IV Beurteilende Statistik

1 Testen von Hypothesen

S. 98

1 a) Erwartungswert $\mu = 5$ und Standardabweichung $\sigma = 1{,}6$; Die Beobachtung von 4 defekten Fahrrädern liegt noch in der σ-Umgebung des Erwartungswertes. Bei nur 10 getesteten Fahrrädern kann man die Behauptung nicht wirklich beurteilen, aber das Ergebnis stützt sogar die Behauptung.

b) $F_{0,5}^{10}(4) = 37{,}7\,\%$ $\Rightarrow$ mit 37,7 % Wahrscheinlichkeit sind es höchstens 4 Fahrräder, das ist recht hoch; man kann also die Behauptung nicht wirklich ablehnen.

S. 100

2 a) Falsch: Das Ergebnis kann im Ablehnungsbereich liegen, aber die Hypothese trotzdem stimmen.
b) Falsch: Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden, sie ist sehr wahrscheinlich wahr, aber sie könnte auch falsch sein.
c) Falsch: (Begründung wie in a))
d) Stimmt: Wie man an den Aufgaben a)–c) sieht

3 a) Testgröße ist der Wähleranteil, also die Anzahl der Befragten, die die Partei wählen würden. Die Nullhypothese H_0: $p \leqq 36\,\%$, Gegenhypothese H_1: $p > 36\,\%$, $n = 1000$ (z. B.) Wähler, die befragt werden. Nur wenn deutlich mehr als 360 Wähler für die Partei wählen, z. B. für $Z \in K = \{500; \ldots; 1000\}$ würde man davon ausgehen, dass der Wähleranteil gestiegen ist. Sind es deutlich mehr, dann könnte er gestiegen sein.

b) Repräsentativ heißt (nach K. Gerald van den Boogaart):
identisch verteilt: alle Beobachtungen spiegeln das gleiche Zufallsgesetz wieder.
stochastisch unabhängig: jede Beobachtung ist neu nach dem Zufallsgesetz zustande gekommen.
Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege zu repräsentativen Daten:
Zufällige und faire Auswahl einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit.
Unabhängiger Wiederholung identischer Zufallsexperimente.

c) Bei 37 % geht man davon aus, dass der Anteil der Wähler gleich geblieben ist.

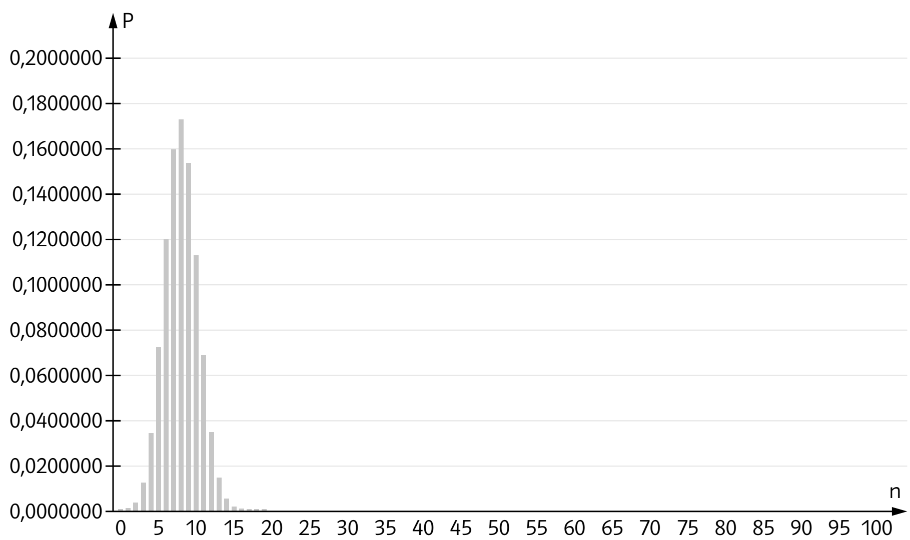
Tabelle

4 a) Fall 1: $1 - F_{\frac{1}{3}}^{20}(11) \approx 0{,}013 = 1{,}3\,\%$ Fall 2: $1 - F_{\frac{2}{3}}^{20}(11) \approx 0{,}809 = 80{,}9\,\%$

b) Man würde sich für Fall 2 entscheiden, da die Wahrscheinlichkeit 15 Kugeln zu erhalten unter der Bedingung „es sind $\frac{2}{3}$ weiße Kugeln" größer ist als wenn $\frac{1}{3}$ weiße Kugeln in der Urne sind.
$P_{\frac{1}{3}}^{20}(Z = 15) < P_{\frac{2}{3}}^{20}(Z = 15)$

c) $1 - F_{\frac{1}{3}}^{20}(14) \approx 0{,}00017 \approx 0{,}02\,\%$

5 Die Nullhypothese H_1: $p > \frac{1}{6}$, H_0: $p = \frac{1}{6}$; Es wird z. B. $n = 100$ mal gewürfelt. Man erhält folgendes Diagramm:



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

Da gilt: $F_{\frac{1}{6}}^{100}(23) \approx 0{,}962 = 96{,}2\,\%$ könnte man z. B. vereinbaren die Nullhypothese abzulehnen, wenn öfter als 23 Mal die Sechs fällt. $K = \{24; \ldots; 100\}$

6 a) Nicht stichhaltig, da subjektiv
b) Bei 37% muss der Anteil noch nicht unbedingt gesunken sein – 37% liegt sogar sehr nahe bei H_0: $p = 40\,\%$. $\{\mu = 40;\ \sigma = 5\}$.
c) Die Wahrscheinlichkeit für „genau“ 37 Treffer ist natürlich sehr klein. Man muss $P_{0,4}(Z \geqq 37)$ betrachten und diese Wahrscheinlichkeit ist sehr groß.
d) Stichhaltig, $\mu = 40;\ \sigma \approx 5 \quad \Rightarrow$ 37 liegt im zu erwartenden Bereich.

7 a) $f(x) = (x+3)^2;\ f'(x) = 2(x+3) = 2x+6;\quad g(x) = x^2+3;\ g'(x) = 2x$
b) $f(x) = 1-x^6;\ f'(x) = -6x^5;\quad g(x) = (1-x^3)^2;\ g'(x) = 2(1-x^3)\cdot(-3x^2) = 6x^5-6x^2$
c) $f(x) = 1+\frac{1}{(x-2)^2};\ f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3};\quad g(x) = \frac{1}{x^2-1};\ g'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$
d) $f(x) = 2(1+x^2);\ f'(x) = 4x;\quad g(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+4};\ g'(x) = \frac{2x(x^2+4)-x^2\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

2 Fehler 1. und 2. Art

S. 101

1 1: der Pilz ist giftig; Der Fehler (der tödlich sein könnte) wäre, ihn für nicht giftig zu halten und zu essen.
2: der Pilz ist nicht giftig; Der Fehler (der auf keinen Fall tödlich ist) wäre, ihn für giftig zu halten und nicht zu essen.

S. 104 *Tabelle*

2

n	g	4	5	6	7	8	
10	α′	35,0 %	15,0 %	4,7 %	1,1 %	0,16 %	$1-F_{0,3}^{10}(g-1)$
	β′	17,2 %	37,7 %	62,3 %	82,8 %	94,5 %	$F_{0,5}^{10}(g-1)$
	α′+β	52,2 %	52,7 %	67 %	83,9 %	94,7 %	⇒ g = 4 am kleinsten

n	g	13	14	15	16	17	
50	α′	77,7 %	67,2 %	55,3 %	43,1 %	31,6 %	$1-F_{0,3}^{50}(g-1)$
	β′	0,02 %	0,05 %	0,13 %	0,33 %	0,77 %	$F_{0,3}^{50}(g-1)$
	α′+β	77,72 %	67,25 %	55,43 %	43,43 %	32,37 %	⇒ g = 17 am kleinsten

3 a) falsch: α′ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man die Nullhypothese verwirft, obwohl sie falsch ist.
b) falsch: Sie kann auch falsch sein $\Rightarrow$ Fehler 2. Art!

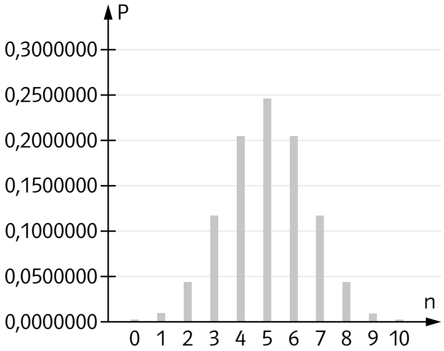
4 $H_0 = 0{,}1;\ n = 50;\ k = 8$
a) $0{,}3 \cdot 0{,}075 = 2{,}25\,\%$ b) $\sum_{k=8}^{50} B(50;\,0{,}1;\,k) = 12{,}2\,\%$
c) $\sum_{k=0}^{7} B(50;\,0{,}2;\,k) = 19\,\%$ $\sum_{k=0}^{7} B(50;\,0{,}3;\,k) = 0{,}73\,\%$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

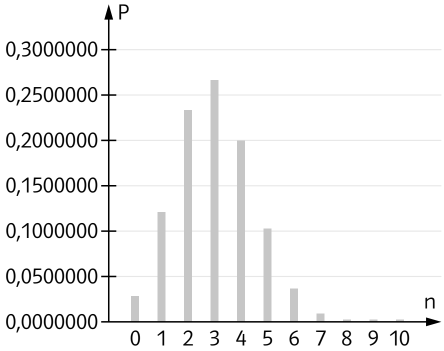
S. 105

5 Individuelle Lösungen; z. B.

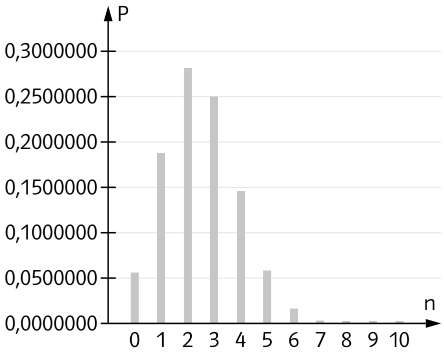
a) K = {9; 10} ⇒ α′ = 1,1%
(bzw. K = {0; 1} ⇒ α′ = 1,1%)



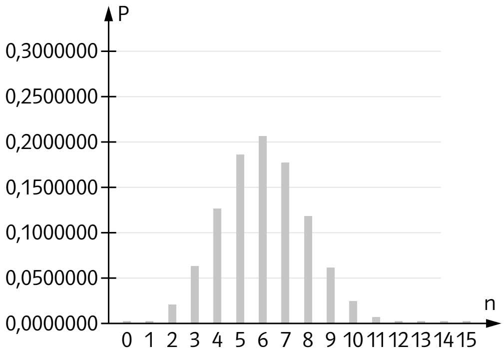
b) K = {7; …; 10} ⇒ α′ = 1,1%;
(bzw. K = {0} ⇒ α′ = 2,8%)



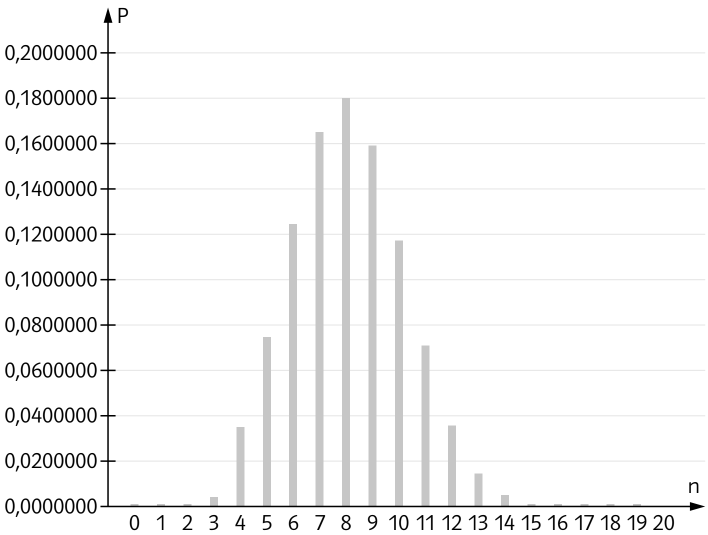
c) K = {6; …; 10} ⇒ α′ = 1,97%
(bzw. K = {0} ⇒ α′ = 5,6%)



d) K = {10; …; 15} ⇒ α′ = 3,3%;
(bzw. K = {0; …; 2} ⇒ α′ = 2,7%)

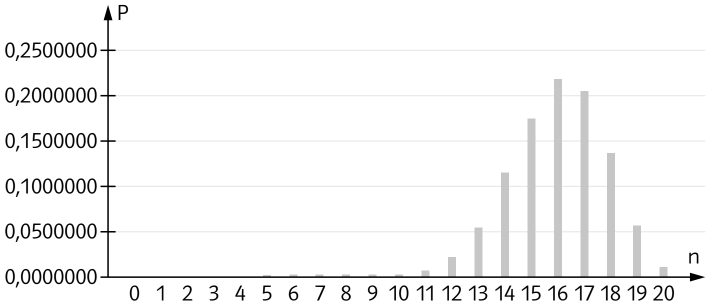


e) K = {13; …; 20} ⇒ α′ = 2,1% ;
(bzw. K = {0; …; 3} ⇒ α′ = 1,6%)

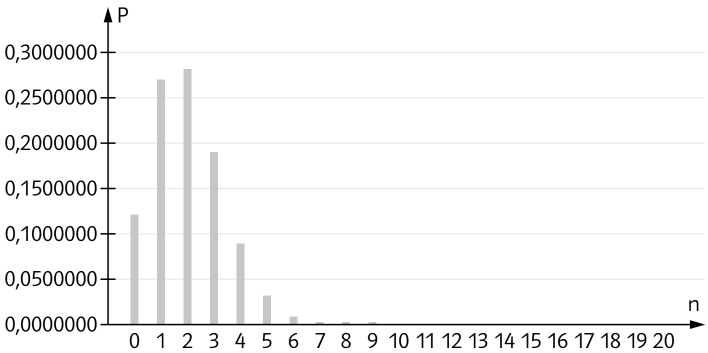


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

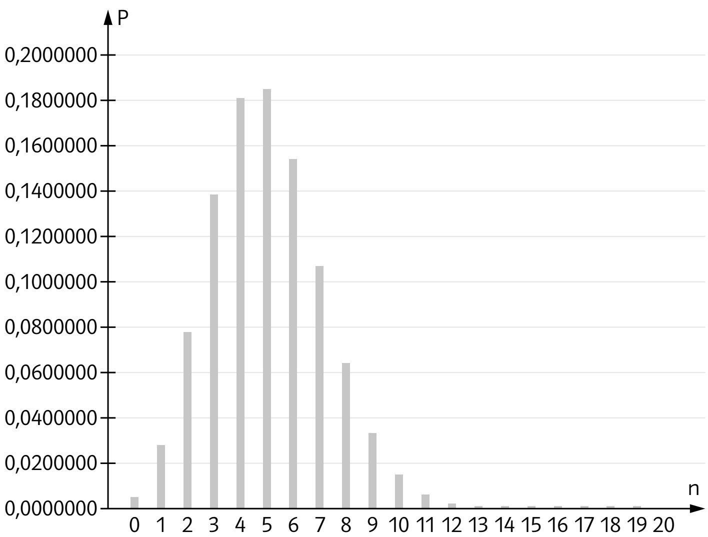
f) K = {20} $\Rightarrow$ α' = 1,1%;
(bzw. K = {0; …; 12} $\Rightarrow$ α' = 3,2%)



g) K = {5; …; 20} $\Rightarrow$ α' = 4,3%
(bzw. K = {0} $\Rightarrow$ α' = 12,1%)



h) K = {10; …; 50} $\Rightarrow$ α' = 2,5%;
(bzw. K = {0; 1} $\Rightarrow$ α' = 3,3%)



6 a) α' = 8,7%; β' = 0,25%

b)

g	14	15	16	17
α'	0,111	0,061	0,031	0,014
β'	0,028	0,054	0,096	0,156
$\alpha'+\beta$	0,139	0,115	0,127	0,170

Bei g = 15 ist der Unterschied und die Summe am kleinsten.

c) Der Unterschied ist bei g = 30 am kleinsten.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

7 $164 \Rightarrow 10100100$
1) richtig: $F_{0,5}^{8}(1) = 3{,}52\,\%$
2) falsch: $p_0 = 0{,}5$
3) richtig
4) falsch (wenn sie abgelehnt wird)
5) falsch: wäre die Summe der beiden Fehler α' und β'
6) richtig: $p(H_1)$ muss gegeben sein.
7) falsch: wenn die eine Fehlerwahrscheinlichkeit größer wird, dann wird die andere kleiner.
8) falsch: richtig wäre: aus der gegebenen Stichprobe kann mit eine Aussage über p machen.

8 „oben links“ ist die Ableitungsfunktion von „unten rechts“, da die Funktion bei $x = 0$ ein Extremum besitzt, für $x < 0$ steigt und für $x > 0$ fällt; es gibt zwei Wendepunkte bei $x \approx \pm 0{,}6$.
„unten links“ ist die Ableitungsfunktion von „oben rechts“, da die Funktion bei $x = 2$ ein Extremum besitzt, für $x < 2$ fällt und für $x > 2$ steigt. Der Wendepunkt ist in der Nähe von $x = 1$.

3 Einseitiger Signifikanztest

S. 106

1 a) H_0: „Das Medikament hat doch so viele Nebenwirkungen ($p = 0{,}5$)“
H_1: „Das Medikament hat weniger Nebenwirkungen ($p < 0{,}5$)“
Der schwerwiegendere Fehler wäre: Das neue Medikament wird eingesetzt (d.h. zeigt im Test weniger Nebenwirkungen), obwohl es doch so viele Nebenwirkungen hat.
Weniger schlimm (für die Patienten) wäre das Medikament nicht einzusetzen obwohl es weniger Nebenwirkungen hat, da es im Test genauso viele gezeigt hat.
b) Die Wahl des kritischen Bereichs sollte so fallen, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit möglichst klein wird (z.B. 1%); der kritische Bereich wird dann verkleinert.
Die Nullhypothese sollte immer so gewählt werden, dass der Fehler, diese fälschlicherweise zu verwerfen der schlimmere Fehler ist und eingeschränkt werden muss.

S. 109 Tabelle

2 a) H_0: $p = 0{,}03$; H_1: $p > 0{,}03$ $\Rightarrow$ einseitiger Signifikanztest
b) $P_{0,03}^{100}(Z \geqq g) \leqq 0{,}05 \Leftrightarrow P_{0,03}^{100}(Z \leqq g-1) \geqq 0{,}95 \Rightarrow g-1 = 6 \Rightarrow g = 7$
$\Rightarrow$ der Ablehnungsbereich ist {7; 100} und damit $\alpha' = 3{,}1\,\%$.
$\beta'(p = 4\,\%) = 89{,}4\,\%$; $\beta'(p = 5\,\%) = 76{,}6\,\%$; $\beta'(p = 6\,\%) = 60{,}6\,\%$

3 a) Suche im Tabellenwerk einen Wert g, so dass $P_{0,03}^{200}(Z \geqq g) \leqq 0{,}05$ ist.
$\Rightarrow g = 72 \Rightarrow$ Der Ablehnungsbereich ist dann {72; 200}.
b) Man würde die Nullhypothese ablehnen.
c) $\alpha' = 4{,}0\,\%$
d) Individuelle Lösungen

4 a) richtig – siehe Definition
b) richtig – der Streifen um den Erwartungswert wird vergrößert.
c) richtig – siehe b)

Tabelle

5 a) Hier gehen wir von der Nullhypothese H_0: $p = 0{,}25$ aus und H_1: $p < 0{,}25$; $n = 100$; dann ergibt sich mit Hilfe der Tabellen ein Ablehnungsbereich von $K = \{0; \ldots; 17\}$ ($\alpha' = 3{,}76\,\%$), d.h. in dem Bereich sieht sich Yannik bestätigt.
b) Bei $n = 200$, $H_0 = 0{,}25$ und $H_1 < 0{,}25$ ergibt sich beim Signifikanzniveau von 5% ein Ablehnungsbereich von $K = \{0; \ldots; 39\}$; kommt 64 mal Blau vor, dann geht man nicht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit kleiner ist.
c) Man würde die Hypothese annehmen, da der Ablehnungsbereich von $K = \{0; \ldots; 132\}$ geht.

S. 110 Tabelle

6 a) $K = \{59; \ldots; 100\}$; $\alpha' = 4{,}43\,\%$
b) $K = \{0; \ldots; 87\}$; $\alpha' = 3{,}8\,\%$
c) $K = \{117; \ldots; 200\}$; $\alpha' = 1{,}4\,\%$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

7 H_0: p = 0,96; H_1: p < 0,96 (Behauptung des Geschäftsführers)
a) K = {0; …; 186} b) α' = 3,1%
Man kann aber auch die Aufgabe genau anders herum sehen – aus der Sicht des Großabnehmers und dann ist H_0: p ≦ 0,96; H_1: p > 0,96
Damit ist K = {197; …; 200} und α' = 4% (d.h. wenn 197 bis 200 Kugelschreiber in Ordnung sind, dann wird man H_1 befürworten.

8 a) Die Polizei möchte den Fehler minimieren, dass man fälschlicherweise annimmt, dass der Anteil der Angegurteten gestiegen ist, obwohl er gleichgeblieben oder sogar kleiner geworden ist;
⇒ H_0: p ≦ 0,7; H_1: p > 0,7
Der kritische Bereich liegt dann bei K = {152; …; 200} und α' = 3,60%.
Der Autoclub hat die Hypothese H_0: p ≧ 0,7 mit dem kritischen Bereich K = {0; …; 128} und α' = 3,96%.
b) Die Zahl von 154 angegurteten Fahrern liegt für die Polizei im Ablehnungsbereich der Nullhypothese, d.h. für die Polizei ist der Anteil größer geworden.
Der Autoclub sieht sich in seiner Annahme bestätigt, dass der Anteil größer ist.

9 a) H_0 wird abgelehnt, da K = {75; …; 199} b) H_0 wird angenommen, da K = {111; …; 150}
c) H_0 wird abgelehnt, da K = {0; …; 49} d) H_0 wird abgelehnt, da K = {144; …; 250}
e) H_0 wird angenommen, da K = {0; …; 231}

Tabelle oder

10 a) Man erhält den kritischen Bereich K = {18; …; 25} und somit α' = 2,2%.
b) β'(0,6) = 84%, β'(0,75) = 27,3%; β'(0,9) = 0,23%
c) α' = 0,73%; β'(0,6) = 92,6%; β'(0,75) = 43,9%; β'(0,9) = 0,95%
d) α' = 4,4%; β'(0,6) = 37,7%; β'(0,75) = 0,015%; β'(0,9) = 0%

11 a) Nullhypothese: H_0: p ≧ 0,65; H_1: p < 0,65 ⇒ linksseitiger Test mit dem Ablehnungsbereich K = {0 …; 370}
b) die Bürgerinitiative macht einen rechtsseitigen Test mit H_0: p ≦ 0,65; H_1: p > 0,65 und erhält den Ablehnungsbereich K = {410; …; 600}
c) bei k aus K = {371; …; 409} Zustimmungen kann weder die Stadtverwaltung noch die Bürgerinitiative ihre Nullhypothese verwerfen, sondern jeweils wird die Nullhypothese bestehen lassen.

S. 111

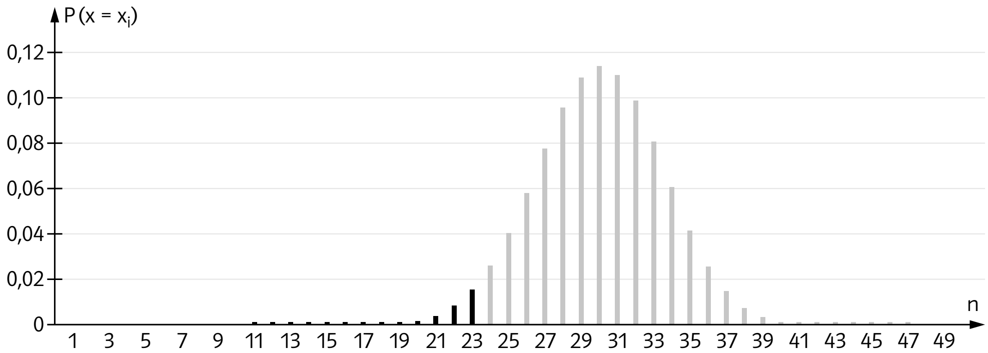
12 a) H_0: p = 0,5; Behauptung: er rät nur! ⇒ H_1: p > 0,5;
bei K = {15; …; 20} wird die Nullhypothese abgelehnt, bei $\overline{K}$ = {0; …; 14} angenommen.
b) 13 liegt im Annahmebereich der Nullhypothese, man geht also davon aus, dass er geraten hat. Der Fehler 2. Art könnte eintreten.
c) β'(60%) = 87,4%; β'(70%) = 58,4%; β'(80%) = 19,6%; β'(90%) = 1,1%

13 Festlegung des Herstellers von Medikament B: H_1: p < 85%; H_0: p > 85%; gesucht ist also ein Annahmebereich $\overline{K}$ = {g+1; …; 108}, wobei für g gilt:
$\sum_{i=0}^{g} B(108; 0{,}85; i) \leqq 0{,}05$ (bzw. 0,01; bzw. 0,0001)
Man erhält: $\overline{K}_{5\%}$ = {86; …; 108}; $\overline{K}_{1\%}$ = {83; …; 108}; $\overline{K}_{0,1\%}$ = {79; …; 108}
Bei einem seriösen Test wird man wohl die Nullhypothese H_0: p ≦ 0,85 wählen und H_1: p > 0,85.
Dann ergibt sich: $\overline{K}_{5\%}$ = {98; …; 108}; $\overline{K}_{1\%}$ = {100; …; 108}; $\overline{K}_{0,1\%}$ = {102; …; 108}

Klett

14 a) K = {0; …; 23}

b) Diagramm der B(50; 0,6)-Verteilung



zu $F_{0,6}^{50}$ (k):

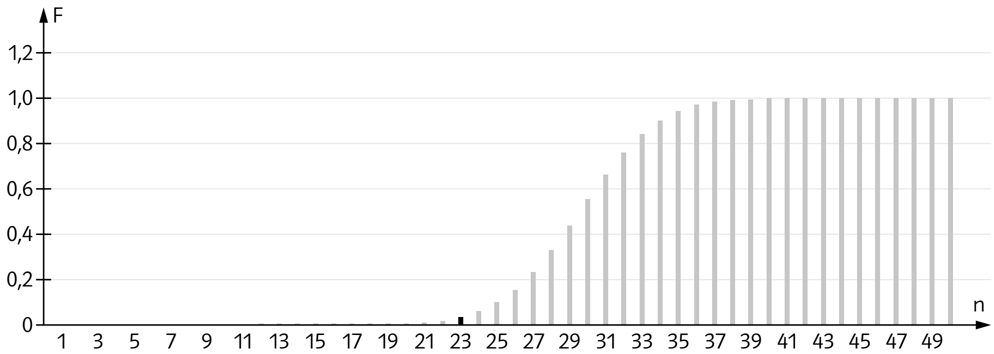
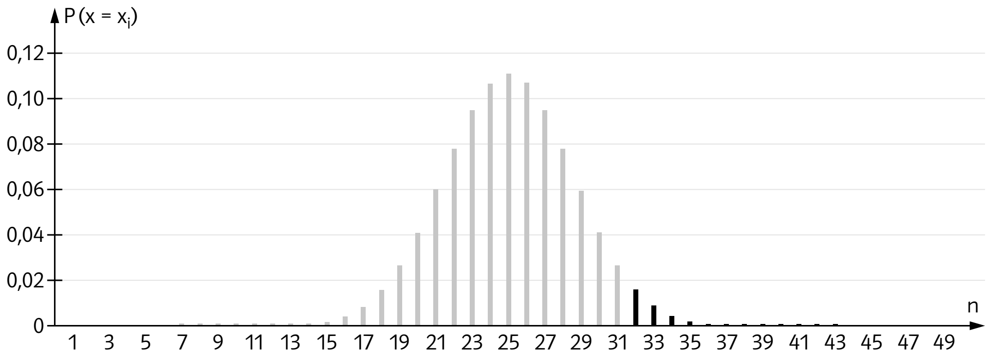
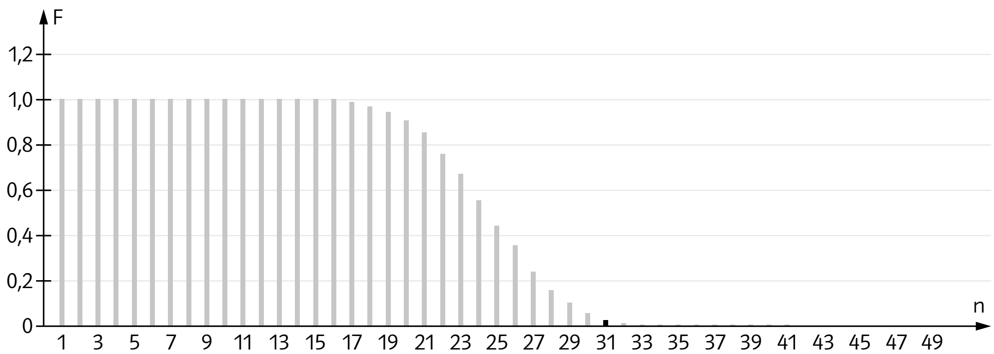


Diagramm der B(50; 0,5)-Verteilung

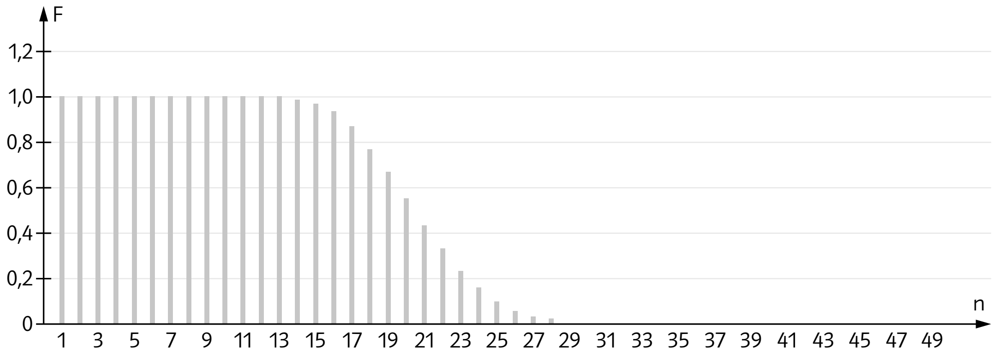


Fehler 2. Art zu p = 0,5:

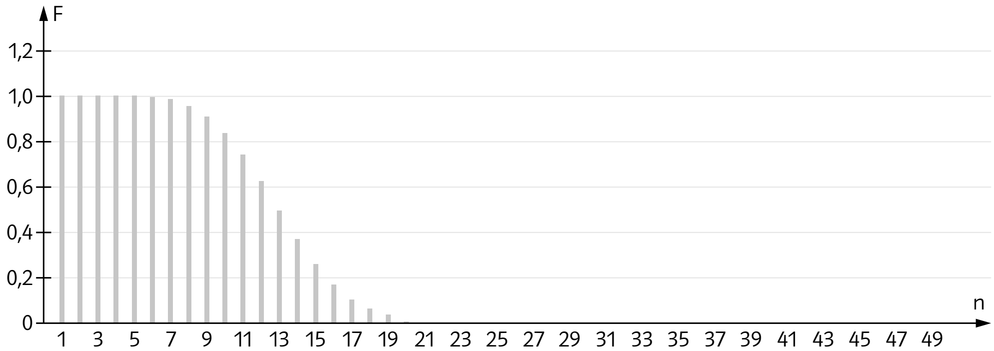


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

Fehler 2. Art zu $p = 0{,}4$:

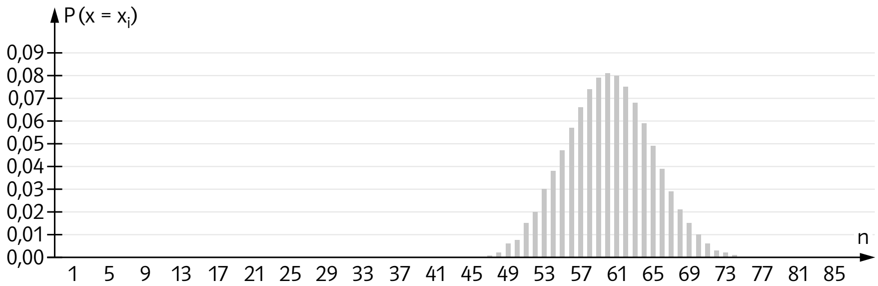


Fehler 2. Art zu $p = 0{,}25$:



c) Sinkt das Signifikanzniveau, dann wird der kritische Bereich kleiner und der Fehler 2. Art wird größer.

d)



Wird n größer, dann werden beide Fehler kleiner.

15 Individuelle Lösungen
Material: 1-€-Münzen

16 a) Für die Firma wäre es schlecht, wenn sich der Bekanntheitsgrad nicht auf 10 % verbessert hat – das Stichprobenergebnis aber so ausfällt, dass man die Hypothese $p \geqq 0{,}4$ unterstützt. Dieses Risiko ist zu minimieren, also H_0: $p < 0{,}4$ und H_1: $p \geqq 0{,}4$.

$$\sum_{k=g}^{100} B(100; 0{,}4; k) \leqq 0{,}05; \quad \text{also} \quad \sum_{k=0}^{g-1} B(100; 0{,}4; k) \leqq 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \text{Tabelle: } g-1 = 48 \quad \Rightarrow \quad g = 49;$$

also ist der Annahmebereich der Gegenhypothese $p \geqq 0{,}4$, d.h. der kritische Bereich der Nullhypothese $p < 0{,}4$; $K = \{49; \ldots; 100\}$;

b) $\alpha' = 4{,}23\,\% < 5\,\%$

c) Man müsste den kritischen Bereich „nach oben“ verschieben, d.h. g größer machen.

d) Die Agentur wählt dieses Verfahren, da dann der für sie schlimme Fehler – der Bekanntheitsgrad ist besser geworden, wird aber nicht bezahlt – minimiert wird.
Also H_0: $p = 0{,}4$ und H_1: $p < 0{,}4$ $\Rightarrow$ $\alpha' = 9{,}1\,\%$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

17 a) z. B. Einsetzverfahren: $3a + 4(2a - 7) = 27 \Rightarrow a = 5;\ b = 3$

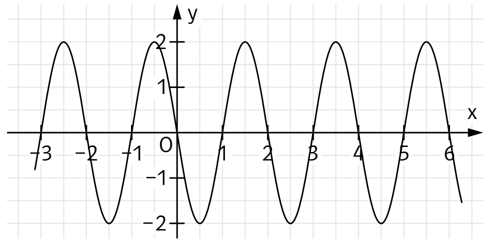
b) z. B. Additionsverfahren $(2 \cdot (II) - (I))$: $0 = 0 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen;

$L = \{(x|y) \mid x = -\frac{3}{2}y + 2;\ y \in \mathbb{R}\}$

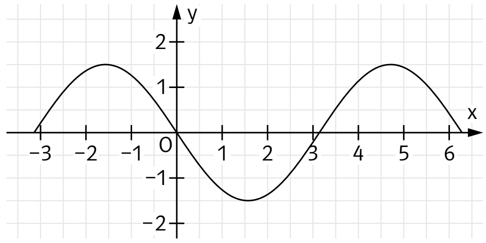
c) z. B. Additionsverfahren $(2 \cdot (II) + (I))$: $0 = -4 \Rightarrow L = \{\ \}$

d) z. B. Additionsverfahren $(4 \cdot (II) + (I))$: $8a = 8 \Rightarrow a = 1;\ b = 0$

18 a) Amplitude: 2; Periode: 2; Verschiebung: 0



b) Amplitude: 1,5; Periode: 2π; Verschiebung: π



4 Thema: Taxiproblem

S. 112

1 (2) $\frac{n+1}{2} \cdot 2 = n + 1 \Rightarrow$ man muss 1 abziehen

(3) beobachtetes Maximum = n $\Rightarrow$ nicht ändern

(4) $1 + n - 1 = n \Rightarrow$ nicht ändern

(5) $n + \frac{(1-1)+(2-1)+(3-2)+\ldots+(n-(n-1))}{n} = n + \frac{n-1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot n - \frac{1}{n} = n + 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Zieht man hiervon 1 ab und lässt $\frac{1}{n}$ weg, dann ergibt sich auch wieder n.

2 Individuelle Lösungen

3 a) (1) ≈ 154; (2) bleibt bei $2 \cdot 69 - 1 = 137$; (3) ≈ 200; (4) ≈ 204; (5) ≈ 239

$\Rightarrow$ Das Verfahren 2 liegt weit von einer möglichen Obergrenze entfernt.

b) z. B: durch Einfügen weiterer Werte zwischen x_4 und x_5 oder indem man den oberen Bereich mehr gewichtet oder indem man untere Werte weglässt.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2