische Tabelle liefert: $g-1 = 20$; $g = 21$

Ablehnung der Nullhypothese für $Z\in K = \{21; 22; \dots; 50\}$.

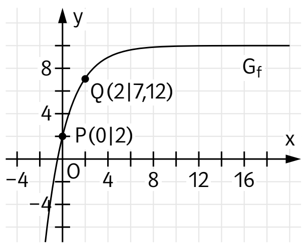
18 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10 \quad\Rightarrow\quad c = 10;\quad f(x) = b\cdot a^x+10$

$P(0|2)\in G_f \quad\Rightarrow\quad b\cdot 1+10 = 2 \quad\Rightarrow\quad b = -8$

$Q(2|7{,}12)\in G_f \quad\Rightarrow\quad -8\cdot a^2+10 = 7{,}12 \quad\Rightarrow\quad a = 0{,}6$

$\Rightarrow\quad f(x) = -8\cdot 0{,}6^x+10$

(0 < a war vorausgesetzt)



7 Gegenseitige Lage von Ebenen

S. 137 **1** a) Aufpunkt (3|0|0), Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$; E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

b) Für die gemeinsamen Punkte der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene gelten zwei Bedingungen: ihre Ortsvektoren erfüllen die Vektorgleichung für E und $x_3 = 0$.

c) $x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = 0+2\lambda+0\mu \quad\Rightarrow\quad \lambda = 0 \qquad s_{12}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

d) $x_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = 0+0\lambda+4\mu \quad\Rightarrow\quad \mu = 0 \qquad s_{13}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$x_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = 3-3\lambda+3\mu \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1+\mu \qquad s_{23}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+(1+\mu)\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$;

s_{23}: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$

S. 138 **2** a) $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{n_F} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; Normalenvektoren sind linear abhängig, somit schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

(I): $x_1-2x_2+3x_3-6 = 0$

(II): $x_1+2x_2+\ x_3-4 = 0$

; unterbestimmtes Gleichungssystem; $\lambda = x_3$; $\lambda\in\mathbb{R}$

(I): $x_1-2x_2+3\lambda-6 = 0$

(II): $x_1+2x_2+\ \lambda-4 = 0$

(I)+(II): $2x_1+4\lambda-10 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = -2\lambda+5$

in (II): $-2\lambda+5+2x_2+\lambda-4 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_2 = +\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}$

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

b) Begründung wie in a)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & 7x_1-5x_2+x_3-21=0\\ \text{(II):} & x_1-2x_2+x_3-\ \ 6=0\end{array}\right. ;\quad \text{unterbestimmtes Gleichungssystem};\ \lambda = x_1;\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & 7\lambda-5x_2+x_3-21=0\\ \text{(II):} & \lambda-2x_2+x_3-\ \ 6=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{lll}\text{(I)}-\text{(II)}: & 6\lambda-3x_2-15=0 & \Rightarrow\ x_2=2\lambda-5\\ \text{in (II)}: & \lambda-2(2\lambda-5)+x_3-6=0 & \Rightarrow\ x_3=3\lambda-4\end{array}$$

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

3 a) 1. Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$

(I): $x_3 = 0$

(II): $4x_1-3x_2-2x_3+15=0;\quad x_1=\lambda$

(I) in (II): $4\lambda-3x_2+15=0;\quad x_2=\frac{4}{3}\lambda+5$

$$s_{12}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}$$

2. Schnitt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

(I): $x_2 = 0$

(II): $4x_1-3x_2-2x_3+15=0;\quad x_1=\lambda$

(I) in (II): $4\lambda-2x_3+15=0;\quad x_3=2\lambda+7{,}5$

$$s_{13}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\7{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

3. Schnitt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

(I): $x_1 = 0$

(II): $4x_1-3x_2-2x_3+15=0;\quad x_2=\lambda$

(I) in (II): $-3\lambda-2x_3+15=0\ \Rightarrow\ x_3=-1{,}5\lambda+7{,}5;\quad s_{23}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\7{,}5\end{pmatrix}+2\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1{,}5\end{pmatrix}$

b) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$

$0=-2+3\lambda-3\mu\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{2}{3}+\mu$

$$s_{12}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+\left(\frac{2}{3}+\mu\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$s_{12}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{7}{3}\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Schnitt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

$0=1+2\lambda+\mu\ \Rightarrow\ \mu=-1-2\lambda$

$$s_{13}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(-1-2\lambda)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$s_{13}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\9\end{pmatrix}$$

Schnitt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

$0=2+\lambda-2\mu\ \Rightarrow\ \lambda=-2+2\mu$

$$s_{23}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+(-2+2\mu)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix};\qquad s_{23}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-8\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$$

S. 139

4 a) $\overrightarrow{n_{E_1}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix};\qquad E_1:\ \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\right]=0$

$\overrightarrow{n_{E_1}}=\overrightarrow{n_{E_2}}\ \Rightarrow\ E_1\parallel E_2$ oder $E_1=E_2$

$P(4|1|1)$ in E_2: $2\cdot4-3+1-12=-6\neq0\ \Rightarrow\ E_1\parallel E_2$

b) $\overrightarrow{n_{E_1}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix};\quad E_1:\ \begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]=0;\quad E_1:\ 7x_1+5x_2-x_3+21=0$

$\overrightarrow{n_{E_2}}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix};\quad E_2:\ \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right]=0;\quad E_2:\ -5x_1+x_2+x_3+15=0$

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear unabhängig, also schneiden sich E_1 und E_2 in einer Geraden.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & -7x_1+5x_2-x_3+21=0\\ \text{(II):} & -5x_1+\ \ x_2+x_3+15=0\end{array}\right. ;\quad x_1=\lambda$$

(I)+(II): $-12\lambda+6x_2+36=0\ \Rightarrow\ x_2=2\lambda-6$

in (I): $-7\lambda+5(2\lambda-6)-x_3+21=0\ \Rightarrow\ x_3=3\lambda-9\quad g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-6\\-9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

c) $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-10\\6\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$; $E_1{:} = \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\right] = 0$; $E_1{:}\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 32 = 0$

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear unabhängig, also schneiden sich E_1 und E_2 in einer Geraden.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 32 = 0\\ \text{(II):} & 2x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 - 12 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{lll}\text{(I)} - 2\cdot\text{(II):} & -4x_2 - 8 = 0 & \Rightarrow\ x_2 = -2\\ \text{in (I):} & 4x_1 + 10 + 3x_3 - 32 = 0 & \Rightarrow\ x_1 = 5{,}5 - 0{,}75x_3\end{array}$$

$x_3 = \lambda \ \Rightarrow\ x_1 = 5{,}5 - 0{,}75\lambda$

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5{,}5\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-0{,}75\\0\\1\end{pmatrix}$

5 a) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$; E: $\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0$

Schnitt von E mit der x_1x_2-Ebene:

(I): $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0$
(II): $x_1 = 0$; $\lambda = x_2$

aus (I): $2x_1 + 5\lambda + 5 = 0 \ \Rightarrow\ x_3 = -2{,}5\lambda - 2{,}5$

$s_{12}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}-2{,}5\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$

Schnitt von E mit der x_1x_3-Ebene:

(I): $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0$
(II): $x_2 = 0$; $\lambda = x_1$

aus (I): $2\lambda - 4x_3 + 5 = 0 \ \Rightarrow\ x_3 = \frac{1}{2}\lambda + 1{,}25$

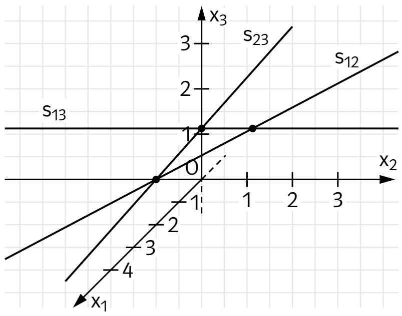
$s_{13}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}25\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$

Schnitt von E mit der x_2x_3-Ebene:

(I): $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0$
(II): $x_1 = 0$; $\lambda = x_2$

aus (I): $5\lambda - 4x_3 + 5 = 0 \ \Rightarrow\ x_3 = 1{,}25\lambda + 1{,}25$

$s_{23}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}25\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1{,}25\end{pmatrix}$



b) E: $2x_1 - 3x_2 - 6 = 0$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$;

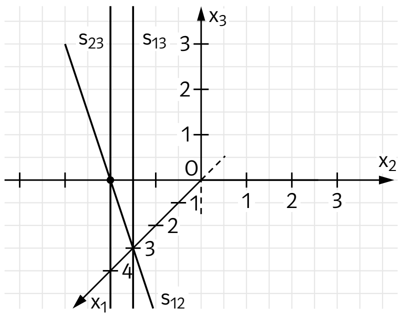
$E \parallel x_3$-Achse bzw. $E \perp x_1x_2$-Ebene

Schnitt von E mit der x_1x_2-Ebene:

(I): $2x_1 - 3x_2 - 6 = 0$; $x_2 = \lambda$
(II): $x_3 = 0$

aus (I): $2x_1 - 3\lambda - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 1{,}5\lambda + 3$

$s_{12}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$



Schnitt von E mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

$2x_1 - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 3$; $x_3 = \mu$

$s_{13}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Schnitt von E mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

$-3x_2 - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x_2 = -2$; $x_3 = \tau$

$s_{23}{:}\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

6 a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $H_1 \parallel E$: $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$;

$H_2 \perp E$: möglicher Normalenvektor: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $H_2{:}\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

b) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $H_1 \parallel E$: $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right] = 0$;

der Normalenvektor von $H_2 \perp E$: erfüllt die Gleichung: $3n - 2n_2 + n_3 = 0$

mögliche Lösung: $n_1 = 1$; $n_2 = 1$; $n_3 = -1$; H_2: $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right] = 0$

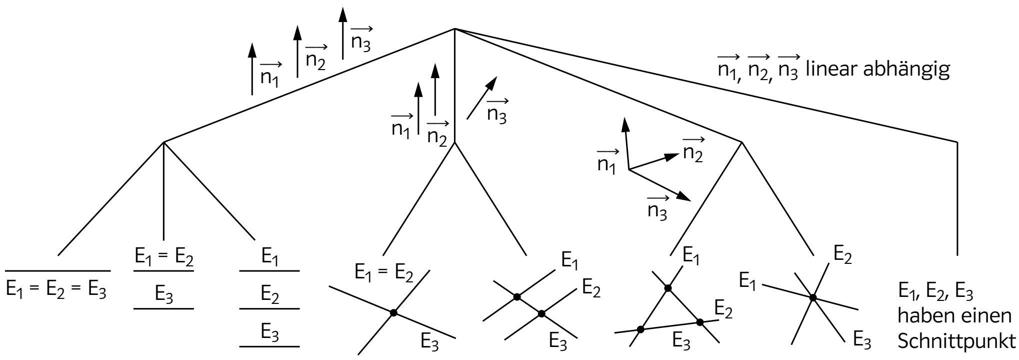
7 $g = E_1 \cap E_3$: $\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0\\ \text{(II):} & x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{lll}\text{(I)}-\text{(II)}: & 3x_3 + 1 = 0 & \Rightarrow\ x_3 = -\frac{1}{3}\\ \text{in (I)}: & x_1 - 2x_2 - \frac{1}{3} - 2 = 0 & \Rightarrow\ x_1 = 2x_2 + \frac{7}{3};\ x_2 = \lambda \in \mathbb{R}\end{array}$

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$g \cap E_2$: $2 \cdot \left(\frac{7}{3} + 2\lambda\right) + \frac{1}{3} + 4 = 0 \Rightarrow 9 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{5}$

$\lambda = -\frac{9}{5}$ eingesetzt in g: $S\left(-\frac{19}{5} \middle| -\frac{9}{5} \middle| -\frac{1}{3}\right)$

8

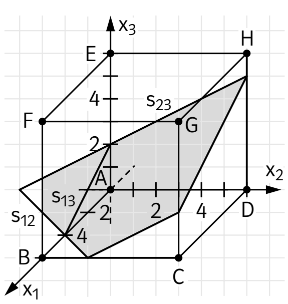


9 $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\8\\8\end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$; E_1: $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$; (I): $-2x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 0$

$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-4\\-8\end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; E_2: $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\right] = 0$; (II): $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 21 = 0$

$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)}+\text{(II)}: & 2x_2 + 3x_3 - 15 = 0;\ x_3 = \lambda;\ x_2 = 7{,}5 - 1{,}5\lambda\\ \text{in (II)}: & 2x_1 + 7{,}5 - 1{,}5\lambda + 2\lambda - 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 6{,}75 - 0{,}25\lambda\end{array}\right\}$ $g = E_1 \cap E_2$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}6{,}75\\7{,}5\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-0{,}25\\-1{,}5\\1\end{pmatrix}$

10 a)



b) E_{-4}: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
Mithilfe der Spurgeraden von E_{-4} lässt sich die Schnittfigur von E_{-4} mit dem Würfel zeichnen.
Parallele Würfelflächen schneiden die Ebenen E_a in parallelen Strecken.
$F(6|0|6) \in E_a \Rightarrow 6 - 0 + 12 + a = 0 \Rightarrow a = -18$
$D(0|6|0) \in E_a \Rightarrow 0 - 6 + 0 + a = 0 \Rightarrow a = 6$
Für $-18 \leqq a \leqq 6$ haben die Ebenen E_a mit dem Würfel gemeinsame Punkte.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 a) $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{n_{E_2}} = -1 \cdot \overrightarrow{n_{E_1}}$, also $E_1 \parallel E_2$

b) $l\colon \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$l \cap E_1 = \{S_1\} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = 0; \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} \right] = 0$

$49\lambda - 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1; \quad S_1(15\,|\,-5\,|\,7)$

$l \cap E_2 = \{S_2\} \quad 6 \cdot (9 + 6\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 21 = 0$

$54 + 36\lambda + 6 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad 49 + 49\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1; \quad S_2(3\,|\,1\,|\,3)$

c) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; M ist Mittelpunkt von $[S_1S_2]$

$r = \left|\overrightarrow{MS_1}\right| = \left| \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49} = 7; \quad K\colon \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right]^2 = 49$

Die Ebenen E_1 und E_2 berühren die Kugel in S_1 bzw. S_2.

12 $3\cos x = 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad 3\cos x = 2(1 - \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

Sei $\cos x = z$: $\quad 2z^2 + 3z - 2 = 0$

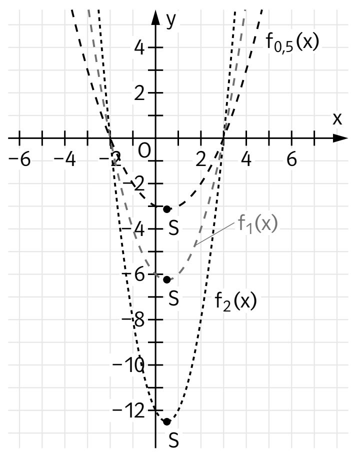
$z_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}; \quad z_1 = \frac{1}{2}; \quad z_2 = -2$

$\cos x = \frac{1}{2}$ für $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{5}{3}\pi$; $\cos x = -2$ hat keine Lösung.

13 Ansatz: $\quad f(x) = a \cdot (x + 2)(x - 3)$

$f(x) = a \cdot (x^2 - x - 6) = a \cdot \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6 + \ldots \right] = a \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \ldots$

x-Koordinate des Scheitelpunktes: $x_S = \frac{1}{2}$



8 Abstandsbestimmungen

S. 140

1 a) [PA] ist Lot von P auf AF. $\overline{PA}$ ist gleich dem Abstand des Punktes P von AF.

$\overline{PA} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EP}^2}$

b) Der Abstand des Punktes P von der Ebene E durch D, B und G ist gleich der Länge des Lotes von P auf diese Ebene.

Gerade l durch P senkrecht zur Ebene E: $\quad l\colon \ \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG}\right)$

Ebene E: $\left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG}\right) \circ \left(\vec{X} - \vec{B}\right) = 0$

$E \cap l = \{S\}$; $\quad$ Abstand $= \left|\overrightarrow{PS}\right|$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 143

2 a) HNF von E: $-\frac{1}{3}\cdot(2x_1-x_2+2x_3+1)=0$

$d_A=\left|-\frac{1}{3}\cdot(2\cdot2-0+2\cdot2+1)\right|=|-3|=3;$ $\qquad d_B=\left|-\frac{1}{3}\cdot(2\cdot2-1+2\cdot(-8)+1)\right|=|4|=4$

$d_C=\left|-\frac{1}{3}\cdot(2\cdot5-5+2\cdot5+1)\right|=\left|-\frac{16}{3}\right|=\frac{16}{3}$

b) HNF von E: $\frac{1}{15}\cdot(2x_1-10x_2+11x_3-30)=0$

Rechnung analog a)

$d_A=\frac{4}{15};\ d_B=\frac{124}{15};\ d_C=1$

3 a) $\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\0\\40\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix};$ E: $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right]=0;$ E: $3x_1+4x_3-22=0$

HNF: $\frac{1}{5}\cdot(3x_1+4x_3-22)=0\quad d_P=\frac{29}{5};\ d_Q=\frac{106}{5};\ d_R=\frac{57}{5}$

b) $\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix};$ E: $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right]=0;$ E: $2x_1-2x_2+x_3-4=0$

HNF: $\frac{1}{3}\cdot(2x_1-2x_2+x_3-4)=0;\quad d_P=\frac{8}{3};\ d_Q=7;\ d_R=2$

4 A, B und C haben die gleiche x_2-Koordinate. Somit ist die Ebene parallel zur x_1x_3-Ebene.
Der Punkt P hat von dieser Ebene den Abstand $5-2=3$.

5 $\overline{AB}$: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix};$ E: $x_1+3x_2-2x_3=0;$ $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

$\overline{AB}\parallel E$, wenn $\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=0\quad(5-9+4=0)$ und $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\notin E$: $(0+3\cdot2-0\neq0)$

$d(AB;E)=d(A;E)=\left|\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot(0+3\cdot2-20)\right|=\frac{6}{\sqrt{14}}$

6 a) E: $3x_2+4x_3-22=0;$ $\qquad$ HNF: $\frac{1}{5}\cdot(3x_2+4x_3-22)=0$

$d_A=\left|\frac{1}{5}\cdot(3a-22)\right|=5\quad\Rightarrow\quad|3a-22|=25$

$3a-22=25\ \Rightarrow\ 3a=47\ \Rightarrow\ a=\frac{47}{3}$

oder $-3a+22=25\ \Rightarrow\ 3a=-3\ \Rightarrow\ a=-1$

b) HNF: $\frac{1}{13}\cdot(12x_1-5x_2-10)=0$

$d_A=\left|\frac{1}{13}\cdot(36-5a-10)\right|=5\quad\Rightarrow\quad|26-5a|=65$

$26-5a=65\ \Rightarrow\ 5a=-29\ \Rightarrow\ a=-\frac{29}{5}=-5{,}8$

oder $-26+5a=65\ \Rightarrow\ 5a=91\ \Rightarrow\ a=\frac{91}{5}=18{,}2$

7 HNF_E: $\frac{1}{3}\cdot(2x_1+2x_2-x_3-6)=0;$ $\qquad HNF_F$: $\frac{1}{7}\cdot(6x_1+2x_2+3x_3-14)=0$

Punkte auf der x_1-Achse $(x_1|0|0)$: $\quad\left|\frac{1}{3}\cdot(2x_1-6)\right|=\left|\frac{1}{7}\cdot(6x_1-14)\right|$

$\frac{2}{3}x_1-2=\frac{6}{7}x_1-2\ \Rightarrow\ x_1=0\quad P_1(0|0|0)$

oder $\frac{2}{3}x_1-2=-\frac{6}{7}x_1+2\ \Rightarrow\ x_1=\frac{21}{8}\quad P_2\left(\frac{21}{8}\middle|0\middle|0\right)$

Punkte auf der x_2-Achse $(0|x_2|0)$: $\quad\left|\frac{1}{3}\cdot(2x_1-6)\right|=\left|\frac{1}{7}\cdot(2x_2-14)\right|$

$\frac{2}{3}x_2-2=\frac{2}{7}x_2-2\ \Rightarrow\ x_2=0\quad P_3(0|0|0)$

oder $\frac{2}{3}x_2-2=-\frac{2}{7}x_2+2\ \Rightarrow\ x_2=\frac{21}{5}\quad P_4\left(0\middle|\frac{21}{5}\middle|0\right)$

Punkte auf der x_3-Achse $(0|0|x_3)$: $\quad\left|\frac{1}{3}\cdot(-x_3-6)\right|=\left|\frac{1}{7}\cdot(3x_3-14)\right|$

$-\frac{x_3}{3}-2=\frac{3}{7}x_3-2\ \Rightarrow\ x_3=0\quad P_5(0|0|0)$

oder $-\frac{x_3}{3}-2=-\frac{3}{7}x_3+2\ \Rightarrow\ x_3=42\quad P_6(0|0|42)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

8 a) $E \perp g_1$ durch P: E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0$

$E \cap g = \{F\}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0$; $-12 + 9\lambda - 14 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$; $F(8|1|0)$

$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49} = 7$

b) $E \perp g_2$ durch P: E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0$

$E \cap g = \{F\}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = 0$; $-3 + 9\mu - 6 + 4\mu + 8 + 4\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{17}$;

$F\left(5\tfrac{3}{17} \middle| 4\tfrac{2}{17} \middle| 1\tfrac{2}{17}\right)$

$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix} 5\frac{3}{17} \\ 4\frac{2}{17} \\ 1\frac{2}{17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{14}{17} \\ -2\frac{15}{17} \\ 4\frac{2}{17} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{17} \cdot \sqrt{7497} \approx 5{,}09$

9 a) Dachflächenebene E: $A(20|0|8)$; $B(20|12|6)$; $C(0|12|6)$

$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -20 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 240 \end{pmatrix} = 40 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = 0$

HNF: $\frac{1}{\sqrt{37}} \cdot (x_2 + 6x_3 - 48) = 0$

$d(R, E) = \left|\frac{1}{\sqrt{37}}(10 + 6 \cdot 8 - 48)\right| = \frac{10}{\sqrt{37}} \approx 1{,}64$

Der Sicherheitsabstand von 1,5 m wird nicht eingehalten.

b) Rohrgerade g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E \cap g = \{S\}$; $10 + 6 \cdot (8 + \lambda) - 48 = 0 \Rightarrow 10 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$; $S\left(10 \middle| 10 \middle| 6\tfrac{1}{3}\right)$

$|\overrightarrow{RS}| = \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$

Das Edelstahlrohr ragt 1,67 m über die Dachfläche hinaus.

10 a) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$; also $E \parallel F$

HNF_F: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 22) = 0$; $d(E, F) = \left|\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (-2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 22)\right| = \frac{11}{\sqrt{3}} \approx 6{,}35$

b) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \overrightarrow{n_E}$; also $E \parallel F$

HNF_F: $-\frac{1}{9} \cdot (6x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 36) = 0$; $P(0|0|3) \in E$

$d(E, F) = \left|-\frac{1}{9} \cdot (6 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 36)\right| = 3$

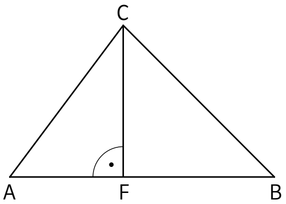
c) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -19 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ -95 \end{pmatrix} = 5 \cdot \overrightarrow{n_E}$; also $E \parallel F$

F: $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -19 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$; F: $-4x_1 - 8x_2 - 19x_3 + 4 = 0$; HNF_F: $-\frac{1}{21} \cdot (4x_1 + 8x_2 + 19x_3 - 4) = 0$

$d(E, F) = \left|-\frac{1}{21} \cdot (4 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 19 \cdot (-1) - 4)\right| = \frac{13}{21}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 a)



AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}$;

Fußpunkt F der Höhe h_c: $\overrightarrow{CF} \perp AB$

$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\6\\-1\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = 0;\quad \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = 0;$

$-36 + 54\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2}{3};\quad F(3\,|\,5\,|\,3)$

$h_c = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix} = \sqrt{21};\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \sqrt{54}$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h_c = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{21} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sqrt{14} = \frac{9}{2}\sqrt{14}$

oder $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-27\\18\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1134} = \frac{9}{2}\sqrt{14}$

Aufgaben b) – d): Vorgehensweise und Rechnung analog a)

b) $F(3\,|\,-7\,|\,2)$; $h_c = 15$; $\overline{AB} = 6$; $A_{Dreieck} = 45$

c) $F\left(\frac{88}{31}\,\middle|\,\frac{32}{31}\,\middle|\,\frac{6}{31}\right)$; $h_c = \frac{1}{31}\cdot\sqrt{30\,442} = \frac{1}{31}\cdot\sqrt{62\cdot 491}$; $\overline{AB} = \sqrt{62}$; $A_{Dreieck} = \sqrt{491}$

d) $B = F(0\,|\,3\,|\,0)$; $h_c = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 4$; $\overline{AB} = 4$; $A_{Dreieck} = 8$

S. 144

12 a) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}8\\14\\-8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}12\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-72\\-144\end{pmatrix} = -18\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$; $G = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 18\cdot\sqrt{81} = 81$

b) 1. Möglichkeit: h ist gleich dem Abstand des Eckpunktes D von der Grundflächenebene E.

E: $\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\-5\\2\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 11 = 0$; HNF_E: $-\frac{1}{9}\cdot(-x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 11) = 0$

$d(D, E) = -\frac{1}{9}\cdot(+2 - 8\cdot 9 - 11) = 9$

2. Möglichkeit: $h = \frac{3\cdot V}{G}$

$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|-18\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}\right| = 3\cdot 81$; $h = \frac{3\cdot 3\cdot 81}{81} = 9$

13 a) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-9\\3\\-3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\-9\\3\end{pmatrix}$; CD: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\5\\5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}11\\3\\-5\end{pmatrix}$

Ebene E, die AB enthält und parallel zu CD ist: $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}11\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\21\\39\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-9\\3\\-3\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $4x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 54 = 0$; HNF_E: $-\frac{1}{\sqrt{234}}\cdot(-4x_1 - 7x_2 - 13x_3 - 54) = 0$

$d(AB, CD) = \left|-\frac{1}{\sqrt{234}}\cdot(-4\cdot(-7) - 7\cdot 5 - 13\cdot 5 - 54)\right| = \frac{126}{\sqrt{134}}$

b) $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-4\\11\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\14\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-70\\35\\-133\end{pmatrix} = -7\cdot\begin{pmatrix}10\\-5\\19\end{pmatrix}$;

E: $\begin{pmatrix}10\\-5\\19\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $10x_1 - 5x_2 + 19x_3 = 0$; HNF_E: $\frac{1}{9\sqrt{6}}\cdot(10x_1 - 5x_2 + 19x_3) = 0$

$d(A, E) = \left|\frac{1}{9\sqrt{6}}\cdot(10\cdot(-9) - 5\cdot 3 + 19\cdot(-3))\right| = \frac{18}{\sqrt{6}}$

c) $\vec{P} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-12\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$; $\vec{Q} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{C}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-16\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}$

$\vec{R} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{D}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\11\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}5\\5{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$; $\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} + \vec{D}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$

PQ: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\-1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\5{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$; RS: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2{,}5\\5{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

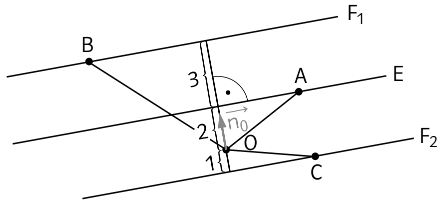
Ebene E, die PQ enthält und parallel zu RS ist: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}-2,5\\5,5\\-1,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-4,5\\1,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19,5\\10,5\\-7,5\end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix}13\\7\\-5\end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix}13\\7\\5\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}\right] = 0$; E: $13x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 81 = 0$; HNF_E: $-\frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot (-13x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 81) = 0$

$d(PQ, RS) = \left|-\frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot (-13 \cdot 0,5 - 7 \cdot 1 - 81)\right| = \frac{10,5}{\sqrt{3}} = 3,5 \cdot \sqrt{3}$

d) $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix}6\\-9\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}13\\5\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix}-78\\-42\\30\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}13\\5\\3\end{pmatrix}\right| = 189$

14 E: $\frac{4}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 - \frac{3}{13}x_3 - 2 = 0$ x_1



$d(0, E) = 2$;

für $A \in E$ gilt: $\vec{n_0} \circ \vec{A} = 2$

für $B \in F_1$ gilt: $\vec{n_0} \circ \vec{B} = 5$

$\Rightarrow$ F_1: $\frac{4}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 - \frac{3}{13}x_3 - 5 = 0$

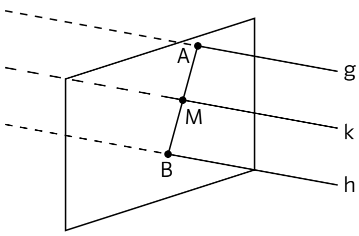
oder F_1: $4x_1 + 12x_2 - 3x_3 - 65 = 0$

für $C \in F_2$ muss gelten: $\vec{n_0} \circ \vec{C} = -1$

$\Rightarrow$ F_2: $\frac{4}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 - \frac{3}{13}x_3 + 1 = 0$

oder F_2: $4x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 13 = 0$

15



1) $E \perp g$ durch $A \in g$
2) $E \cap h = \{B\}$
3) $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

a) E: $\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 0$; $E \in h$: $\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\mu - 2\\-3\mu - 6\\2\mu - 8\end{pmatrix} = 0$; $-16\mu + 8 - 9\mu - 18 - 4\mu + 16 = 0$

$-29\mu + 6 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{6}{29}$

$B\left(\frac{24}{29}\middle|-\frac{18}{29}\middle|\frac{12}{29}\right)$; $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix}41\\78\\122\end{pmatrix}$; k: $\vec{X} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix}41\\78\\122\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$

b) Vorgehensweise analog a)

E: $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right] = 0$; $B\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$; $M\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$; k: $\vec{X} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

16 a) $A(1|0|1)$; $B(1|2,4|0)$ (Nebenrechnung: $b_2 = \sqrt{2,6^2 - 1} = 2,4$); $D(0|0|1)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\2,4\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2,4\end{pmatrix}$; E: $\begin{pmatrix}0\\1\\2,4\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0$; HNF: $\frac{1}{2,6} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2,4\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0$

b) $M(m_1|r|r)$

c) $d(M, E) = r$; $\frac{1}{2,6} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2,4\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}m_1\\r\\r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = r$

$\frac{1}{2,6} \cdot |3,4r - 2,4| = r \Rightarrow |3,4r - 2,4| = 2,6r$

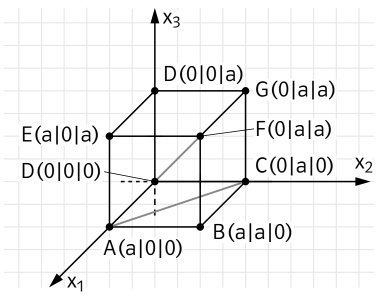
$3,4r - 2,4 = 2,6r \Rightarrow r = 3$ keine Lösung des Sachproblems

$-3,4r + 2,4 = 2,6r \Rightarrow r = 0,4$

Der Ball darf einen Radius von höchstens 40 cm haben.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

17



Ebene W, die AC enthält und parallel zu DF ist.

$\overrightarrow{n_W} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2\\a^2\\-2a^2\end{pmatrix} = a^2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

W: $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$; W: $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$

$d(D,W) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-a\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Der Abstand zwischen [AC] und [DF] beträgt $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

18 a) $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}9\\2\\10\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\12\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$

$f(\lambda) = \left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = (2+3\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2 + (12+4\lambda)^2 = 4+12\lambda+9\lambda^2+4+8\lambda+4\lambda^2+144+962+16\lambda^2$
$= 291\lambda^2+1162+152$

$f'(\lambda) = 582\lambda + 116$

$f'(\lambda) = 0$ für $\lambda = -2$

$\vec{Q} = \begin{pmatrix}9\\2\\10\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$; Q(3|−2|2)

b) $\overrightarrow{PX} \perp g$: $\left[\begin{pmatrix}2\\2\\12\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 0$; $6+9\lambda+4+4\lambda+48+16\lambda = 0$

$58+29\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$; $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$; X(3|−2|2)

c) Zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g gibt es drei Möglichkeiten:
1. Die Ebene E durch P senkrecht zu g wird mit g geschnitten. Man erhält den Schnittpunkt F. $\left|\overrightarrow{PF}\right|$ ist der gesuchte Abstand.
2. Man bestimmt den Extremwert λ_0 der Funktion $f(\lambda) = \left|\overrightarrow{PX}\right|^2$, wobei X ein Punkt der Geraden ist. $\left|\overrightarrow{PX_0}\right|$ ist der gesuchte Abstand.
3. Man bestimmt den Punkt X_0 auf g, für den $\overrightarrow{PX_0}$ senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden ist. $\overrightarrow{PX_0}$ ist der gesuchte Abstand.

19 a) Zeichnung mit Vektoris, geeignet drehen. Es soll sichtbar werden, dass P und O auf der gleichen Stelle von E, und Q und O auf verschiedenen Seiten von E liegen.

b) HNF_E: $\frac{1}{7}(2x_1+3x_2+6x_3-12) = 0$

$d_P = \left|\frac{1}{7}(2\cdot2+3\cdot(-4)+6\cdot1-12)\right| = \left|-\frac{14}{7}\right| = 2$; $d_Q = \left|\frac{1}{7}\cdot(2\cdot5+3\cdot6+6\cdot2-12)\right| = \left|\frac{28}{7}\right| = 4$

S. 145

19 a) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} \times \lambda \cdot \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RX} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} \times \lambda \cdot \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7\\-3\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\10\\-5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RX} \perp g \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}12\\10\\-5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix} = 0$; $144+40-15+144\lambda+16\lambda+9\lambda = 0$; $169+169\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$; F(−7|3|6)

b) $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{169} = 13$; $\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{FR}\right| = \sqrt{100} = 10$

$A_{\triangle AFR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FR}\right| = 65$

c) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{FR}\right|^2 \cdot \pi \cdot \left|\overrightarrow{AF}\right| = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 13 = \frac{1300}{3}\pi \approx 1361{,}36$

Klett

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

20 a) Die Pyramide BDEG wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, ist also ein Tetraeder. Die Kantenlänge ist gleich einer Flächendiagonale des Würfels.

b) $A(0|0|0)$; $B(0|a|0)$; $D(-a|0|0)$; $E(0|0|a)$; $G(-a|a|a)$

c) $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix} = a^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene durch BDE: E: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$; E: $-x_1 + x_2 + x_3 - a = 0$

HNF_E: $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-x_1 + x_2 + x_3 - a) = 0$; $d(G, E) = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (a + a + a - a)\right| = \left|\frac{2a}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} a$

d) $O_{\text{Tetraeder}} = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE}| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} -a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot |\sqrt{3a^4}| = 2a^2\sqrt{3}$

$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Dreieck}} \cdot d(G; E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a = \frac{1}{3} a^3$

e) Die Kugel geht durch die Eckpunkte des Würfels und somit auch durch die Eckpunkte des Tetraeders.

$M\left(-\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\right)$; $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (= halbe Raumdiagonale); K: $\left[\vec{X} - \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{3}{4} a^2$

f) Zeichnung mit Vektoris

g) $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^3 \cdot \pi = \frac{a^3}{2} \cdot \sqrt{3}\,\pi$; $V_{\text{Tetraeder}} = \frac{a^3}{3}$;

$\frac{V_K}{V_T} = \frac{a^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot a^3} = 1{,}5 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \approx 8{,}16$; $V_K \approx 8{,}16 \cdot V_T$

21 F ist der Fußpunkt des Lotes von R auf g.

$\overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}08 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}08 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{RF} \perp \vec{\mu}_g \;\Rightarrow\; \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}08 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$; $2 + 0{,}08 - 9\lambda - 4\lambda - \lambda = 0$; $2{,}08 - 14\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda \approx 0{,}15$

$F(1{,}45|1{,}30|0{,}15)$; $\overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -0{,}45 \\ 0{,}7 \\ -0{,}07 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{(-0{,}45)^2 + 0{,}7^2 + (-0{,}07)^2} = \sqrt{0{,}6974} \approx 0{,}835$

Der minimale Abstand des Flugzeugs vom Kirchturm beträgt 835 m.

22 a) $r = 3$; $M(1|2|2)$

b) Skizze vgl. *Schülerbuch* S. 142

N ist der Schnittpunkt der Lotgeraden l von M auf E.

l: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $E \cap l$: $1 + \lambda + 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 2 \cdot (2 + 2\lambda) - 3 = 0$;

$1 + \lambda + 4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 3 = 0$; $6 + 9\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2}{3}$

$N\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$

$\varrho^2 = r^2 - |\overrightarrow{MN}|^2$; $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{MN}| = \left|-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9}\right| = 2$

$\varrho^2 = 9 - 4 = 5$; $\varrho = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

c) $MN = l$; $l \cap K$: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9 \;\Rightarrow\; \left[\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$; $9\lambda^2 = 9$

$\lambda_1 = -1$ oder $\lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = -1$: $S_1(0|0|0)$; $\lambda_2 = 1$: $S_2(2|4|4)$

23 Sind die Ereignisse A und B unabhängig, so sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm gleich den unbedingten Wahrscheinlichkeiten.

Also: $b = P_A(B) = P(B)$ und $c = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$

Es muss also $b = c$ gelten.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

24 a) Nullstellen: $-0{,}5x^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2;\ x_2=2$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(-0{,}5x^2+2)\,dx\right| = \left|\left[-\tfrac{1}{6}x^3+2x\right]_{-2}^{2}\right| = 5\tfrac{1}{3}$$

b) Schnittpunkte von G_f und y:

$-0{,}5x^2+2=0{,}5x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-2=0;$

$\Rightarrow \quad x_1=-2;\ x_2=1$

Eingeschlossenes Flächenstück:

$$A_1=\left|\int_{-2}^{1}[-0{,}5x^2+2-(0{,}5x+1)]\,dx\right|$$

$$=\left|\left[-\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{1}{4}x^2+x\right]_{-2}^{1}\right|$$

$$=\left|-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{4}+1-\left(\tfrac{8}{6}-1-2\right)\right| = \tfrac{9}{4}$$

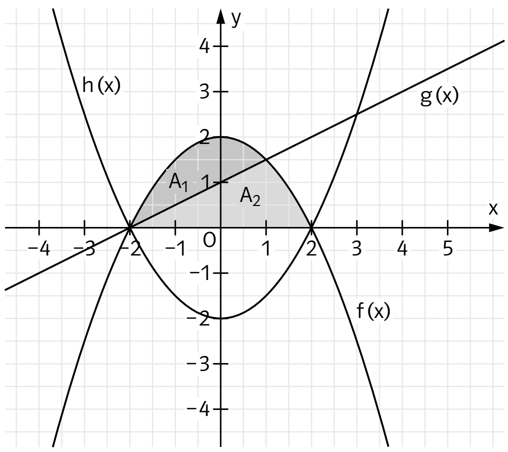
$$A_2=\tfrac{16}{3}-\tfrac{9}{4}=\tfrac{37}{12};$$

$$A_2:A_1=\tfrac{37}{12}:\tfrac{9}{4}=37:27\left(=\tfrac{37}{27}:1\approx 1{,}37\right)$$

c) $\int_{-2}^{2}|f(x)+g(x)|\,dx=0;\quad \int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx=10\tfrac{2}{3}$

Ausgenutzt wurde die Symmetrie der Graphen von g und f bezüglich der x-Achse.

Skizze oder Graphenplott zu b) und c)

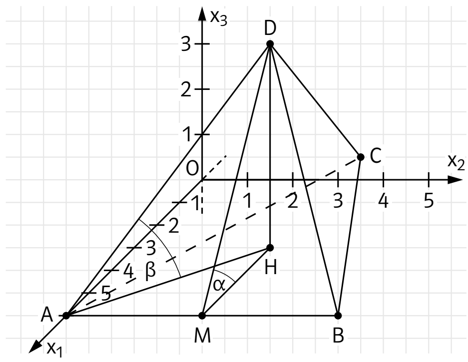


9 Schnittwinkel

S. 146

1 a) $\overrightarrow{MH}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{MD}=\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}\right|}=\frac{9}{3\cdot\sqrt{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}};\quad \alpha\approx 59{,}04°$$



b) Normalenvektor von E_{ABD} =

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\0\\18\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$$

Normalenvektor von $E_{ABC}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\cos\gamma=\frac{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{3}{\sqrt{34}\cdot 1};\quad \gamma\approx 59{,}04°$$

c) $\cos\beta=\dfrac{|\overrightarrow{AH}\circ\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AH}|\circ|\overrightarrow{AD}|}$

S. 148

2 a) Schnittpunkt:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I):} & 1+\lambda=2+\mu\\ \text{(II):} & 1=2-\mu\\ \text{(III):} & 3\lambda=3+3\mu\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{aus II: }\ \mu=1;\ \text{ in I: }\ \lambda=2\\ \mu=1 \text{ und } \lambda=2 \text{ in III: }\ 3\cdot 2=3+3\ \text{ (wahr)}\end{array}\quad ;\ S(3\,|\,1\,|\,6)$$

Schnittwinkel: $\cos\sphericalangle(g,h)=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}}\approx 0{,}9535;\quad \sphericalangle(g,h)\approx 17{,}5°$

b) analog a); $S(10\,|\,8\,|\,15)$; $\sphericalangle(g,h)\approx 30{,}2°$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

3 a) $S\left(3\frac{4}{5}\middle|-\frac{4}{5}\right)$; $\sphericalangle(g,h) \approx 78{,}7°$

b) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $g \cap h$: $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right]=0$; $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]=0$;

$-4+4\lambda-2+2\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=1$; $S(3|7)$

$$\cos\sphericalangle(g,h) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right|} \approx 0{,}759;\quad \sphericalangle(g,h)\approx 40{,}6°$$

b) $g \cap h$: $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right]=0$; $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}\right]=0$;

$-16-14\lambda+35-5\lambda=0$; $19-19\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=1$; $S(15|5)$

$$\cos\sphericalangle(g,h) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\right|} = \frac{33}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{50}} \approx 0{,}867;\quad \sphericalangle(g,h)\approx 29{,}93°$$

4 Die Normalenvektoren sind linear unabhängig, also schneiden sich die Ebenen in einer Geraden.

a) $$\cos\sphericalangle(E_1,E_2) = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{30}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{37}} \approx 0{,}967;\quad \sphericalangle(E_1,E_2)\approx 14{,}7°$$

b) $$\cos\sphericalangle(E_1,E_2) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\right|} = \frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{51}} \approx 0{,}566;\quad \sphericalangle(E_1,E_2)\approx 55{,}5°$$

5 $A(3|0|2)$; $B(6|4|2)$; $C(3|8|2)$; $E(3|4|0)$; $F(3|4|4)$

a) $\alpha = \sphericalangle BAF$; $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AB}|\circ|\overrightarrow{AF}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}}{5\cdot\sqrt{20}} = \frac{16}{10\sqrt{5}} \approx 0{,}7155$; $\alpha\approx 44{,}3°$

$\beta = \sphericalangle ABF$; $\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{BA}|\circ|\overrightarrow{BF}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}}{5\cdot\sqrt{13}} \approx 0{,}4992$; $\qquad \alpha \approx 60{,}1°$

$\gamma = \sphericalangle AFB$; $\cos\gamma = 180°-(44{,}3°+60{,}1°) = 75{,}6°$

b) $\vec{n}_{\text{Ebene ABF}} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-6\\12\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$;

$\vec{n}_{\text{Ebene ABE}} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\6\\12\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\6\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\3\\6\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}-4\\3\\6\end{pmatrix}\right|} = \frac{-16-9+36}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{61}} = \frac{11}{61} \approx 0{,}1803;\quad \alpha\approx 79{,}6°$$

c) $V_P = \left|2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC})\circ\overrightarrow{BF}\right]\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\left\{\left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-24\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right]\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(-48)\right| = 16$

d) $V_Q = 6\cdot 8\cdot 4 = 192$; $\frac{V_P}{V_Q} = \frac{16}{192} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$

Die Doppelpyramide füllt 8,3 % des Quaders aus.

6 a) $\cos\sphericalangle(\vec{n},\vec{u}) = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{11}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{6}} = \frac{11}{\sqrt{228}} \approx 0{,}728$; $\cos\sphericalangle(\vec{n},\vec{u}) \approx 43{,}2°$; $\sphericalangle(E,g) = 46{,}8°$

b) $\vec{n_E} = \vec{u_g} \;\Rightarrow\; E\perp g$; $\sphericalangle(E,g) = 90°$

c) $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\6\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\8\end{pmatrix}$; $\cos\sphericalangle(\vec{n},\vec{u}) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{77}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{462}} \approx 0{,}1861$; $\sphericalangle(\vec{n},\vec{u}) \approx 79{,}3°$;
$\sphericalangle(E,g) = 10{,}7°$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

7 a) $\vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} = 12\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\alpha = \text{Winkel}([AD], E_{ABC})$;
$\beta = \text{Winkel}([BD], E_{ABC})$;
$\gamma = \text{Winkel}([CD], E_{ABC})$

$\sin\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{4}{\sqrt{21}} \approx 0{,}873$; $\sin\beta = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{33}} = \dfrac{4}{\sqrt{33}} \approx 0{,}696$; $\sin\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \approx 0{,}970$;
$\alpha \approx 60{,}8°$ $\beta \approx 44{,}1°$ $\gamma \approx 76°$

b) δ-Winkel (ABC, ABD); $\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\0\\6\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$

$\cos\delta = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \approx 0{,}243$; $\delta \approx 76°$

ε-Winkel (BCD, ACD); $\vec{n}_{BCD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\8\\4\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}_{ACD} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$

$\cos\varepsilon = \dfrac{\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}} = \dfrac{9}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{33}} \approx 0{,}342$; $\delta \approx 70°$

8 a) $E_1 \cap E_2$: $6\cdot(2+3\lambda+\mu)-7-2\lambda-\mu+2\cdot(9+2\lambda)-13 = 0$; $12+18\lambda+6\mu-7-2\lambda-\mu+18+4\lambda-13 = 0$;
$10+20\lambda+5\mu = 0 \Rightarrow \mu = -2-4\lambda$
$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + (-2-4\lambda)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\9\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; $\cos\sphericalangle(E_1, E_2) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{12}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{41}} \approx 0{,}625$; $\sphericalangle(E_1, E_2) \approx 51{,}3°$

b) $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}$; E_1: $\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$; E_1: $x_1+3x_2-3x_3-2 = 0$
$E_1 \cap E_2$: $4\sigma+\tau+3\cdot(2+\sigma+\tau)-3\cdot\sigma-2 = 0$; $4\sigma+\tau+6+3\sigma+3\tau-3\sigma-2 = 0$;
$4\sigma+4\tau+4 = 0 \Rightarrow \sigma = -1-\tau$
$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + (-1-\tau)\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; $\cos\sphericalangle(E_1, E_2) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{7}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}} \approx 0{,}484$; $\sphericalangle(E_1, E_2) \approx 61°$

c) $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$; E_1: $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right] = 0$; E_1: $-x_1+2x_2-x_3+2 = 0$
$E_1 \cap E_2$: $-(2+3\tau)+2\cdot(1+\sigma-\tau)-\sigma+2\tau+2 = 0$; $-2-3\tau+2+2\sigma-2\tau-\sigma+2\tau+2 = 0$;
$2-3\tau+\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -3\tau-2$
$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + (-3\tau-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}$; $\cos\sphericalangle(E_1, E_2) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\circ\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{10}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{19}} \approx 0{,}937$; $\sphericalangle(E_1, E_2) \approx 20{,}5°$

d) Zeichnungen mit Vektoris

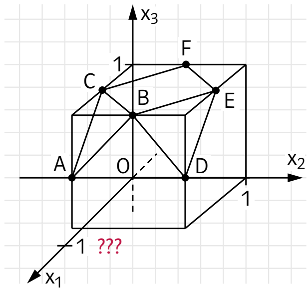
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 149

9 a) Die Dreiecke sind alle gleichseitig mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. $\left(a_\Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Die Vierecke sind als Mittenvierecke eines Quadrates wiederum Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b)



$A\left(1\middle|0\middle|\frac{1}{2}\right)$; $B\left(1\middle|\frac{1}{2}\middle|1\right)$; $C\left(\frac{1}{2}\middle|0\middle|1\right)$; $D\left(1\middle|1\middle|\frac{1}{2}\right)$; $E\left(\frac{1}{2}\middle|1\middle|1\right)$

$$\vec{n}_{\text{Ebene BCED}} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{\text{Ebene ABC}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{\text{Ebene BDE}} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

α-Winkel zwischen Quadrat BCEF und Ebene ABC: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha \approx 54{,}7°$

β-Winkel zwischen den Dreiecksebenen ABC und BDE: $\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$; $\beta \approx 70{,}5°$

Der Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und einer Quadratfläche beträgt $180° - \alpha \approx 125{,}3°$.
Der Winkel zwischen zwei Dreiecksflächen beträgt $180° - \beta \approx 109{,}5°$.

c) Volumen einer abgeschnittenen Ecke:

$$\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AG}\right]\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{48}$$

Volumen des Kuboktaeders: $V_K = 1 - 8\cdot\frac{1}{48} = \frac{5}{6}$

Flächeninhalt eines Dreiecks: $\left|\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{3}$

Flächeninhalt eines Quadrates: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Oberfläche des Kuboktaeders: $O_K = 6\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$

d) $\dfrac{V_K}{V_W} = \dfrac{\frac{5}{6}}{1} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$

Das Volumen des Kuboktaeders ist um ca. 17% kleiner als das Volumen des Würfels.

10 a) HNF E_1: $\frac{1}{3}\cdot(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 21) = 0$; HNF E_1: $\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 7 = 0$

HNF E_2: $\frac{1}{7}\cdot(6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 21) = 0$; HNF E_2: $\frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3 - 3 = 0$

W_1: $\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\right)x_1 + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7}\right)x_3 - 10 = 0 \Rightarrow$ W_1: $\frac{32}{21}x_1 + \frac{2}{21}x_2 + \frac{8}{21}x_3 - 10 = 0$

W_2: $\left(\frac{2}{3} - \frac{6}{7}\right)x_1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{7}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right)x_3 - 4 = 0 \Rightarrow$ W_2: $-\frac{4}{21}x_1 - \frac{16}{21}x_2 + \frac{20}{21}x_3 - 4 = 0$

b) $g = E_1 \cap E_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I):} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 21 = 0 \\ \text{(II):} & 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 21 = 0 \end{array}\right\} \text{(I)+(II):}\quad 8x_1 + 2x_2 - 4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -4x_1 + 21;\; x_1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

in (I): $2\lambda + 4\lambda - 21 + 2x_3 - 21 = 0 \Rightarrow x_3 = -3\lambda + 21$

$$g\colon\; X = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$W_1 \cap g$: $32\lambda + 2\cdot(21 - 4\lambda) + 8\cdot(21 - 3\lambda) - 210 = 0$; $0 = 0$;
Die Gleichung ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, also gilt $g \subset W_1$.

$W_2 \cap g$: $-4\lambda - 16\cdot(21 - 3\lambda) + 20\cdot(21 - 4\lambda) - 84 = 0$; $0 = 0$;
Die Gleichung ist ebenfalls für $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, also gilt $g \subset W_2$.

Klett

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

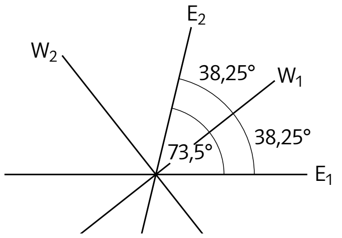
c) $\overrightarrow{n_{W_1}}\circ\overrightarrow{n_{W_2}} = \begin{pmatrix}32\\2\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\-16\\20\end{pmatrix} = -4\cdot 32-2\cdot 16+8\cdot 20 = 0 \quad\Rightarrow\quad W_1\perp W_2$

d) $\alpha = \sphericalangle(W_1, E_1)$: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}32\\2\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{1092}\cdot 3} = \dfrac{78}{6\cdot\sqrt{273}} = \dfrac{13}{\sqrt{273}}$; $\alpha\approx 38{,}11°$

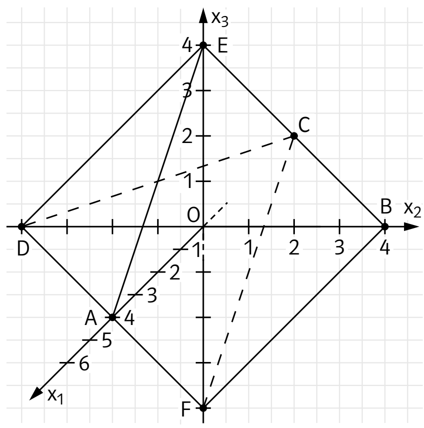
$\beta = \sphericalangle(W_1, E_2)$: $\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix}32\\2\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1092}\cdot 7} = \dfrac{182}{14\cdot\sqrt{273}} = \dfrac{13}{\sqrt{273}}$; $\beta\approx 38{,}11°$

Daraus folgt, dass W_2 den anderen Winkel zwischen E_1 und E_2 halbiert.

e)



11 a)



b) Wegen der Symmetrie ist es gleichgültg, welche Kante und welche Seitenfläche, in der die Kante liegt, man wählt.

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\-16\\16\end{pmatrix} = -16\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\sin\alpha = \left|\dfrac{\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right| = \left|\dfrac{-8}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\alpha\approx 54{,}7°$

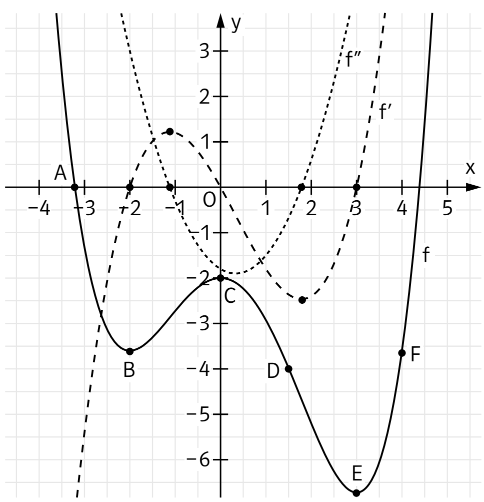
c) β ist der Winkel zwischen (ABF) und (ABE).

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix} = 16\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\cos\beta = \left|\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right| = \dfrac{1}{3}$; $\beta\approx 70{,}5°$

d) $O = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}\right| = 4\cdot\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix} = 64\cdot\sqrt{3}$; $V = \frac{2}{3}\cdot G\cdot h = \frac{2}{3}\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot 4 = \frac{256}{3}$

12 a)



b) $f(x_A) = 0$; $f'(x_A) < 0$; $f''(x_A) > 0$
$f(x_B) < 0$; $f'(x_B) = 0$; $f''(x_B) > 0$
$f(x_C) < 0$; $f'(x_C) = 0$; $f''(x_C) < 0$
$f(x_D) < 0$; $f'(x_D) < 0$; $f''(x_D) \approx 0$
$f(x_E) < 0$; $f'(x_E) = 0$; $f''(x_E) > 0$
$f(x_F) < 0$; $f'(x_F) > 0$; $f''(x_F) > 0$

c) G_f rechtsgekrümmt in $[-1{,}2; 1{,}7]$
G_f linksgekrümmt in $]-\infty; -1{,}2[\ \cup\ ]1{,}7; +\infty[$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

13 a) $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ weil $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC$ (Stufenwinkel an Parallelen)
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$
$\triangle APC \sim \triangle DQC$; $\triangle PBC \sim \triangle QEC$

b) Bei der zentrischen Streckung mit Streckfaktor k verhalten sich die Flächeninhalte wie $k^2:1$.
Ansatz: $k^2:1 = 9:4 \;\Rightarrow\; \left(\frac{k}{1}\right)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; k = \frac{3}{2}$
$\overline{AC}:\overline{DC} = 2:3$; $\overline{AP}:\overline{DQ} = 2:3$

c) $\overline{CP}:\overline{PQ} = 2:1$; $\overline{CP} = 2\cdot\overline{PQ} = 4$

d) Die Berechnung von $\overline{AC}$ ist durch die zusätzliche Angabe z. B. von
- $\overline{CD}$
- $\overline{AD}$ $(\Rightarrow \overline{AC} = 2\cdot\overline{AD})$
- $\overline{CD} - \overline{AC}$

jeweils mithilfe des Strahlensatzes,
- $A_{\triangle APC}$ und $h_{[AC]}$ mithilfe der Flächeninhaltsformel

möglich.

Thema: Tangenten an Kreis und Kugel, Tangentialebenen

S. 151

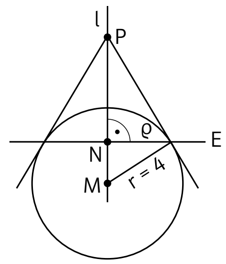
1 t: $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right]\circ\left[\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right] = 25$; $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - 25 = 0$
t: $4x_1 + 3x_2 - 31 = 0$

2 g: $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\vec{0}\right] = 25$; g: $7x_1 + x_2 - 25 = 0$; $x_2 = -7x_1 + 25$; K: $x^2 = 25$
$K \cap g$: $x_1^2 + (-7x_1+25)^2 = 25$; $x_1^2 + 49x_1^2 - 350x_1 + 625 = 25$; $50x_1^2 - 350x_1 + 600 = 0$
$\Rightarrow$ $x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0$; $x_1 = 3$; $x_1 = 4$
$\Rightarrow$ $B_1(3\,|\,4)$; $B_2(4\,|\,-3)$
$\Rightarrow$ t_1: $3x_1 + 4x_2 - 25 = 0$; t_2: $4x_1 - 3x_2 - 25 = 0$

3 $r = d(M,E) = \left|\frac{2\cdot2-1+2\cdot5-31}{3}\right| = 6$

4 K: $\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 49$
$B \in K$: $\left[\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 49$; $\begin{pmatrix}-6\\2\\-3\end{pmatrix}^2 = (-6)^2 + 2^2 + (-3)^2 = 49$
T: $\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right]\circ\left[\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right] = 49$; T: $-3x_1 - x_2 + 4x_3 - 31 = 0$

5



E: $\left[\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right]\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right] = 16$
E: $\begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right] = 16$; E: $4x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 1 = 0$
l: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}$
$E \cap l$: $4\cdot(3+4\lambda) - 2\cdot(2-2\lambda) - 5\cdot(-4-5\lambda) + 1 = 0$
$12 + 16\lambda - 4 + 4\lambda + 20 + 25\lambda + 1 = 0$; $29 + 45\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{29}{45}$

$N\left(\frac{19}{45}\,\middle|\,3\frac{13}{45}\,\middle|\,-\frac{7}{9}\right)$; $\overrightarrow{NM} = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{19}{45}\\3\frac{13}{45}\\-\frac{7}{9}\end{pmatrix} = \frac{16}{45}\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$

$\overline{NM} = \frac{16}{45}\cdot\sqrt{45} = \frac{16}{15}\cdot\sqrt{5}$

$\varrho = \sqrt{16 - \left(\frac{16}{15}\cdot\sqrt{5}\right)^2} \approx 3{,}2$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2